面向21世纪高等学校系列教材

离散数学引论

王树禾　著



中国科学技术大学出版社

责任编辑：黄　德　杨晶磊
封面设计：向　欣

作者简介

王树禾，河北乐亭人，1938年生，毕业于北京大学数学力学系，中国科学技术大学教授。科研与教学方向为离散数学和微分方程，发表数学论文30篇，出版数学著作17种，获中国科学技术大学校级优秀教师奖、中国科学院教学成果一等奖和国家级教学成果二等奖等奖项。

ISBN 7-312-01300-7

9 787312 013003 >

ISBN 7-312-01300-7/O · 249
定价：18.00元

面向21世纪高等学校系列教材

离散数学引论

王树禾 著

中国科学技术大学出版社
2001·合肥

内容简介

本书按硕士研究生教材定位写成，供数学、应用数学、计算机科学技术、信息等专业的研究生和需要较深离散数学的本科生选用。全书划分六篇，主要内容如下：

图论与算法图论、组合论、代数系统、数理逻辑、离散数学中的空间、矩阵和拟阵、Turing 机和计算复杂度理论，每篇配有难易适当的足够作业题。

全书概念与理论明晰严谨，注重算法与应用，文字洗练生动，立论深入浅出，可读与可教性强。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学引论/王树禾著.—合肥：中国科学技术大学出版社，2001.9

ISBN 7-312-01300-7

Ⅰ.离…　Ⅱ.王…　Ⅲ.离散数学-研究生-教材　Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 048454 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号，230026)
中国科学技术大学印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本：850×1168/32　印张：13.25　字数：340 千
2001 年 9 月第 1 版　　2001 年 9 月第 1 次印刷
印数：1—3000 册
ISBN 7-312-01300-7/O·249　　定价：18.00 元

序　言

此书是作者在中国科学技术大学数学系和计算机科学技术系多年主讲研究生和本科高年级离散数学课程的教学笔记整理编撰成册的。出书的目的，一是为研究生教学提供一部可读性和可教性都比较强的好用的教材，希望在严谨性、算法分析、实用与现代化诸方面与已发行的同类著作相比有些增广和新意；二是为从事离散数学研究和计算机科技工作的同志提供一部参考书。

计算机科学的掘起，正在从根本上改造着人类生产活动和智能活动的面貌。计算机是一种解决离散系统中的事理与计量的最强大的武器，被称为“计算机数学”的离散数学恰为计算机科学技术的基础。从数学科学的立场来讲，我们的许多基础数学分支，靠手和笔写证明的数学活动已经陷入“推理不变集”，很难做出重大突破，有不少数学家(例如中国的吴文俊、张景中、杨路等)已经开动计算机来搞数学证明，目前发展到了“可读(可视)证明”的新阶段。我们一直坚信微积分及其衍生的后代学科(例如微分方程)是人类科学思维和科学实践的最伟大的成就之一，从 20 世纪 80 年代起，离散数学越来越受到宠爱，有人戏称，微积分在科学中的皇位有朝一日会让给离散数学的。从应用的角度看，很多重大实用项目(例如信息技术、战争、经济等等)的理论模型正是离散数学模型，通过离散数学的理论推导、算法设计与分析、编程与软件制作，上机付诸实现。离散数学是一种高技术。

离散数学是数学领域当中数学思想最为活泼、最为深刻和充满矛盾的地方，对数学基础的奠定与巩固，离散数学有着不可替代

的作用。同时它富含的文化色彩和人文哲理则是人类现代文明的重要成分。离散数学是一种高文化。

可数集合里发生的事的数学方面都是离散数学的研究对象，囿于作者的见识和本书的定位，我们只选了六篇基础性的内容。

第一篇细讲了图论。背景是目前我国在本科生中开设图论课的大学尚不多，但是网络与信息产业的兴起，又要求高层次的科技人才必须多学点图论(亦称网络数学)。把它放在首篇，则是由于它援引其它知识极少，貌似平易近人，而且论证的技巧和结论生动活泼，足以诱发读者学习离散数学的兴趣。它的基本理论则是代数系统与算法分析理论中某些主要内容的预备知识。

第二篇安排的是与图论近缘的组合问题。和图论的遭遇相似，至今在大学里开设组合论者也不太多，所以本书对组合讲得比较细。

数学家并不都是聪明人，但搞图论与组合，不聪明可不行。反过来，通过图论与组合的学习，倒可以使得原本不太灵活者机敏起来，使人获得非平凡的智慧，并为解决离散数学的问题学会不少绝招。

第三篇是思想深刻、内容抽象的近世代数的某些内容。由于数学与应用数学专业的本科生已系统地学过近世代数，本书只对其主要概念进行简要地复习，但对置换群与 Pólya 计数理论，则进行了详细讲述。

第四篇讨论离散数学中的空间、矩阵和拟阵。它们是定量地解决离散数学问题的工具箱，使离散数学算术化，克服离散数学当中定性有余定量不足的缺点。同时用矩阵的观点解决区组设计和正交设计当中的理论问题与实用问题。

第五篇讲了不确定 Turing 机和计算复杂度理论。这是离散数学与计算机科学的核心问题、要害问题。

第六篇讲述数理逻辑。量时量力，只对命题逻辑与谓词逻辑的基本概念与规则进行了入门介绍，要点是讲推理的逻辑过程。

本书证明与解答的细节写得不可谓不细，使用此书做教材的老师们，可只拣要紧的内容讲授，即只须讲清楚思想、思路、关键技术和非一次性的证明方法，其余细节令同学课后阅读，如此可以用80学时完成教学，又可锻炼学生的独立思考能力。对于追求现代科学技术和现代理性的青年同志，劝君多学离散数学。

本书是中国科学技术大学研究生院资助项目，作者对中科大研究生院和中科大数学系给予本书出版的支持深表感谢；还应感谢我的学长陶懋颀教授，陶先生生前与作者有多年的离散数学方面的合作研究，本书的拟阵和图的群等内容就是参考我们旧日的合作工作写出的；感谢科大听我讲课的历届青年朋友们，正是他们的热烈选修和机智提问，促使我深入思考了许多有趣的问题，从而丰富了本书的内容；还应感谢我妻苏仲华，正因为她业余时间承担全部家务，保障了写作时间的足够投入。假若没有这些志同道合者的援助，仅凭我个人的绵薄之力，本书怕是不能问世的。

教材建设当然是为我国教育事业出力的善事，怎奈本书作者智钝才疏，奉献的这部拙作，想必错误不少，盼请各位同仁批评指正。

王树禾

2001年6月于中科大

目　录

第一篇　图及其算法

1.1　什么是图论

图论是离散数学的重要分支.图是指一个离散集 V 与其某些两元素子集的集合构作的一种数学结构,它的数学形象是,在纸上画几个(顶)点,再把其中一些点对用曲线段或直线段连接起来,如此形成的一维网络,其中点的位置与连线的曲直长短可以任意.图显示的是点与点之间的二元关系.

图论是在民间游戏当中孕育和诞生的,创生于 1736 年,欧拉是图论之父.其后的两百年间,这一学科的发展颇为迟缓,因为当时科学技术较为落后,对图论应用的要求甚寡,到 1936 年,匈牙利著名数学家寇尼希(König)发表名著《有限图与无限图理论》和 1930 年波兰数学家库拉托夫斯基(Kuratowsky)证明了平面图(即可以画在平面上,任两条连线不交叉的图)的充分必要条件之后,图论犹如拨亮了的一盏明灯,在半个多世纪里,得到了长足的进展,因其在现代数学、计算机科学、工程技术、优化管理等领域和人类生产与社交活动中有大用而独树一帜,在数学营垒中异军突起,急剧发展.事实上,当今科学技术正在面临着新的突破,特别是计算机科学技术与网终化的崛起,要求每个数学家和科学家必须接受足够深人的图论教育,以便有能力去解决大量的网络优化和信息化社会当中离散事物的结构与关系问题.这正是图论日益受宠的背景.

下面用若干具体的图论问题显示图论的风貌.

1. 哥尼斯堡(Königsberg)七桥问题

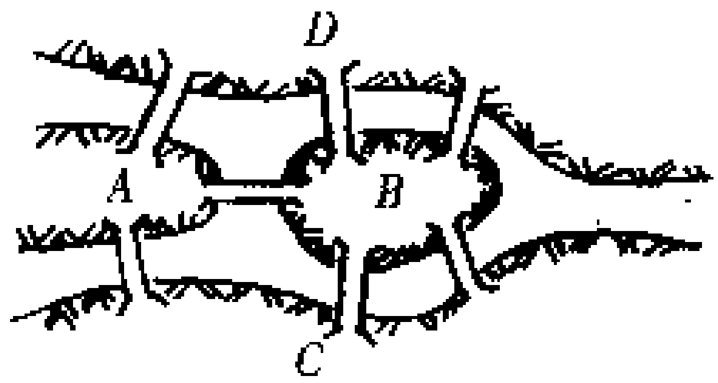


图 1.1

欧洲普瑞格尔河流过古城哥尼斯堡市,河中有岛两座,筑七座桥,如图1.1.节假日市民们老幼相携扶,上岛游览散步,不知何日何人提出如下问题:你能过每桥恰一次再返回出发点吗?反复的奔走实验和总是不能成功,使人们不知所以然地否定了成功的可能.1736年,年方29岁的瑞士著名数学家欧拉就此发表图论的首篇论文,严格证明了七桥问题无解.1736年遂被公认为图论元年.

2. 哈密顿(Hamilton)周游世界和货郎问题(Traveling salesman problem)对计算机科学的挑战

1857年,英国数学家哈密顿发明了一种游戏:在正十二面体的20个顶点上分别标志上北京、东京、柏林、巴黎、纽约、旧金山、莫斯科、伦敦、罗马、里约热内卢、布拉格、新西伯利亚、墨尔本、耶路撒冷、爱丁堡、都柏林、布达佩斯、安亚伯、阿姆斯特丹、华沙等20个遍布全球的大都市,要求从某城出发,沿正十二面体的棱行进,每城恰过一次,再返回出发地.这个游戏是可以成功的,哈氏当年以25枚金币的高价把此项专利出售给了一位玩具商.

哈密顿周游世界的游戏貌似欧拉解决的七桥问题,两者都要求遍历,但七桥问题一次性行遍所有的桥与哈密顿的一次性行遍所有的顶点在难度上一般而言不是同一个级别的问题,后者比前者困难得多!走遍"桥"的问题已经彻底解决,而一次性行遍顶的问题却是当今数学之中悬而未决的难题,本书将把个中难处讲清楚.

把哈密顿周游世界的游戏推而广之,提出了一个在理论上和实用上皆价值连城的所谓货郎问题:

一位货郎到各村去卖货,再返回出发地,要求每村至少去一次,为其设计一种售货路线,使总耗时最短.

如果把村子进行全排列($abcd$ 与 $dcba$ 认为是一种排列),以

全排列为序分别求出相应的总路程，再从总路程中取用最小值对应的那条售货路线．由于村子个数有限，所以货郎问题的最优解是存在的（未必唯一），而且，如上所云，似乎求取有方．可惜$\frac{1}{2}\times n!$种方案个数过多，即使处理一种排列方案算做一次运算，在每秒百亿次运算的巨型计算机上，对例如 128 个村子，要连续运算 10^{700} 个世纪以上！可见这种愚公移山式的解决方式是绝对应该否定的，应当设计有效的算法，但至今对此仍无本质进展，读完本书之后，就会明白，这类问题（代号为 NPC）也许永世不会有效解决了！

3．四色问题

1852 年，伦敦的一位叫做高思利（Guthrie）的大学生提出如下猜想：

任给定的无色地图，把每国版图染上一种颜色，使得邻国异色，用四种颜色足矣．

1879 年，英国数学家肯普（Kemple）发表了极为巧妙的论证，宣称证明了四色猜想成立，不幸十年后被指出错误，1890 年，希伍德（Heawood）沿袭肯普的技巧证明了五色定理，即四色猜想中的 4 改成 5 确实成立．1976 年，美国数学家阿佩尔（Appel）和哈肯（Haken）宣布用计算机证实了四色猜想成立，他们用了一百亿个逻辑判断，耗用 1200 多个机时．但这种不可视的机器证明存在用肉眼看不出其真伪的缺点，至于手写的证明，怕是距成功的时日尚远．

粗看四色猜想，平易近人到如此程度，以致于可以向公路上和我们随机相遇的人用不了 3 分钟就能讲清楚题目的条件和要求，既使是文盲，也可以画出许多实例来验证四色猜想对一些特例可以成立，但它的严格证明，百余年间，不知耗尽了多少精干数学家的脑汁，皆不得其果！

4．拉姆赛问题

1928 年，英国数学家、哲学家、经济学家拉姆赛（Ramsey）在伦敦数学会宣读了一篇数学奇文，提出了所谓拉姆赛数的计算与相

关理论,1930 年他因腹部手术并发症不幸逝世,亡年仅仅 26 岁!但他的关于 Ramsey 数的遗产却永泽数学界,数学家们公认,如果要从离散数学当中选拔一个最精美的成就,那么我们将投拉姆赛理论的票.用图论的方式表述的拉姆赛问题如下:

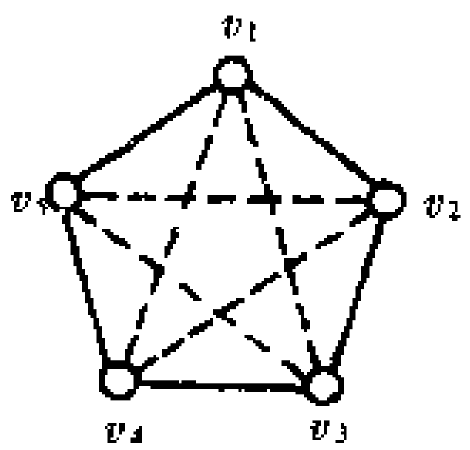


图 1.2

$\forall p,q\in\mathbf{N}$,把一个画上全部对角线的正 n 边形上的直线段(以此 n 个点为两个端点者)用红与蓝两种颜色任意着色,每条线段一种颜色,其结果或者有一个红色 p 边形,连同其全部对角线皆红色,或者有一个蓝色 q 边形,连同其全部对角线皆蓝色,问 n 最小是多少才能保证出现上述结果?

把上述 n 的最小值记成 $r(p,q)$.用社交的话来讲,$r(p,q)$ 是任给的人群中必有 p 人相识或有 q 人彼此不相识的人群人数之最小值.例如 $r(3,3)=6$.事实上,设 $v_1,v_2,\cdots,v_6$ 是任取的 6 个人,约定两人相识时,在两人之间连一条红线,否则,在两人之间连一条蓝线;于是与 v_1 相连的 5 条线中至少有三条同色,不妨设其为红色,且不妨设这三条红线的另一端为 v_2,v_3,v_4,若 v_2,v_3,v_4 三人之间有一条红线,则与 v_1 一起出现三名彼此相识者,不然,即 v_2,v_3,v_4 之间无红线,则他们三人彼此不相识,故 $r(3,3)\leqslant 6$.而 5 个人 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 可能出现如图 1.2 所示的关系,其上实线代表红线,可见这时不再出现 3 人相识和 3 人不相识的现象,故 $r(3,3)=6$.

$r(p,q)$ 称为拉姆赛数,经过几代人的奋斗,加上计算机的帮忙,迄今只求得 9 个非平凡的 Ramsey 数:

$r(3,3)=6,r(3,4)=9,r(3,5)=14,$

$r(3,6)=18,r(3,7)=23,r(3,8)=28,$

$r(3,9)=36,r(4,4)=18,r(4,5)=25.$

著名匈牙利数学家厄尔多斯(Erdös)曾用下面的话比喻计算 Ramsey 数的艰巨性:某年某月某日,一伙外星强盗入侵地球,威胁

道,若不能在一年内求出 $r(5,5)$,他们便灭绝人类! 面对如此生死关头,人类应当召集全球所有的数学家和计算机专家,夜以继日地来计算 $r(5,5)$,以求人类免于灭顶之灾;如果外星人威胁说要求得 $r(6,6)$,那我们已别无选择,只能同仇敌忾,对这批入侵者进行先发制人的打击. 1993 年,美国罗彻斯特理工学院的 S. P. Radziszowski 和奥大利亚国立大学的 B. D. Mckay 用计算机求得 $r(4,5)=25$,相当一台标准电脑 11 年的工作量,是 1928 年以来 Ramsey 数研究当中最不平凡的成果. 我们似不应再有用笔和纸来计算 $r(5,5)$的奢望.

5. 伯努利(Bernoulli)—欧拉错放信笺问题

某人给 6 位朋友每人写了一封信,且准备了 6 个写有收信人地址姓名的信封,问有多少种装入信笺的可能,使得每份信笺与信封皆不相符? 把 6 改成 n 如何?

6. 妖怪问题

图 1.3 和 1.4 中的图称为妖怪(Snark graph),在这里妖怪已非社会用语,而是图论中的专业名词,妖怪是这样一类图:(1)每个顶点处关联着三条边;)2)删去三条边不会破裂成两个有边图;(3)最短圈的长(围长)不小于 5;(4)最少用 4 种颜色把它的边着色,使有公共顶点的边异色.

请再画出一个妖怪来!

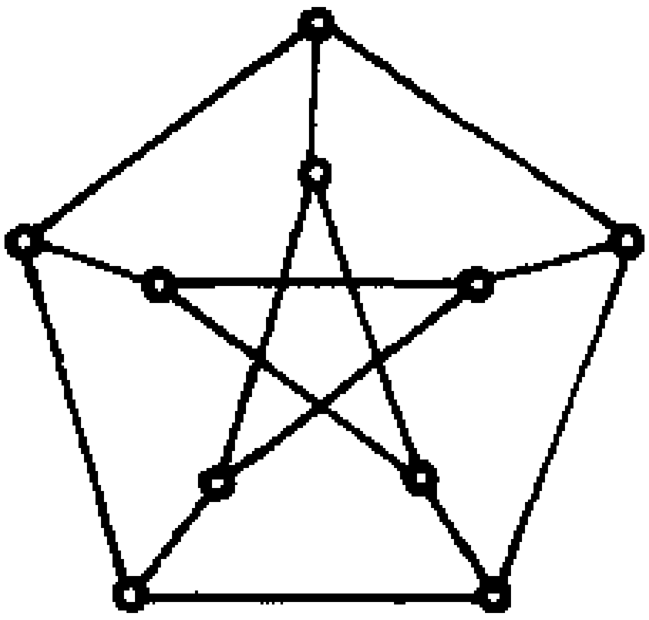


图 1.3

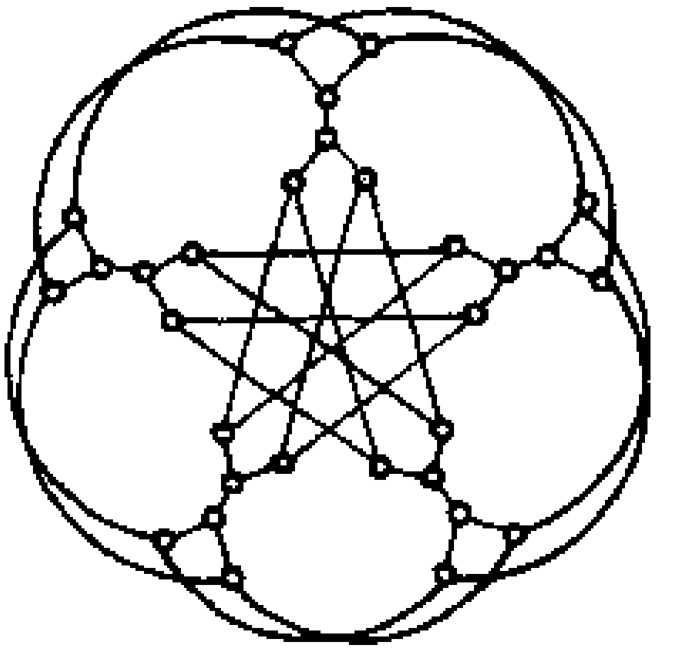


图 1.4

7. 中国邮路问题(Chinese pastman problem)

1962 年,中国数学家管梅谷提出如下的著名于世的中国邮路问题:

一位邮递员从邮局选好邮件去投递,然后返回邮局.当然他必须经过他所管辖的每条街道至少一次,请为他设计一种投递路线,使其耗时最少.

8. 追捕逃犯问题

1987 年,王树禾提出如下追捕问题:

逃犯若干,在公路网上流窜,应至少派几名刑警,才能保证把这些罪犯捉拿归案?

9. 迷宫问题

希腊神话上有一故事:食人人面妖精米诺托担心被他残害的冤魂向他讨还血债,修筑了一座其结构不为外人所知的迷宫,希腊英雄忒修斯立志为民除害,欲沿每条走廊右侧通行,搜索且杀掉妖怪及其帮凶,再由入口退出.请为忒修斯设计一种搜索方法.(注意迷宫结构是未知的!)

10. 3*x* + 1 问题

1950 年,卡拉兹(collatz)在麻萨诸塞坎布里奇市世界数学家大会上提出如下的"$3x+1$"猜想:对任取的自然数 x_0,

$$x_1=\begin{cases}\dfrac{x_0}{2}, & x_0\equiv 0(\mathrm{mod}2);\\[2ex] \dfrac{3x_0+1}{2}, & x_0\equiv 1(\mathrm{mod}2),\end{cases}$$

$$x_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{x_n}{2}, & x_n\equiv 0(\mathrm{mod}2);\\[2ex] \dfrac{3x_n+1}{2}, & x_n\equiv 1(\mathrm{mod}2)\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots.$$

则存在 $x_k=1$.

厄尔多斯指出:"数学还没有发展到解决这个问题的水平."

图论中如上述十个问题那样,在理论上、应用上和算法的复杂

性上十分有趣的问题非常之多.它最吸引人的地方是蕴含了丰富不俗的新思想、漂亮的图形和巧妙的证明,问题的外表简单朴素,本质上却十分刁难复杂,使得我们在图论面前必须谨慎严肃地思考问题.

图论的分支很多,例如图论、算法图论、极值图论、网络图论、模糊图论、代数图论、随机图论和超图论等,我们只讨论图论与算法图论.

1.2 图的定义

定义 1 有序三重组 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$称为一个有向图(Graph),其中

$V(G)\neq\varnothing$,称为顶集,$V(G)$的元素叫做图 G 的顶点.

$E(G)$称为边集,其元素叫做 G 的边($E(G)\cap V(G)=\varnothing$).

$\psi_G:E(G)\to V(G)\times V(G)$叫做关联函数.□

本书记$|V(G)|=\upsilon$,$|E(G)|=\varepsilon$,当 $\upsilon+\varepsilon<+\infty$时,称 G 为有限图,本书只讨论有限图.

例如图 1.5 中,

$V(G)=\{v_1,v_2,v_3\}$,

$E(G)=\{e_1,e_2,e_3\}$,

$\psi_G(e_1)=v_3v_1,\psi_G(e_2)=v_1v_2,\psi_G(e_3)=v_2v_3$.

如果把图中的箭头擦掉,即映射 ψ_G 中的顶对 $uv\in V(G)\times V(G)$视为 $uv=vu$ 时,则 G 称为无向图,本书把无向图简称图.

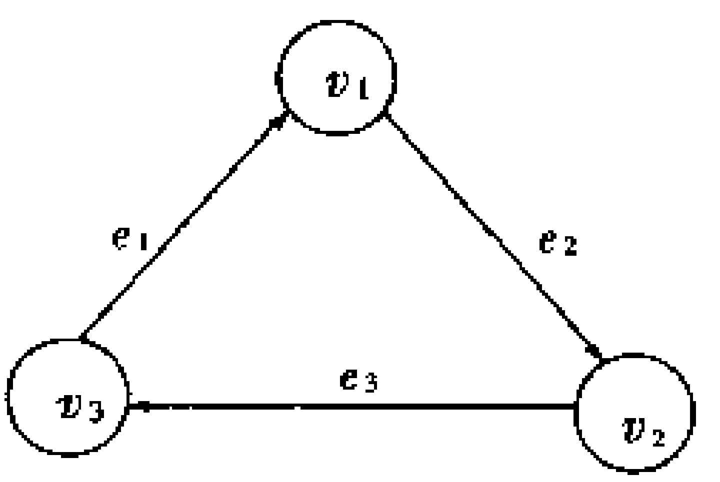


图 1.5

定义 2 若 $V(G)=X\cup Y$,其中 $X\cup Y=\varnothing$,且 X 中任二顶不相邻,Y 中任二顶不相邻,则称

G 是二分图;若 X 中每顶皆与 Y 中一切顶相邻,则称 G 为完全二分图,记之为 $K_{m,n}$,其中 $m=|X|,n=|Y|$.

所谓两顶 u,v 相邻是指 $\psi_G(e)=uv$,或简写成 $e=uv$,即边 e 的两个端点称为相邻的顶.□

定义 3 G 与 H 是两个图,存在映射

$$\theta: V(G)\to V(H), \varphi: E(G)\to E(H),$$

θ 与 φ 皆可逆映射,当且仅当 $\psi_G(e)=uv$ 时,$\psi_H(\varphi(e))=\theta(u)\theta(v)$,则称 G 与 H 同构,记成 $G\cong H$.□

例如图 1.6 中的两图 G 与 H 有同构关系:$G\cong H\cong K_{3,3}$.

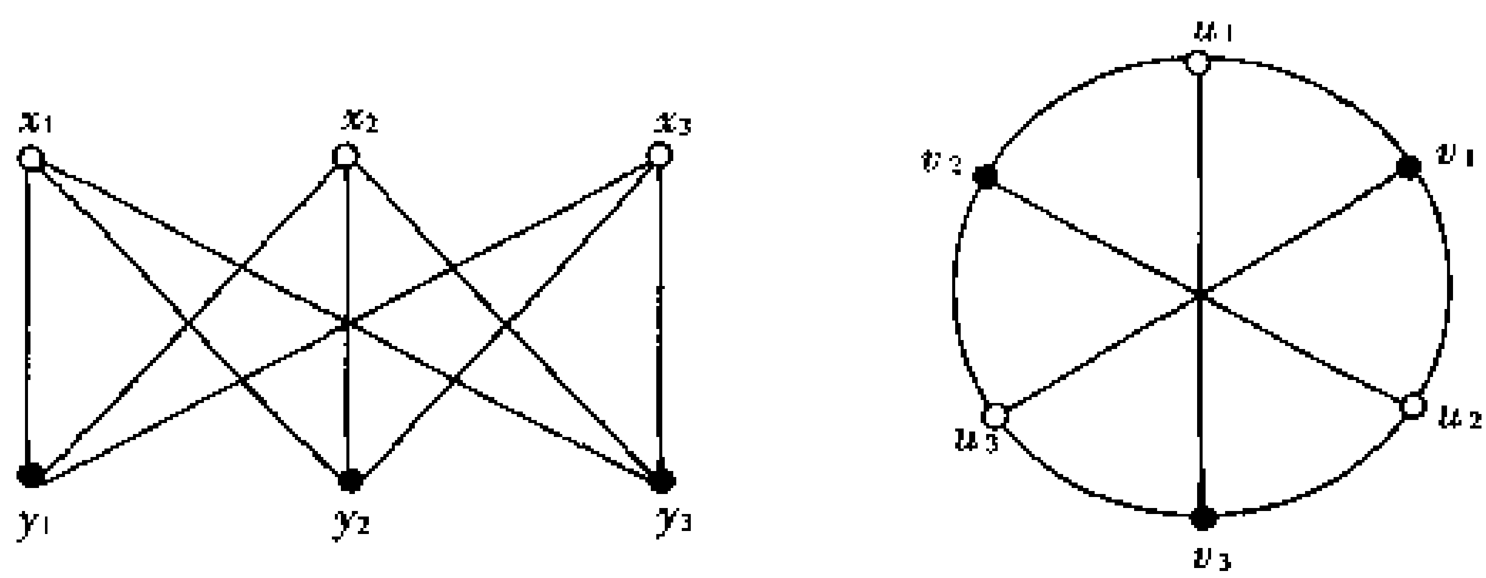


图 1.6

定义 4 $\psi_G(e)=uu$ 时,称顶 u 与边 e 相关联(顶 v 与 e 相关联),$\psi_G(e)=vv$ 时 e 叫做环,$d(v)=d_1(v)+2l(v)$ 称为顶 v 的次数(degree),其中 $d_1(v)$ 是与顶 v 关联的非环边的条数,$l(v)$ 是与 v 关联的环数.□

如无声明,本书的图指无环的所谓单图.

由于每条边有两个端点,环视为两端点重合,故有以下定理.

定理 1 (Euler,1736) $\sum\limits_{v\in V(G)} d(v)=2\varepsilon$.

推论 1 奇次顶的总数是偶数.

定理 1 与推论 1 的证明不足道,但它们很有用.例如由推论 1 知,握过奇次手的人数是偶数,碳氢化合物中的氢原子个数是偶数.

例 1 存在这种多面体吗? 它有奇数个面,而每个面又是奇数条边的多边形.

解 不存在.事实上,若存在这种多面体,以此多面体的面集为一个图 G 的顶集 $V(G)$,当且仅当两个面有公共棱时,在相应的两顶 $u,v\in V(G)$ 之间连一条 uv,依题意,$|V(G)|\equiv 1 \pmod 2$;$d(v)\equiv 1 \pmod 2$,$\forall v\in V(G)$;从而 $\sum\limits_{v\in V(G)} d(v)\equiv 1 \pmod 2$,与定理相违,故无此种多面体.

关于图的同构,最棘手的问题是下面的乌拉姆猜想:

Ulam(1929):G_1,G_2 是两个图,且 $G_1-u_i\cong G_2-v_i$,$i=1,2,\cdots,\upsilon$,$|\upsilon|=|V(G_1)|=|V(G_2)|$,则 $G_1\cong G_2$.

用笔和纸给出 Ulam 猜想的解答看来近期希望不大.

定义 5 $W=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$,其中 $e_i\in E(G)$,$i=1,2,\cdots,k$;$v_j\in V(G)$,$j=0,1,\cdots,k$;$e_i=v_{i-1}v_i$,则称 W 是图 G 中的一条路(Walk),v_0 叫做 W 的起点,v_k 叫做 W 的终点,k 叫做路长,$v_j(1\leqslant j\leqslant k-1)$ 称为 W 的内点.

各边相异的路称为行迹(Trail).

各顶相异的路称为轨道(Path),记成 $P(v_0,v_k)$.

起点与终点重合的路称为回路.

起点与终点重合的轨道称为圈(Cycle).

长 l 的圈称为 l 阶圈,3 阶圈也叫做三角形;最长圈之长称为图的周长;最短圈之长称为图的围长.

$u,v\in V(G)$,u,v 分别为起点与终点的最短轨之长称为 u 与 v 的距离,记成 $d(u,v)$.

$u,v\in V(G)$,存在以 u,v 分别为起点与终点之轨时,称 u 与 v 在 G 中连通;每对顶皆连通的图称为连通图.

G 的直径定义为 $d(G)=\max\{d(u,v)\mid u,v\in V(G)\}$.□

定义 6 G 与 H 是两个图,且 $V(H)\subseteq V(G)$,$E(H)\subseteq E(G)$,则称 H 是 G 的子图,记成 $H\subseteq G$;若 $H\subseteq G$,但 H 与 G 不同构,则称 H 是 G 的真子图,记成 $H\subset G$;若 $H\subseteq G$,且 $V(H)=V(G)$,则称 H 是 G 的生成子图;若 $H\subseteq G$,且 $V(H)=H'$,而 E

(H)是 $E(G)$中两端皆在 H'中的边构成的$E(G)$的子集，则称 H 是由H'导出的G之子图，记成 $H=G[H']$；若 $V(G)=\bigcup_{i=1}^{\omega}V_i$，且当且仅当两顶同属于一个子集 V_i 时，此二顶连通，则称 $G[V_i](i=1,2,\cdots,\omega)$是 G 的连通片. □

例 2 有 $2n$ 个电话交换台，每台至少与 n 个台有直通线路，则任两台间皆可通话.

证 把交换台视为图 G 之顶，当且仅当两台间有直通线路时，此相应的两顶相邻，于是问题化为欲证 $2n$ 顶的图 G，每顶次数至少为 n，则此图连通. 事实上，若 G 不是连通图，则至少有一个连通片，其顶数至多是 n，在此连通片上，顶的次数最大者不超过 $n-1$，与原图 G 中每顶次数至少为n 矛盾，证毕.

例 3 若图中只两个奇次顶，则此二顶连通.

证 若 $u,v\in V(G)$，$d(u)\equiv d(v)\equiv 1(\mathrm{mod}2)$，则 u,v 必在 G 的同一个连通片上，否则，若 G_1,G_2 是 G 的两个连通片，且 $u\in V(G_1)$，$v\in V(G_2)$，则 G_1 与 G_2 这两个图中都只有一个奇次顶，与推论 1 相违，证毕.

定理 2 G 为二分图的充分必要条件是G 中无奇阶圈.

证 不妨设 G 为连通图.

若 G 无奇圈，令

$$X=\{w\mid w\in V(G),d(v_1,w)\equiv 0(\mathrm{mod}2)\},$$
$$Y=\{w\mid w\in V(G),d(v_1,w)\equiv 1(\mathrm{mod}2)\},$$

其中 v_1 是 G 上任指定的一个顶. 任取 $u,v\in X$，设 $P_1(v_1,u)$是从 v_1 到 u 的最短轨，$P_2(v_1,v)$是从 v_1 到 v 的最短轨，又设 u_1 是 P_1 与 P_2 最后一个公钩顶，由 P_1 与 P_2 的最短性，P_1 上的一段 $P_{11}(v_1,u_1)$与 P_2 上的一段 $P_{21}(v_1,u_1)$等长，且都是最短的从 v_1 到 u_1 的轨. 又 P_1 与 P_2 之长皆偶数，从而 P_1 上的另一段 $P_{12}(u_1,u)$与 P_2 上的另一段 $P_{22}(u_1,v)$有相同的奇偶性. 若 u 与 v 相邻，则 P_{12}，P_{22}与边 uv 围成一个奇圈，与 G 中无奇圈相违，于

是得证 X 中任二顶不邻;同理 Y 中任二顶不邻,即 G 是二分图. 充分性得证. 下证必要性.

若二分图 G 中无圈,自无奇圈;若二分图 G 中有圈 $C = v_0v_1v_2\cdots v_kv_0$,不妨设 $v_0 \in X$,于是 $v_0, v_2, v_4, \cdots, v_0 \in X$, $v_1, v_3, v_5, \cdots, v_k \in Y$,可见 k 是奇数,C 是长 $k+1$ 的偶圈,故 G 中无奇圈,证毕.

例 4 一只老鼠在 $3\times3\times3$ 的立方体乳酪块上咬出一条洞,这个洞通过 $1\times1\times1$ 的 27 个小立方体的中心. 它从大立体的一角咬起,只要还有它没有尝过的 $1\times1\times1$ 的小点心块,就继续咬,问它会在 $3\times3\times3$ 的立方体中心停下来吗? 假设这只老鼠是从一个小立方体中心沿与侧面正交的方向向另一未咬过的小立体咬过去的.

解 以每个 $1\times1\times1$ 的小立体为顶构作一个图 G,把 $3\times3\times3$ 大立方体中心那块小立方体与开始咬的那个小立体之间连一边,再把有公共侧面的小立方体之间连一边. 以八个角和六个侧面中心处的小立方体构成 X 集,其余的小立方体构成 Y 集,于是 G 是二分图,见图 1.7. G 中无 27 阶圈,所以老鼠不会在 $3\times3\times3$ 的立方体中心停止.

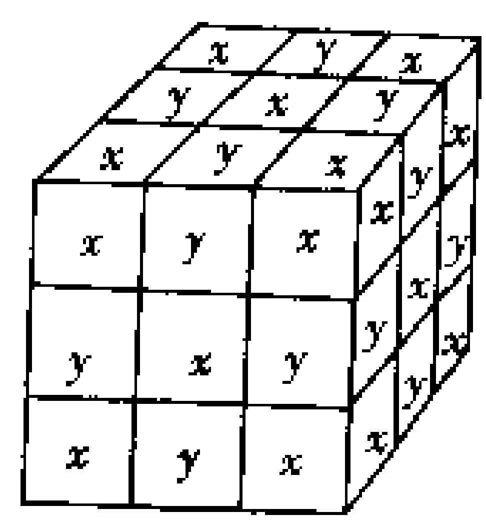


图 1.7

定义 7 称每对顶间至多一条边且无环的图为单图;若 G 是单图,构造另一图 G^c,使得 $V(G) = V(G^c)$,当且仅当在 G 中二顶不邻时,此二顶在 G^c 中相邻,则称 G^c 为 G 之补图. □

例 5 单图与其补图必有一个连通图.

证 只要证出 G 不连通,则 G^c 是连通图,设 $G_1, G_2, \cdots, G_\omega$ 是 G 的 ω 个连通片,$\omega>1$. $\forall\, u, v \in V(G)$,若 u, v 在同一个连片 G_i 上,$1\leqslant i\leqslant\omega$,设 w 是不在 G_i 上的顶,则 $uw, vw \in E(G^c)$,即在 G^c 中 u 与 v 二顶连通;若 u 与 v 分属于两个连通片 G_k 与 G_l, $1\leqslant k, l\leqslant\omega$,则 $uv \in E(G^c)$, u 与 v 在 G^c 中亦连通,由 u 与 v 之任

意性知 G' 是连通图，证毕.

1.3 Brouwer 不动点定理

本节用图论方法给出拓扑学中著名的 Brouwer 不动点定理的一个新证明，此证法的通俗易懂的程度很值得欣赏，它是用图论方法证明其它数学分支中的理论的生动范例.

我们把平面闭三角区域$\triangle^2$ 进行单纯剖分

$$\triangle^2=\bigcup_{i=1}^{m}\delta_i^2.$$

其 δ_i^2 是小三角形，且 $\delta_i^1\bigcup_{i\neq j}\delta_j^2=\varnothing$ 或 δ^0 或 δ^1；这里的 δ^0 是一个顶点，δ^1 是两个小三角形的一条公共边，把$\triangle^2$ 与 $\delta_i^2, i=1,2,\cdots,m$ 的顶用 0,1,2 标号；若

(1)$\triangle^2$ 三个顶分别标以 0,1,2;

(2)$\triangle^2$ 的一条边的两端标号为 i 与 j, $0\leqslant i<j\leqslant 2$，与此边接触的小三角形之顶亦标号 i 或 j，则称此种标号为正态标志.

在正态标志中，一个小三角形三个顶分别标志 0,1,2 时，称这个小三角形为正态三角形.

定理 1(Sperner, 1928)　在$\triangle^2$ 的单纯剖分正态标志中，必有奇数个正态三角形.

证　令 δ_0^2 是$\triangle^2$ 的外部区域，$\delta_1^2, \delta_2^2, ;, \delta_m^2$ 是剖分所得之小三角形，下面构作一个图 G，使 $V(G)=\{\delta_0^2,\delta_1^2,\cdots,\delta_m^2\}$，当且仅当 δ_i^2 与 $\delta_j^2(i\times j\neq 0)$有公共的 $0-1$ 标志的边时，在 δ_i^2 与 δ_j^2 之间连一条 G 的边；对于 δ_0^2 与 $\delta_i^2(1\leqslant i\leqslant m)$，当且仅当 δ_i^2 的 $0-1$ 边完全落在$\triangle^2$ 的 $0-1$ 边上时，在 δ_0^2 与 δ_i^2 之间连一条 G 的边，见图 1.8

下面证明 $d(\delta_0^2)\equiv 1(\bmod 2)$.

事实上，$d(\delta_0^2)$是$\triangle^2$ 上 $0-1$ 边以 0,1 为端点的小区间的个数；若$\triangle^2$ 的这条边的内点无小三角形之顶，则 $d(\delta_0^2)=1$；若$\triangle^2$

的这条边的内点有小三角形之顶，且这些小三角形皆标以 0 或 1，亦有 $d(\delta_0^2)=1$；若$\triangle^2$ 的这条边的内点上 0,1 标号都有，我们把两端标号一致的小区间缩成一点，标号不变，这时，$\triangle^2$ 这条边上的标号为 0101…01，这里有奇数个小区间端点分别标志以 0 与 1，故 $d(\delta_0^2)\equiv 1(\mathrm{mod}2)$.

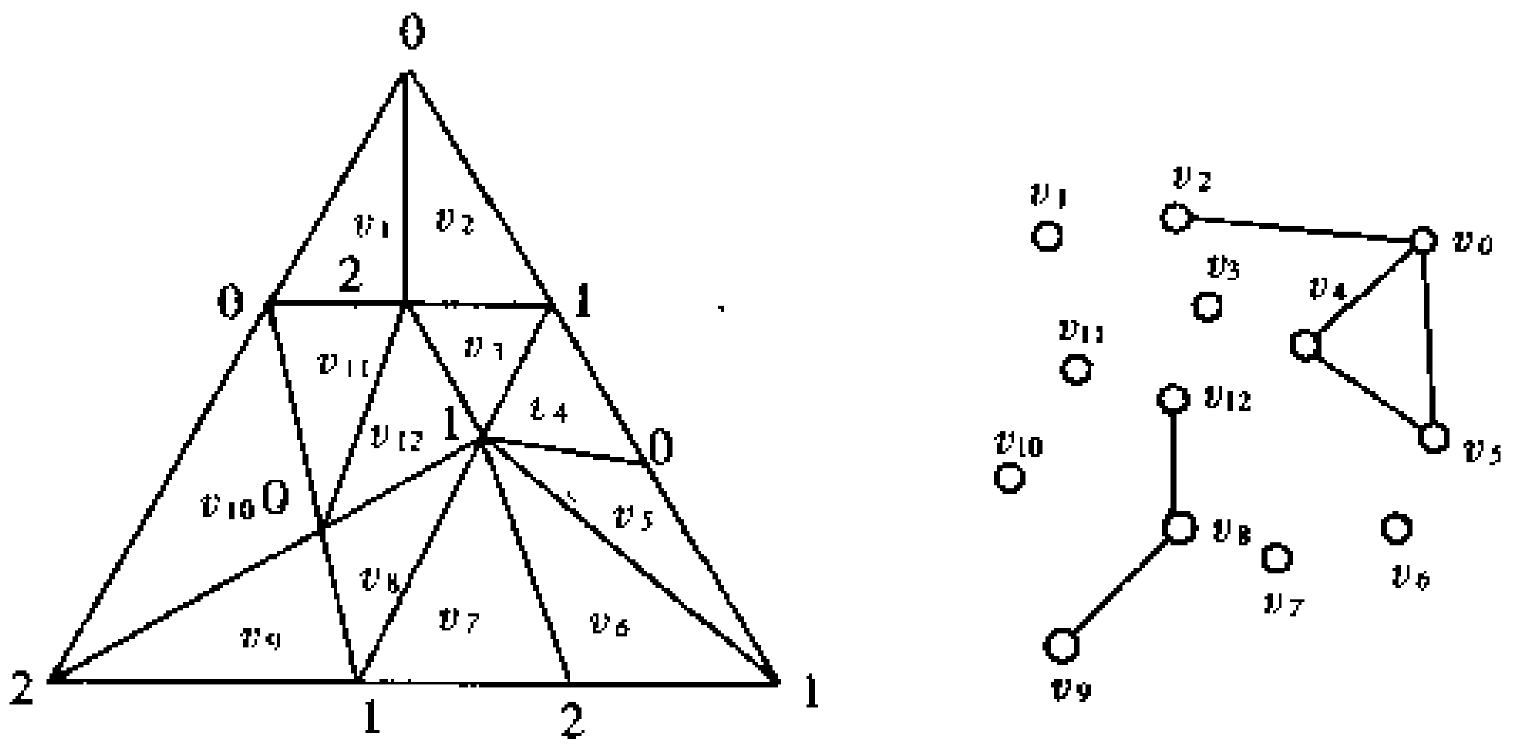


图 1.8

由 1.2 节推论 1，$\delta_1^2,\delta_2^2,\cdots,\delta_m^2,\delta_0^2$ 中奇次顶是偶数个，而 $d(\delta_0^2)$是奇数，故 $d(\delta_1^2),d(\delta_2^2),\cdots d(\delta_m^2)$中有奇数个奇数，且 $d(\delta_i^2)<3$，故 $\delta_1^2,\delta_2^2,\cdots,\delta_m^2$ 中的奇次顶只能是一次的；又仅当 δ_i^2 是正态三角形时，$d(\delta_i^2)=1$，故正态三角形个数是奇数，证毕.

定理 2(Brouwer)　$f:\triangle^2\to\triangle^2$ 是连续映射，则 $\exists\, x_0\in\triangle^2$，使得 $f(x_0)=x_0$.

证　设 x_0,x_1,x_2 是$\triangle^2$ 的三个顶点，则$\triangle^2$ 上任一点 x 可唯一地表成

$$x=a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2,$$

其中 $a_i\geqslant 0(i=0,1,2)$，$\sum\limits_{i=0}^{2}a_i=1$. 这里写的 x,x_0,x_1,x_2 是二维向量，记 $x=(a_0,a_1,a_2)$，$f(x)=(a'_0,a'_1,a'_2)$. 令

$$S=\{(a_0,a_1,a_2)\,|\,(a_0,a_1,a_2)\in\triangle^2,a_i\geqslant a'_i,i=0,1,2\},$$

只欠证$\bigcap\limits_{i=0}^{2} S_i \neq \varnothing$. 因为若这是真的,则$\exists (a_0, a_1, a_2) \in \bigcap\limits_{i=0}^{2} S_i$,且$a'_i \leqslant a_i$, $i=0,1,2$;又$\sum\limits_{i=0}^{2} a'_i = \sum\limits_{i=0}^{2} a_i$,故$(a'_0, a'_1, a'_2) = (a_0, a_1, a_2)$,即$(a_0, a_1, a_2)$是$f$的不动点.

为此,考虑$\triangle^2$的一个单纯剖分正态标志,使得标i的每个顶属于S_i, $i=0,1,2$. 事实上,$\triangle^2$上任一点$x=(a_0,a_1,a_2)$, $f(x)=(a'_0, a'_1, a'_2)$时,存在一个S_i,使$x \in S_i$,且$a_i>0$;否则对每个$a_i>0$, $a'_i>a_i$,于是$\sum\limits_{i=0}^{2} a'_i > \sum\limits_{i=0}^{2} a_i$, 矛盾. 我们如下地标志:

一个三角形顶点$x \in S_i$且$a_i>0$时,x标以i. 这种标志是正态标志,例如$\triangle^2$的顶点$x_i(i=0,1,2)$有$a_i=1$,故$x_i \in S_i$,标成i;在$\triangle^2$的x_0x_1边上各点的$a_2=0$,只能把这边上的点标以0或1;x_0x_2边上的点同理只能标0或2;x_1x_2上的点只能标1或2,故为正态标志.

由定理1,至少有一个正态三角形,其顶点分别属于S_0, S_1, S_2. 我们把剖分无限加密,且小三角形有任意小的直径,则S_0, S_1, S_2中有三个点相距可以任意小,又f是连续的,故$S_i(i=0,1,2)$是闭集,于是$\bigcap\limits_{i=0}^{2} S_i \neq \varnothing$,证毕.

1.4 Dijkstra 算法

给定连接若干城市的铁路网,找出指定二城市间的最短铁路路线. 这个实际模型化成数学模型如下:

$w: E(G) \to \mathbf{R}$,称$w(e)$是边e的权,这时G称为加权图. 称$W = \sum\limits_{e \in E(G)} w(e)$为$G$的权. 我们欲求满足某种条件的子图$H \subseteq G$,且使

$$W(H) = \sum_{e \in E(H)} w(e) = \min, \tag{1}$$

上述铁路问题是它的特殊情形，H 是具有最短性的一条轨 P_0，即(1)中的 $H=P_0(u,v)$，(1)变成

$$W(P_0(u,v))=\min_{P\in\mathscr{H}(u,v)}\{W(P(u,v))\},\qquad(2)$$

其中 $u,v\in V(G)$，$\mathscr{H}(u,v)$是 G 中起止点为 u,v 的轨的集合. 我们称(2)中的 $W(P_0(u,v))$为 u,v 之间的距离.

许多实际模型各异的问题，其数学模型皆与(2)一致.

下面介绍狄克斯特拉(Dijkstra)算法.

所谓算法是一种有穷规则，它明确规定何时应做何种操作.

如果对于图论问题 D，存在一个多项式 $P(\nu,\varepsilon)$，使得解决 D 的算法的耗时为 $O(P(\nu,\varepsilon))$，则称这个算法是一个好的图论算法，其中 ν 与 ε 分别代表此图论问题的实例中图的顶数与边数.

1959 年，荷兰计算机科学家狄克斯特拉给出解决最短轨问题的好算法.

DIJKSTRA 算法：

(0) u,v 不相邻时，$w(uv)=\infty$.

(1)令 $l(u_0)=0$，$l(v)=\infty$，$v\neq u_0$；$S_0=\{u_0\}$，$i=0$.

(2)对每个 $v\notin S_i$，用

$$\min\{l(v),l(u_i)+w(u_iv)\}$$

代替 $l(v)$；设 u_{i+1}是使 $l(v)$取最小值的 $V(G)-S_i$ 中的顶，令 $S_{i+1}=S_i\cup\{u_{i+1}\}$.

(3) $i=\nu-1$，止；若 $i<\nu-1$，用 $i+1$ 代替 i，转(2). □

由上述算法可知：

(1) S_i 中各顶标 $l(u)$即 u_0 到 u 的距离. 因 $\nu<\infty$，故有限步之后，$V(G)$中的每顶都标志了到 u_0 的距离，进而可以找到各顶到 u_0 的最短轨.

(2)DIJKSTRA 算法的时间复杂度为 $O(\nu^2)$，D 算法是好算法.

例 求各顶到 u_0 的距离和相应的最短轨，图中边 e 旁的数字是 $w(e)$.

图1.9(h)中的粗实线标出各顶到 u_0 的一条最短轨,顶 u 旁写的数字即 $d(u_0,u)$.

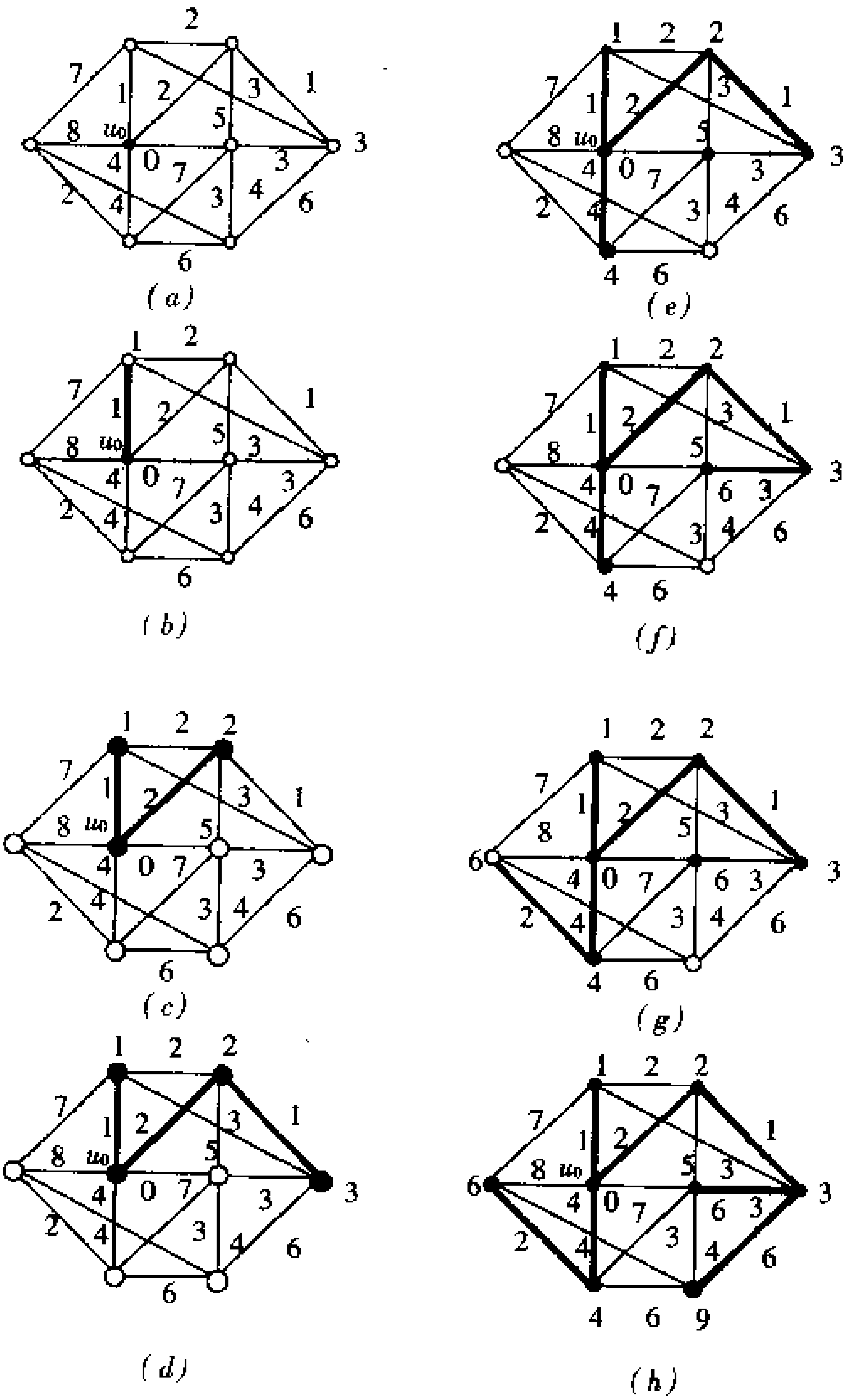


图1.9

习题一

1. 两个人或两个人以上的人群中，必有两个人，此二人在此人群中有一样多的朋友.

2. 单图 G 每顶次数不少于 3，则 G 中有偶圈.

3. (1) $G \cong H$，则 $\upsilon(G)=\upsilon(H)$，$\varepsilon(G)=\varepsilon(H)$.

   (2) (1)之逆不真.

4. 画出一切不同构的四顶单图.

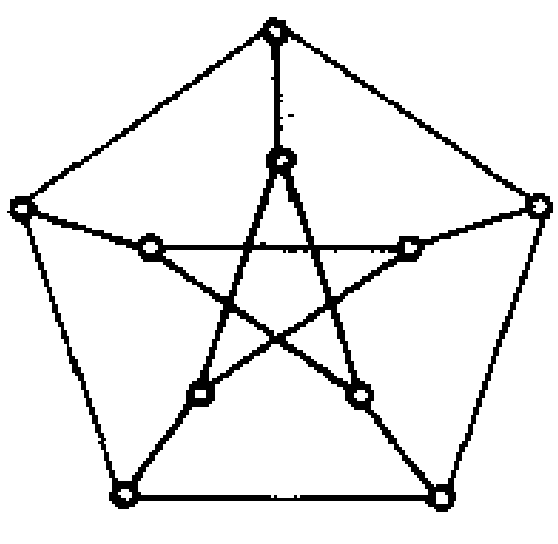
5. 一间房子中有 N 个人，$N>3$，之中至少有一个人没有和房子里每个人握手，房子里可能与每个人握过手的人数最多是多少？

6. 把 1,2,3,4,5 任意划分成两个集合，必然有一个集合含有两数及其差.

7. 从 1 到 100 的自然数中，每次取两个数，要求两数之和大于 100，，有多少种取法？

8. $2n(n\geqslant 2)$ 个人每人至少同其中 n 个人相识，则其中至少四个人，此四人围圆桌而坐时，每人旁边是他认识的人.

9. 证明：图 1.10 中的图同构.



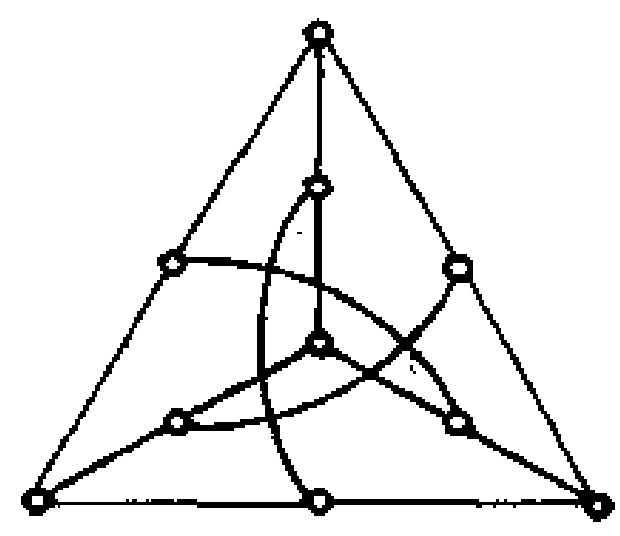


图 1.10

10. $G \cong H$ 的充要条件是存在可逆映射

$$\theta: V(G) \to V(H)$$

使得 $uv \in E(G)$，当且仅当 $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$，其中 G 与 H 是

单图.

11. G 是单图,则 $\varepsilon=\binom{v}{2}$的充要条件是 $G\cong K_v$, K_v 表示每两顶皆邻的所谓完全图.

12. (1)$\varepsilon(K_{m,n})=mn$;(2)G 是完全二分图,则 $\varepsilon(G)\leqslant\frac{1}{4}(v(G))^2$.

13. 象棋比赛中,任两选手至少下一盘,则存在两名选手,他们下过的盘数恰好一样.

14. 上题中,每名选手与其余选手都比赛过一盘,参赛总人数为 n,求总盘数.

15. 旅游小组中任 4 人中至少有 1 人以前见过另外 3 人,则任意 4 人中有 1 人,他早就见过旅游小组中的每个人(小组中至少 4 人).

16. 图 G 中每顶至少 2 次,则 G 中有圈.

17. n 个运动队之间安排一项竞赛,已赛完 $n+1$ 局,求证:存在一个队,它已至少参加过 3 局比赛.

18. $A\subseteq V(G)$, k 是恰一端在 A 中的边数,若 A 中奇次顶的个数是偶数,则 k 为偶数,否则 k 为奇数.

19. 一些圆面覆盖平面上取定的 $2n$ 个点,每个圆至少盖住其中 $n+1$ 个点,则任意两个点能由平面上的一条曲线联络,这条曲线整个被一些圆所覆盖.

20. 每顶皆 2 次的连通图是圈.

21. 是否有这种不连通单图,$v\leqslant 6$,而每顶皆 2 次?

22. 有多少顶点为 6 个的单图,每顶次数皆 2?

23. k 维立方体是顶点为分量为 0 或 1 的 k 维向量,又当且仅当两顶仅一个分量相异时,此二顶相邻,证明:k 维立方体有 2^k 个顶,$k2^{k-1}$条边,且它是 2 分图.

24. K_n^c 与 $K_{m,n}^c$是什么样的图?

25. $G^c \cong G$ 时，称 G 是自补图；证明：对于自补图，$\upsilon(G) \equiv 0$ 或 1(mod4).

26. 有多少 $\upsilon=5$ 的自补单图？

27. 每个 n 顶单图与 K_n 的一个子图同构.

28. 完全图每个导出子图仍是完全图.

29. 二分图的任一子图（顶数不少于2）仍分二分图.

30. 求一个二分图，它不与任何 k 维立方体的子图同构.

31. G 是单图，整数 n 满足 $1<n<\upsilon-1$，证明：若 $\upsilon \geqslant 4$，且 G 的所有 n 顶导出子图都有相同的边数，则 $G \cong K_\upsilon$ 或 $G \cong K_\upsilon^c$.

32. $\delta \leqslant \frac{2\varepsilon}{\upsilon} \leqslant \triangle$，其中 δ 与 $\triangle$ 分别是图 G 顶的最小次数和最大次数.

33. 一个 k 次正则（每顶皆 k 次）二分图的顶划分为 $V(G)=X \cup Y$，则 $|X|=|Y|$.

34. $d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_\upsilon)$ 称为图的次数序列，证明：非负整数序列 $d_1, d_2, \cdots, d_\upsilon$ 是图的次数序列的充要条件是 $\sum_{i=1}^{\upsilon} d_i \equiv 0(\mathrm{mod}2)$.

35. 单图的次数序列叫做图序列，证明：

(1)7,6,5,4,3,3,2 与 6,6,5,4,3,3,1 不是图序列.

(2) $d_1, d_2, \cdots, d_\upsilon$ 为图序列，且 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_\upsilon$，则 $\sum_{i=1}^{\upsilon} d_i$ 是偶数，且对于 $1 \leqslant k \leqslant \upsilon$，

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{\upsilon} \min\{k, d_i\}.$$

36. $d_1, d_2, \cdots, d_\upsilon$ 是非增的非负整数列，d' 是序列 $d_2-1, d_3-1, \cdots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2} \cdots, d_\upsilon$，证明：

(1) $d_1, d_2, \cdots, d_\upsilon$ 是图序列当且仅当 d' 是图序列.

(2)给出一个由图序列构作单图的算法.

37. 无环图 G 包含一个二分生成子图H,使得 $d_H(v)\geqslant\frac{1}{2}d_G(v)$对一切 $v\in V(G)$成立.

38. $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为平面点集,任二点相距至少为 1,则相距恰为 1 的点对少于 $3n$ 个.

39. 图 G 的边图是以$E(G)$为顶集,当且仅当两边相邻(有公共顶)时,在边图中此二顶相邻,证明:若 G 是单图,则 G 的边图有$\varepsilon(G)$个顶,$\sum\limits_{v\in V(G)}\binom{d_G(v)}{2}$条边;且画出 K_5 的边图.

40. G 是单图,$\delta\geqslant k$,δ 是 G 的顶最小次数,则 G 中有长 k 的轨.

41. G 是连通图的充要条件是 $V(G)$的每个分成两个非空子集 V_1,V_2 的划分,总存在一边,它的两端分别属于 V_1 与 V_2.

42. G 是单图,$\varepsilon>\binom{v-1}{2}$,则 G 连通.

43. $v>1$,画一个非连通单图,使 $\varepsilon=\binom{v-1}{2}$.

44. G 是单图,$\delta>\left[\frac{v}{2}\right]-1$,则 G 连通.

45. (1)$e\in E(G)$,则 $\omega(G)\leqslant\omega(G-e)\leqslant\omega(G)+1$,其中 $\omega(G)$是图 G 的连通片个数.

(2)$v\in V(G)$,则(1)中的 $G-e$ 未必可由 $G-v$ 代替.

46. 图 G 是连通图,每顶皆偶次,则 $\omega(G-v)\leqslant\frac{1}{2}d(v)$.

47. 连通图两条最长轨有公共顶.

48. G 中顶 u,v 连通时,u,v 之间的距离定义为 u,v 之间最短轨之长;u,v 不连通时,规定其距离为∞,证明:$d(u,v)+d(v,w)\geqslant d(u,w)$,其中 $u,v,w\in V(G)$,$d(u,v)$表示 u,v 之距离.

49. G 的直径大于 3,则 G^c 的直径小于 3.

50. 直径为 2 的单图 G,$\triangle=v-2$,则 $\varepsilon\geqslant 2v-4$,其中$\triangle$是 G 的顶之最大次数.

51. G 是连通单图,不是完全图,则 G 中有三个顶u,v,w,使

得 $uv, vw \in E(G)$，而 $uw \notin E(G)$.

52. $e \in E(G)$，e 在闭行迹上，则 e 在一个圈上.

53. $\delta \geqslant 2$ 的图中有圈.

54. G 是单图，$\delta \geqslant 2$，则 G 中有长至少为 $\delta+1$ 的圈.

55. 一个围长为 4 的 k 次正则图至少有 $2k$ 个顶. 有 $2k$ 个顶时，此图在同构意义下是唯一的.

56. 围长为 5 的 k 次正则图至少有 k^2+1 个顶.

57. (1) $\varepsilon \geqslant \upsilon$，则 G 中有圈.

(2) $\varepsilon \geqslant \upsilon+4$，则 G 中有两个无公共边的圈.

58. 一公司在六个城市有分公司 $C_1, C_2, \cdots, C_6$，矩阵中的 i，j 号元素是 C_i 到 C_j 的飞机票价. 试为该公司制作由 C_1 到各公司去的最便宜的交通航线图.

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

59. 船公欲把一只老狼、一只小羊和一头大白菜运过河，一次只能运一种，为了安全，不能让狼与羊或羊与菜在无人看管时在一起，问如何运送最省时间？

60. 两人有酒装满 8 斤之瓶，只有能盛 5 斤和 3 斤的空瓶各一，欲平分其酒，为之设计一个最简便的分法.

61. 正四面体到自身的连续映射有不动点.

62. 有 n 个药箱，每两个药箱中有一种相同的药，每种药恰在两个药箱中出现，问共有多少种药？

63. $\upsilon = n$，$\varepsilon = n+1$，则 $\exists\, v \in V(G)$，使得 $d(v) \geqslant 3$.

64. 俱乐部有 14 人想打桥牌，过去每个人都曾与其中 5 个人合作过；现规定必须任何两人都未合作过才准许在一起打一局，月

是只打了三局就无法继续进行了,这时新来了一位年轻人,证明:有了这位年轻人参加,还可以再打一局.

64. 从 K_n 上删除至少几条边,才能得到不连通图,且有一个连通片含 n' 个顶($1\leqslant n'\leqslant n$)?

65. n 个人参加一次会议,其中有相识者,每两个相识者皆无共同的熟人,而每两个不相识者恰有两个共同的熟人,则每人都有同样数目的熟人.

66. 从敌占区铁路图上发现,欲使两城 v_1,v_2 间的铁路交通完全中断,至少要炸毁 k 段铁路.有一城 v_3 与 v_1,v_2 之间分别有一段铁路 e_1,e_2 直接相通,证明把 e_1,e_2 炸毁后,至少还要炸毁 $k-1$ 段铁路,才会使 v_1,v_2 间的交通中断.

67. 证明:长为奇数的回路必含圈.长为偶数的回路一定含圈吗?

68. 对于 k 次正则图,$kv\equiv 0(\mathrm{mod}2)$.

69. G 是连通图,$v\geqslant 2,\varepsilon<v$,则 G 中至少有两个一次顶.

70. 直径为 d,围长为 $2d+1$ 的图是正则图.

1.5 树

树在我们这里是一个数学概念.在不同的领域树有广泛的应用,对于图论自身,树则扮演了支撑的作用.许多图论猜想,大都首先用树来探讨其真伪.

定义 1 无圈连通图称为树(Tree),记成 T;T 中 $d(v)=1$ 时,v 称为叶;每个连通片皆树的不连通图称为林.树 T 是图 G 的生成子图时,T 称为 G 的生成树.□

图 1.11 是林,有 6 个连通片,每个连通片皆一棵树.

下面给出树的六个等价命题.

定理 1 下面 6 个命题等价:

(1) G 是树.

(2) G 中任二顶间恰有一条轨.

(3)G 中无圈,且 $\varepsilon = \upsilon - 1$.

(4)G 连通,且 $\varepsilon = \upsilon - 1$.

(5)G 连通,$\forall e \in E(G)$,$G - e$ 不连通.

(6)G 无圈,$\forall e \notin E(G)$,$G + e$ 恰含一个圈.

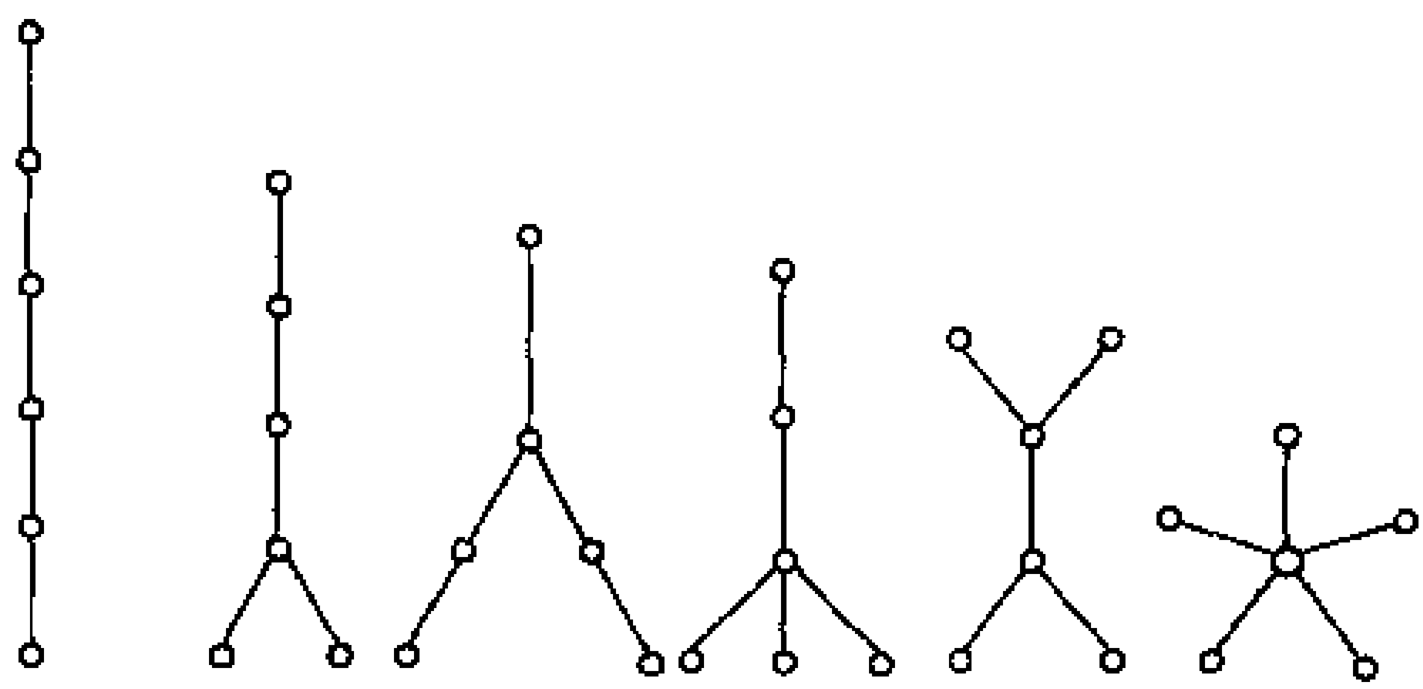


图 1.11

证 (1)⇒(2) 因 G 为树,故 $\forall u, v \in V(G)$,$\exists$ 轨 $P_1(u, v)$;若还有另一轨 $P_2(u, v)$,沿 P_1 由 u 走向 v 时,P_1 上必有两顶 w_1 与 w_2,w_1,w_2 是 P_1,P_2 的公共顶,但在 P_1 上 w_1 与 w_2 之间已无 P_2 上的顶,于是 P_1 与 P_2 上在 w_1 与 w_2 两顶之间的部分构成一个圈,与树无圈矛盾,所以(2)成立.

(2)⇒(3) 若 G 中有圈,则此圈上任二顶之间有两条不同的轨,与(2)矛盾,所以 G 中无圈.

下用数学归纳法证明 $\varepsilon = \upsilon - 1$,$\upsilon = 1$ 时,$\varepsilon = 0$;$\upsilon = 2$ 时,$\varepsilon = 1$,这时 $\varepsilon = \upsilon - 1$ 成立.

假设 $\upsilon \leqslant k$ 时(3)已成立,考虑 $\upsilon = k + 1$,若 u 与 v 是 G 中邻顶,取 $G_0 = G - uv$,因 G 中 u 与 v 之间仅一条轨 P,即 $P = uv$,故 G_0 不连通,显然,G_0 仅两个连通片 G_1,G_2;G_1 和 G_2 上,两顶间也只一条轨,由归纳法假设,$\varepsilon(G_1) = \upsilon(G_1) - 1$,$\varepsilon(G_2) = \upsilon(G_2) - 1$,$\varepsilon(G) = \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + 1 = \upsilon(G_1) + \upsilon(G_2) - 2 + 1 = \upsilon - 1$,即(3)成立.

(3)⇒(4)　若 G 不连通，$G_1, G_2, \cdots, G_\omega(\omega>1)$是它的连通片，则 $G_i(i=1,2,\cdots,\omega)$是无圈连通图，G_i 是树，由(1)⇒(2)⇒(3)知，G_i 中有 $\varepsilon(G_i)=\upsilon(G_i)-1$，于是 $\varepsilon=\upsilon-\omega, \omega>1, \upsilon-\omega\neq\upsilon-1$，与(3)中 $\varepsilon=\upsilon-1$ 矛盾，所以 G 是连通图.

(4)⇒(5)　因 $\varepsilon(G-e)=\varepsilon(G)-1=\upsilon-2$，只要我们证出连通图的必要条件是 $\varepsilon\geqslant\upsilon-1$，则可得 $G-e$ 不连通.

事实上，$\upsilon=2$ 时，$\varepsilon=1$，满足 $\varepsilon=\upsilon-1$；假设 $\upsilon\leqslant k$ 时，连通图 G 满足 $\varepsilon(G)\geqslant\upsilon(G)-1$，考虑 $\upsilon=k+1$ 的连通图 G'，令 $G=G'-v$，其中 $v\in V(G')$.

(i)若 $G=G'-v$ 仍连通，则由归纳法假设，$\varepsilon(G)=\varepsilon(G'-v)\geqslant k-1$，而 $\varepsilon(G')\geqslant\varepsilon(G'-v)+1\geqslant k=\upsilon(G')-1$，故 $\varepsilon(G')\geqslant\upsilon(G')-1$.

(ii)若 $G=G'-v$ 不连通，$G_1, G_2, \cdots, G_\omega$ 是其连通片，$\omega>1$. 由归纳法假设，$\varepsilon(G_i)\geqslant\upsilon(G_i)-1, i=1,2,\cdots,\omega$，于是

$$\varepsilon(G'-v)\geqslant\sum_{i=1}^{\omega}\upsilon(G_i)-\omega=k-\omega,$$

而 $\varepsilon(G')\geqslant\varepsilon(G'-v)+\omega$，故 $\varepsilon(G')\geqslant k=\upsilon(G')-1$.

(5)⇒(6)　若 G 中有圈 C，从 C 上删去一边所得之子圈仍连通，与(5)相违，故 G 无圈.

下证 $G+e$ 恰有一圈.(5)中说 G 连通，上面又证出 G 无圈，所以 G 是树，由于(1)⇒(2)，即 G 中任二顶 u 与 v 间恰一条轨 $P(u,v)$，于是 $G+e$ 上，$P(u,v)\cup uv$ 是一个圈. 若 $G+e$ 上有两圈 C_1, C_2，则 C_1, C_2 上都含 e，于是 $(G+e)-e=G$ 中仍含圈 C_{12}，C_{12}是 $C_1\cup C_2$ 删去 e 形成的，与 G 中无圈矛盾.

(6)⇒(1)　$\forall u,v\in V(G)$，若 $uv\in E(G)$，则 u 与 v 连通；若 $uv\notin E(G)$，由(6)知 $G+uv$ 只含一个圈，于是 G 中 u 与 v 之间有轨，u 与 v 连通. 由 u 与 v 的任意性，知 G 是连通图，又由(6)知 G 无圈，G 是树，(1)成立，证毕.

推论 1　T 是树，$\upsilon(T)\geqslant2$，则 T 至少两个叶.

证 由定理 1，$\varepsilon(T)=\upsilon(T)-1$，又

$$2\varepsilon(T)=\sum_{i=1}^{\upsilon}d(v_i)=2(\upsilon(T)-1), \tag{1}$$

又 T 连通，$d(v_i)\geqslant 1$，$(i=1,2,\cdots,\upsilon)$，若全为次数不小于 2 的顶，则 $\sum_{i=1}^{\upsilon}d(V_i)\geqslant 2\upsilon$，与(1)相违，故至少有一个一次顶 u，由(1)式，除 u 外，其余顶次数之和为 $2\upsilon-3$，若其余这些顶次数皆不小于 2，则它们次数之和不小于 $2(\upsilon-1)=2\upsilon-2$，矛盾，故除 u 外还有一次顶，证毕．

推论 2 G 是连通图当且仅当 G 有生成树．

证 显然，有生成树的图必为连通图，下证连通图有生成树．设 T 是连通图 G 的边数最少的连通生成子图，则 $\forall e\in E(T)$，$T-e$ 不再连通，由定理 1 知 T 是树，即 T 是 G 的生成树．证毕．

例 1 顶数大于 4 的图或其补图中含圈．

证 若图 G 与 G^c 中皆无圈，又设 $G_1,G_2,\cdots,G_\omega$ 是 G 的连通片，$G'_1,G'_2,\cdots,G'_{\omega'}$ 是 G^c 的连通片，$\omega\geqslant 1$，$\omega'\geqslant 1$，则 $\varepsilon(G)=\upsilon(G)-\omega$，$\varepsilon(G^c)=\upsilon(G^c)-\omega'=\upsilon(G)-\omega'$，于是

$$\varepsilon(G)+\varepsilon(G^c)=\frac{1}{2}\upsilon(\upsilon-1)=2\upsilon(G)-\omega-\omega',$$

$$\upsilon^2-5\upsilon+2(\omega+\omega')=0,$$

$$\upsilon^2-5\upsilon+4\leqslant 0.$$

解得 $1\leqslant\upsilon\leqslant 4$，与 $\upsilon>4$ 矛盾，证毕．

例 2 连通图 G 的无圈子图是 G 的某生成树的子图．

证 若 G 是树，命题自然成立．若 G 非树，则 G 中有圈 C_1，设 G' 是 G 的无圈子图，则 C_1 上至少有一边 e_1 不在 G' 上，把 e_1 从 G 上删除，得 $G-e_1$ 仍连通．若 $G-e_1$ 上仍有圈 C_2，则 C_2 上有一边 e_2 不在 G' 上．于是 $G-e_1-e_2$ 仍连通．

由于 G 是有限图，这一过程会在 k 步之后终止，终止时得的是无圈连通图 $G_0=G-e_1-e_2-\cdots-e_k$，G_0 是 G 的生成树，e_1，

$e_2,\cdots,e_k$ 不在G'上，故 G'是G_0 的子图，证毕.

例 3 连通图 G 中至少$\varepsilon(G)-\upsilon(G)+1$ 个圈.

证 设 T 是G 的一棵生成树，则 $\varepsilon(T)=\upsilon(G)-1$，$E(G)$中不在 T 上的边数为$\varepsilon(G)-\upsilon(G)+1$，由定理1(6)知，$T$ 上添加G 中不在 T 上的每条边会得到一个圈，这些圈两两相异，故 G 中至少$\varepsilon(G)-\upsilon(G)+1$ 个圈，证毕.

1.6 生成树

1.6.1 生成树的个数

一个连通图的生成树的个数可以很多，例如 K_{10}的生成树共有一亿个(这里把标志不同但同构的树视为相异). 我们用 $\tau(G)$ 表示图 G 的生成树的个数. 用 $G\cdot e$ 表示把G 中的边e 收缩掉形成的图，即把 e 从G 中删除，再令其两个端点重合成一个顶，见图 1.12.

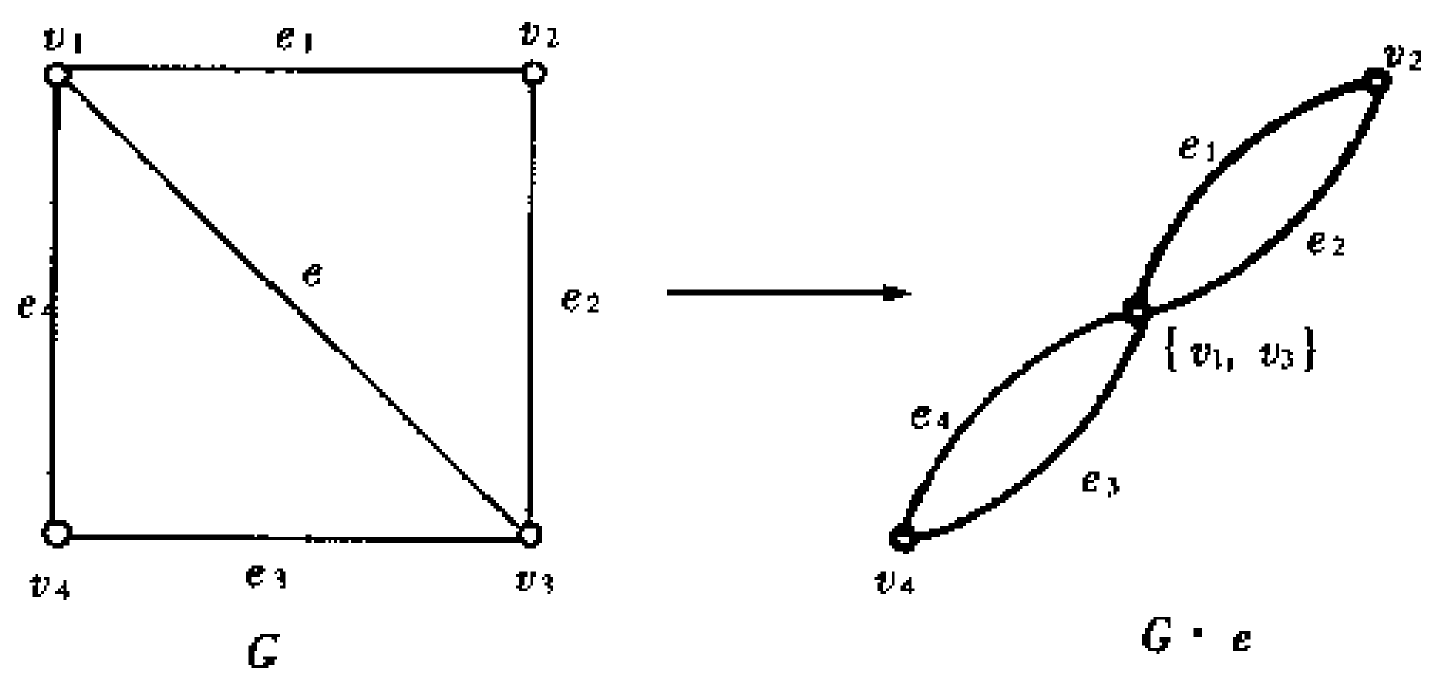


图 1.12

定理 1 e 是标志连通图G 的非环边，则

$$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e). \tag{1}$$

证 G 的含e 的生成树与$G\cdot e$ 的生成树一一对应，即 $\tau(G\cdot e)$是 G 中含e 的生成树的个数. 另一方面，G 的不含e 的生成树的个数是$\tau(G-e)$，所以公式(1)成立，证毕.

例 1 $\tau(G)=?$ G 是四边形 $v_1v_2v_3v_4$ 加上对角线 v_1v_3.

解

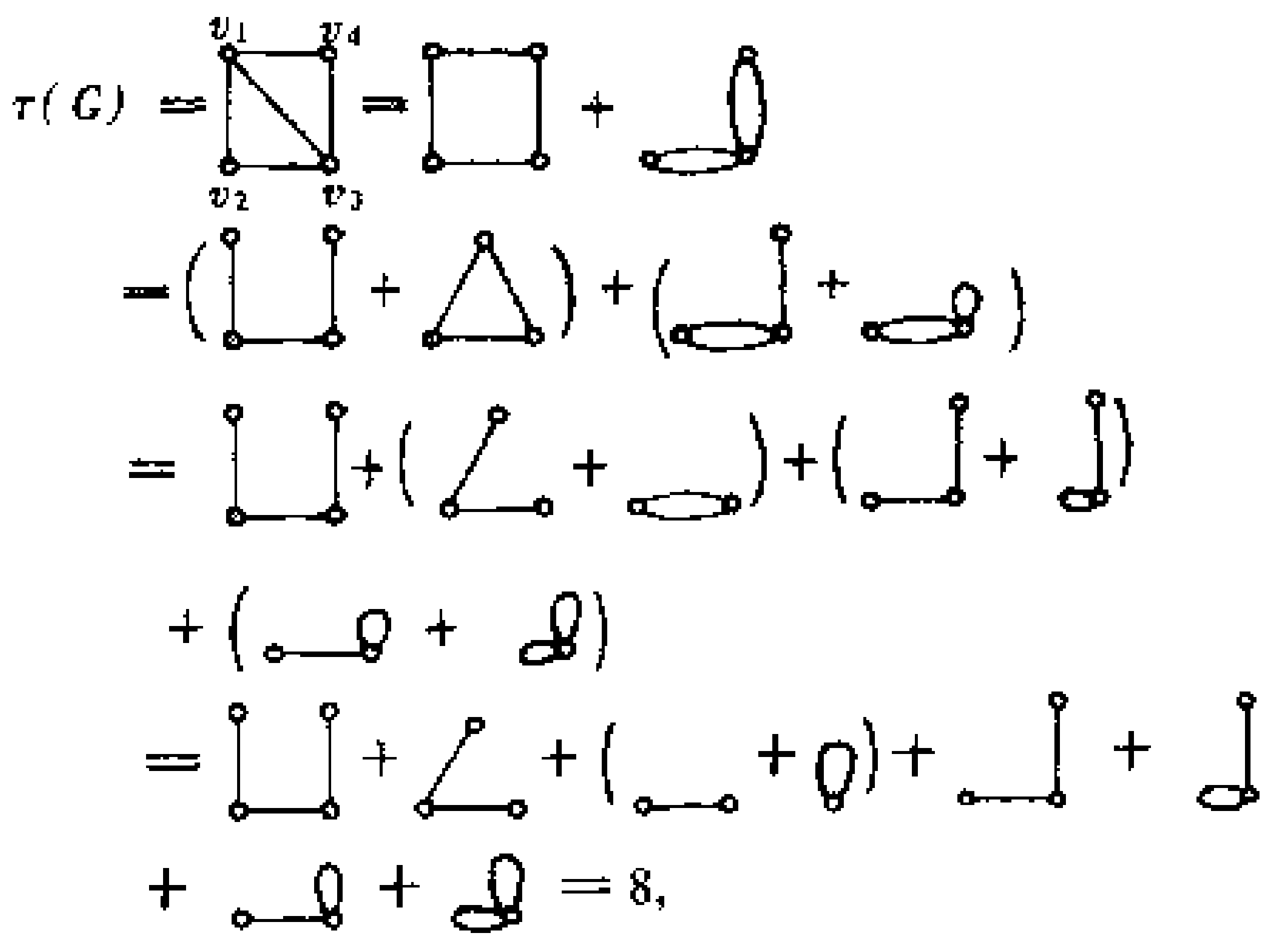


图 1.13

即 G 有 8 个不同的生成树.

定理 2(Caylay,1889) $\tau(K_n)=n^{n-2}$.

证 令 K_n 的顶集为 $N=\{1,2,\cdots,n\}$,则由 N 中元素构成的长 $n-2$ 的序列恰为 n^{n-2}个.下面我们建立上述序列与 K_n 生成树之间的一一对应.

任取定 K_n 的一个生成树 T,设 s_1 是 T 中第一个(数码最小)叶,取 t_1 为 s_1 邻顶的号码,把 s_1 从 T 上删除;设 s_2 是 $T-s_1$ 中第一个叶,取 t_2 为 s_2 在 $T-s_1$ 中邻顶之号码,依此类推,即得到一个由 N 中元素构成的长 $n-2$ 的序列 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-2}$,最后 T 上剩下的是一个 K_2.

反之,任给定由 N 中元素构成的长 $n-2$ 的序列 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-2}$,我们如下地得出与之对应的一个 K_n 的生成树:s_1 是 N 中不在$\{t_1,t_2,\cdots,t_{n-2}\}$中的第一个号码,把 s_1 与 t_1 之间连一边;s_2 是不在$\{t_2,t_3,\cdots,t_{n-2}\}$中的 $N-\{s_1\}$的第一个号码,把 s_2 与 t_2 之间连一边、继续此过程,得到 $n-2$ 条边:$s_1t_1,s_2t_2,\cdots,s_{n-2}t_{n-2}$,再连接 $N-\{s_1,s_2,\cdots,s_{n-2}\}$中的两个顶,则得一生成树,证毕.

K_{10}竟有 $10^{10-2}=10^8$ 个不同的生成树,如果把它们全画在本子上,每页画 10 棵,这个画满小小 K_{10}的生成树的本子有一千万页!

1.6.2 最优生成树的 Kruskal 算法

今欲修筑连接几个城市的铁路,已知 i 城与 j 城间的路段造价为 c_{ij},设计一个线路图,使总造价最低.

上述实际模型的数学模型是,在已知的加权连通图上求总权最小的生成子图,它显然是一个生成树,这种权最小的生成树称为最优树.下面介绍 1956 年 Kruskal 设计的求最优树的好算法.

KRUSKAL 算法:

(1)选 $e_1 \in E(G)$,使得 $w(e_1)=\min$.

(2)若 $e_1,e_2,\cdots,e_i$ 已选好,则从 $E(G)-\{e_1,\cdots,e_i\}$中选 e_{i+1},使得

(i)$G[\{e_1,e_2,\cdots,e_i,e_{i+1}\}]$中无圈,且

(ii)$w(e_{i+1})=\min$.

(3)继续进行上述过程至选得 $e_{\nu-1}$止.□

上述 Kruskal 算法选得的边 $e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}$的导出子图记成 $T^*=G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}\}]$,它是由$\{e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}\}$为边集,以这些边之端点为顶集的一个图.

定理 1 $T^*=G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}\}]$是 G 的最优树.

证 由树的等价命题(见 1.5 定理 1(3)),Kruskal 算法得到的 $T^*=G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}\}]$确为生成树.下证其最优性.设 T^* 不是最优树,T_1 是 G 的任给定的一个生成树;令 $f(T_1)$是$\{e_1,e_2\cdots,e_{\nu-1}\}$中不在 T_1 上的 e_i 的足标 i 的最小值,令 T 是使 $f(T)$最大的一个最优树,因 T^* 不是最优树,而 $E(T^*)=\{e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}\}$,故 $e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}$中必有不在 $E(T)$中的边.设 $f(T)=k$,即 $e_1,e_2,\cdots,e_{k-1}$在 T 与 T^* 上,而 e_k 不在 T 上,于是 $T+e_k$ 上有一个圈 C.令 e'_k 是在 T 上而不在 T^* 上的边,且 e'_k 在 C 上.显然,$T'=(T+e_k)-e'_k$ 也是生成树,而 $W(T')=W(T)+w(e_k)-w(e'_k)$,由算法知,$e_k$ 本是使 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}]$上无圈的权最小的边,又 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{k-1},e'_k\}]$是 T 之子图,也无圈,则 w

$(e'_k) \geqslant w(e_k)$，于是，$W(T') \leqslant W(T)$，即 T' 也是最优树，但 $f(T') > k = f(T)$，与 $f(T)$ 的最大性相违，证毕.

Kruskal 算法的时间复杂度为 $O(\nu^2)$.

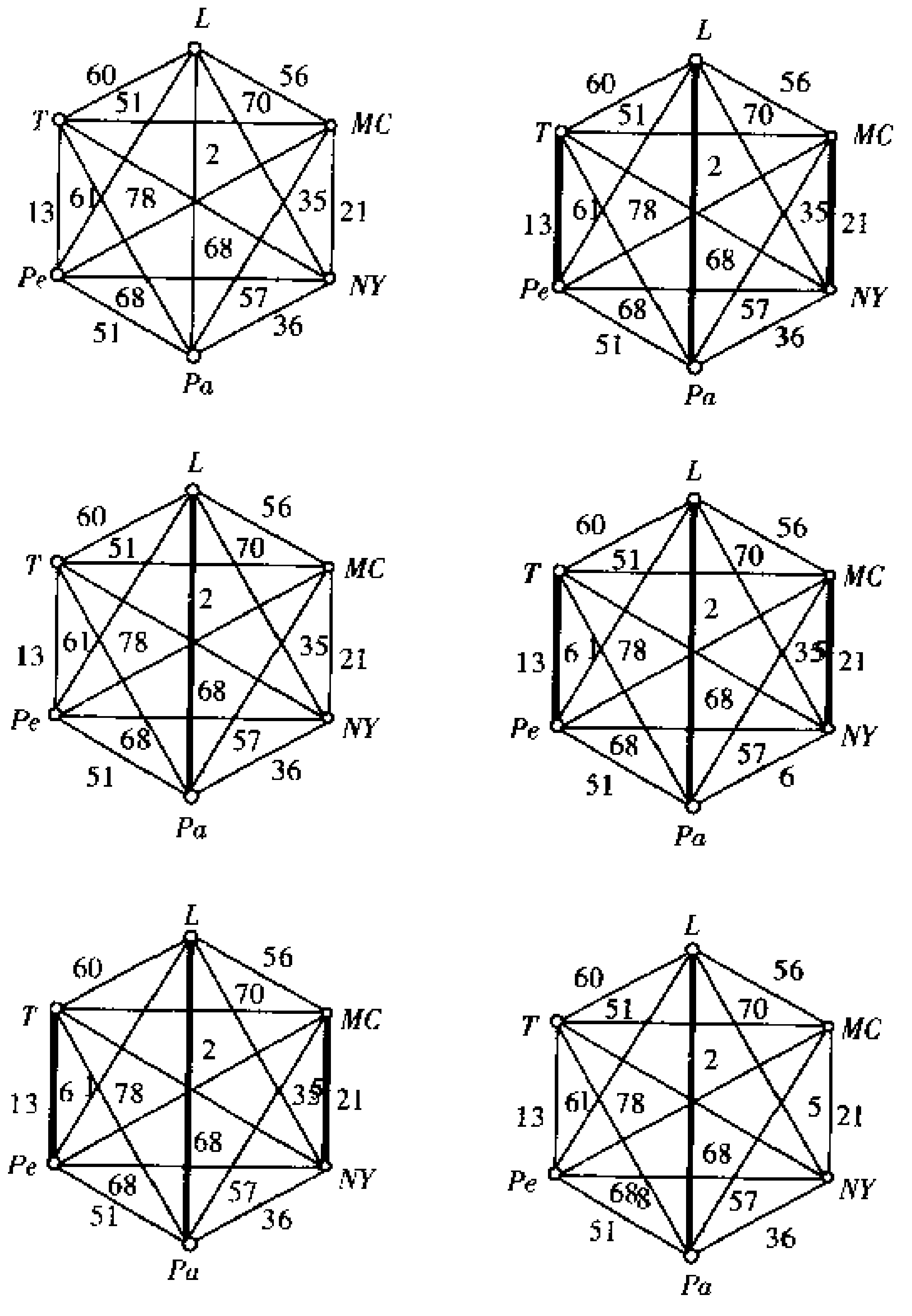


图 1.14

例 2　图 1.1.4 边旁的数字是北京(Pe)、巴黎(Pa)、纽约(NY)、墨西哥(MC)、伦敦(L)、东京(T)间的航程(单位是百公里),求此航线图的一棵最优树.

解　图 1.14 中的粗线是依次执行 Kruskal 算法时所选边.最后得最优树之总权为 $2+13+21+35+51=122$(百公里).

1.7　常用树

为介绍几种常用树,需要先提出有向图中的若干名词.

设 G 是有向图,$e=uv$ 是有向边,箭头由 u 画向 v,u 称为 e 之尾,v 称为 e 之头.$W=v_0e_1v_1e_2\cdots e_kv_k$,$e_i\in E(G)$,$v_j\in V(G)$,$i=1,2,\cdots,k$,$j=0,1,2,\cdots,k$,允许同一边或同一顶在 W 中不止一次地出现,且有向边 e_i 之尾是 v_{i-1},e_i 之头是 v_i,则 W 称为有向道路,W 中顶两两相异时,称 W 为有向轨.$d^-(v)$表示以 v 为头的边数,$d^+(v)$表示以 v 为尾的边数.

1.7.1　有序二元树

定义 1　T 为树,把 T 的每边规定一个方向,使得 $\forall v_i\in V(T)$,皆存在以 v_0 为起点的有向轨 $P(v_0,v_i)$,则称 T 是以 v_0 为根的外向树.把外向树每边定向反过来,则得内向树.

若 T 为外向树,且 $\forall v\in V(T)$,$d^+(v)\leqslant\sigma$,$\sigma\in\mathbf{N}$,则称 T 为 σ 元树.$e\in E(T)$,$e=uv$ 时,称 u 为 v 之父,v 为 u 之子;同父之子称兄弟.除此之外,每顶皆 σ 个子时,称 T 为典型 σ 元树.外向树每顶的儿子们有序时,叫做有序树.有序树之序列称为有序林.□

画外向树时,箭头可以省略,边不交叉.

有序 2 元树的顶进行如下编码:

(1)根无码.

(2)兄弟顶,左顶标 0,右顶标 1(左为兄).

(3)从根到叶的有向轨上各顶之标码依次抄出,为该叶的前缀.

(4)全树各叶从左到右把叶的前缀依次抄出,形成的叶的前缀

序列称树的前缀码.

前缀码与有序 2 元树一一对应，于是可以用一个前缀码代表一棵有序 2 元树.

例如，图 1.15 中有序 2 元树为

000,001,010,011,100,101,11.

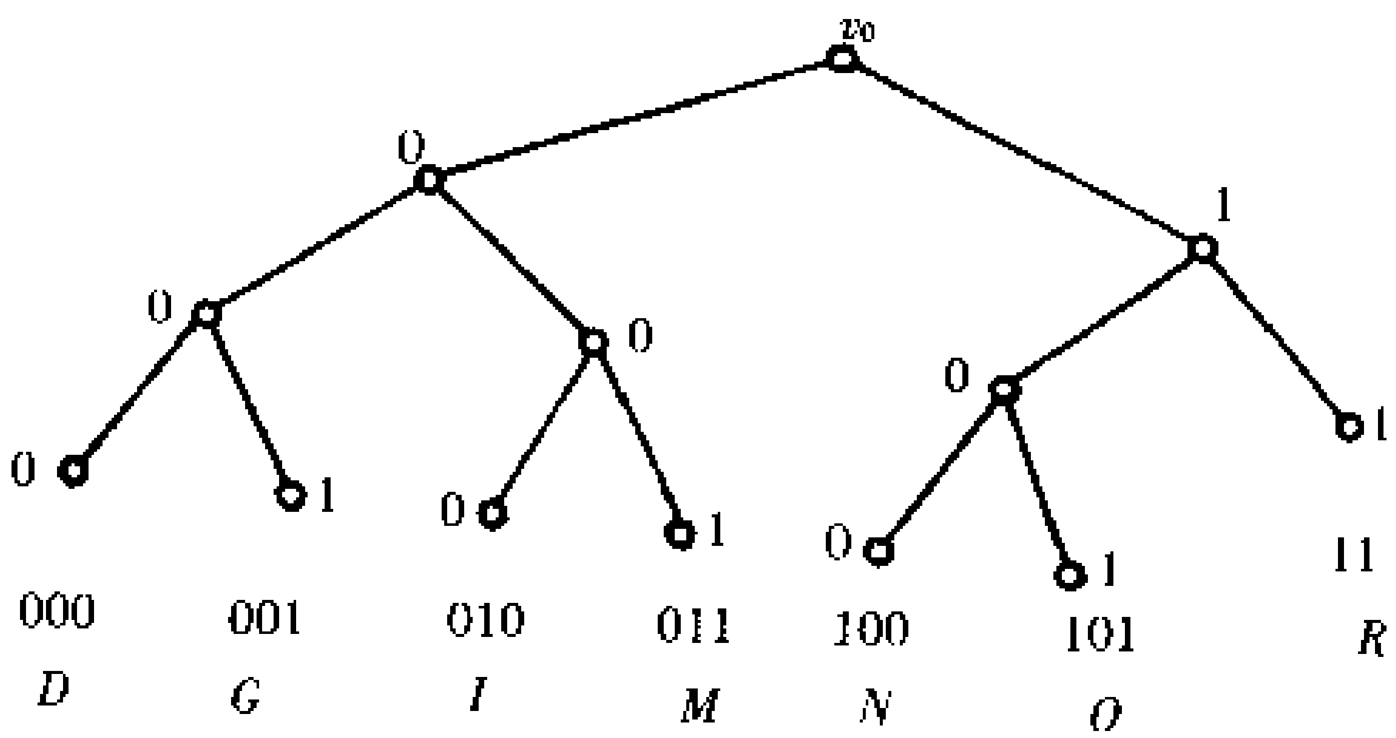


图 1.15

如果用拉丁字母标志叶，则可以用前缀密码收发密码信息，例如我方收发员之间各存如图 1.15 这样一个“密码树”，收报员收到如下无标点 0－1 信息码：

0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1

1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1

则可用图 1.15 译出：Good morning.

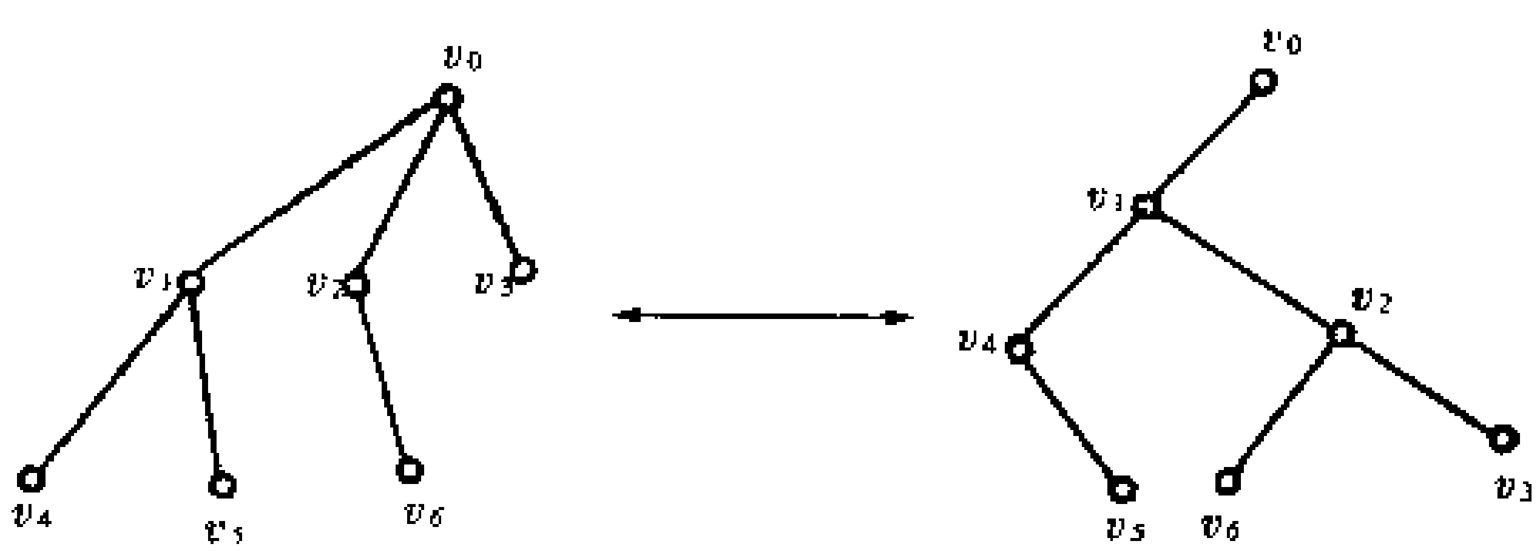


图 1.16

按"左下方放长子,右下方放弟弟"的规则,可以把有序树改画成有序 2 元树,而且这种转化是可逆的. 图 1.16 是转化实例,左侧是有序树,右侧是转化成的有序 2 元树.

如果把有序林中的根视为兄弟,则可以把有序林可逆地转化为有序 2 元树,见图 1.17,左侧是两棵有序树的有序林,右侧是转化成的有序 2 元树.

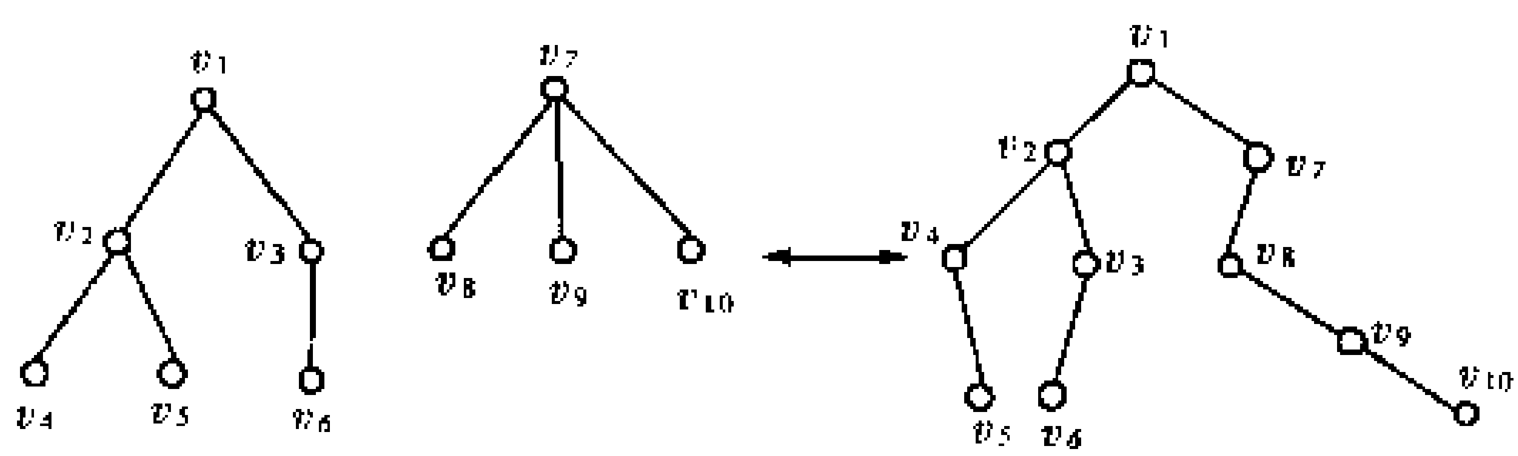


图 1.17

1.7.2 Huffman 树

如果设计一个 26 个叶的有序 2 元树,每叶表示一个拉丁字母,则可用有序二元树的 0－1 前缀表示任何一句话,进而可以表示任何一篇文章. 自然是总码长越短越好. 字母出现的频率小的(例如 Z),相应的前缀(叶码)长一点还不怕;字母出现的频率大的(例如 e),相应的叶码不能太长,以期整个文章的总码长最短.

定义 2 v_0 为根,$v_1, v_2, \cdots, v_n$ 为叶的有序 2 元树当中,轨 $P(v_0, v_i)$($i = 1, 2, \cdots, n$)的长 l_i 称为叶 v_i 的码长. 若 v_i 代表的事物出现的概率为 p_i, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$,使得

$$m(T) = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i = \min$$

的有序 2 元树 T 称为带权 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的赫夫曼(Huffman)树,也称最优二元树. □

对于给定的权序列 $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n$，如何画出相应的 Huffman 树呢？其中 p_i 是叶 v_i 代表的事件出现的概率.

推论 1　兄弟在 Huffman 树中码长相等.

推论 2　设叶 v_i 之码长为 l_i，则在 Huffman 树上 $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_n$.

证　由"排序不等式"，若

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n,$$

则

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \geqslant a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \cdots + a_n b_{j_n} \geqslant a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$，其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列，仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时，等号成立.

今在 Huffman 树上，$\sum_{i=1}^{n} p_n l_n = \min$，所以 $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_n$，证毕.

推论 3　在 Huffman 树上，p_1 与 p_2 相应的叶 v_1, v_2 是兄弟.

证　若 v_1 无兄弟，则 l_1 还可缩短 1，此与 $m(T) = \min$ 矛盾；又在二元树上，兄弟的码长相等，故 v_1 与 v_2(可以)是兄弟，证毕.

推论 4　T^+ 是带权 $p_1 + p_2, p_3, p_4, \cdots, p_n$ 的 Huffman 树，与 $p_1 + p_2$ 相应的叶生出两个新叶分别有权 p_1 与 p_2，则得的新树 T 是带权 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的 Huffman 树，其中 $p_1 \leqslant p_1 \leqslant \cdots \leqslant p_n$.

证　设 T' 是带权 $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n$ 的 Huffman 树，只欠证 $m(T) \leqslant m(T')$. 由推论 3，v_1 与 v_2 是 Huffman 树 T' 上的兄弟. 令 T'_+ 是 T' 中把 p_1 与 p_2 为权的叶删除，令其父的权为 $p_1 + p_2$ 的树，则

$$m(T') = m(T'_+) + p_1 + p_2,$$

$$m(T) = m(T^+) + p_1 + p_2.$$

又 T^+ 是带权 $p_1 + p_2, p_3, \cdots, p_n$ 的 Huffman 树，故 $m(T'_+) \geqslant m(T^+)$，于是 $m(T') \geqslant m(T)$，证毕.

由推论 4 可以求得给定权序列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的 Huffman 树.

例 1 求带权 0.1,0.1,0.1,0.2,0.5 的 Huffman 树.

解

图 1.18 中的(d)即所求的 Huffman 树.

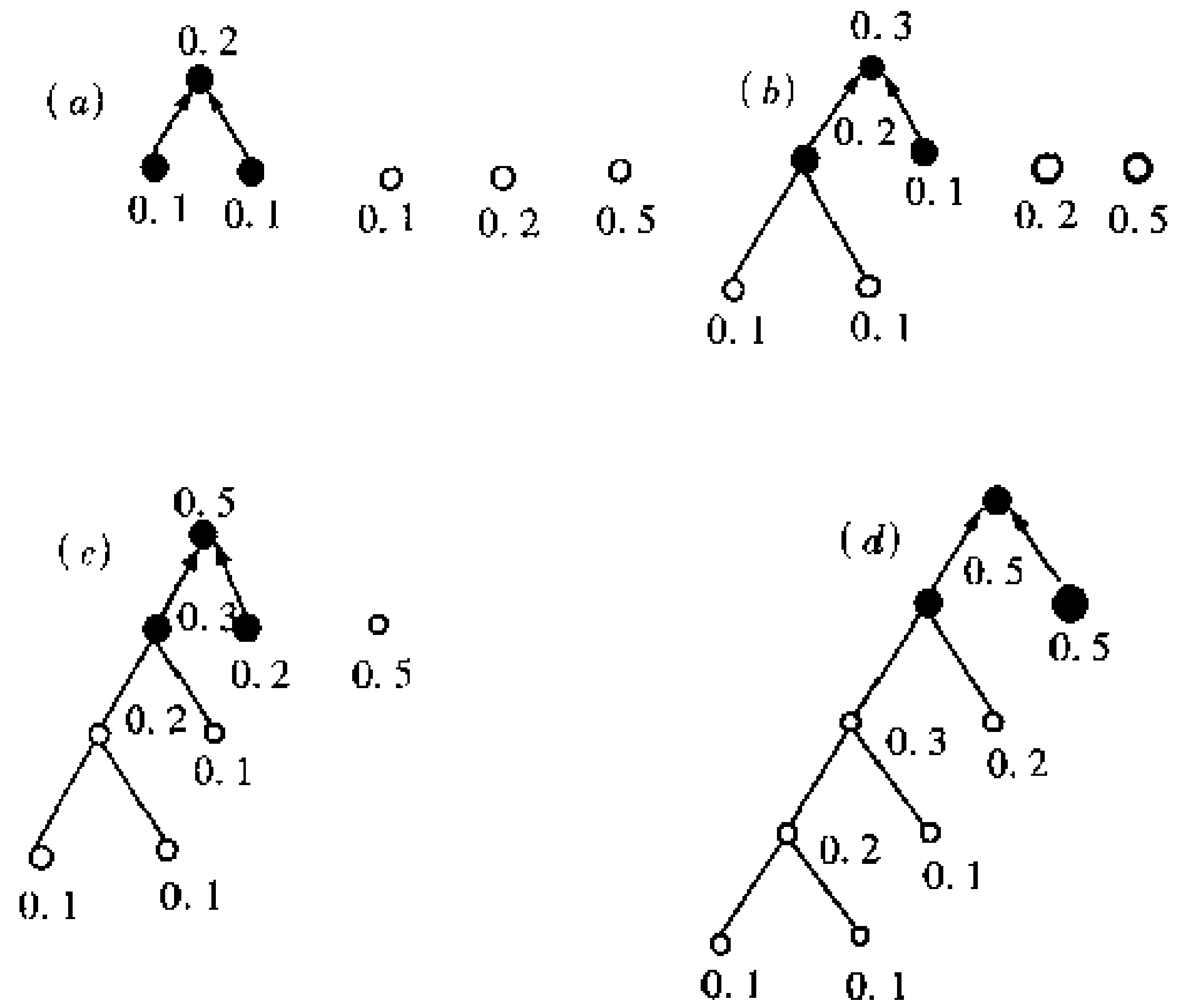


图 1.18

在上述"兄弟寻父"的过程中,把两个权最小者视为兄弟可以有不

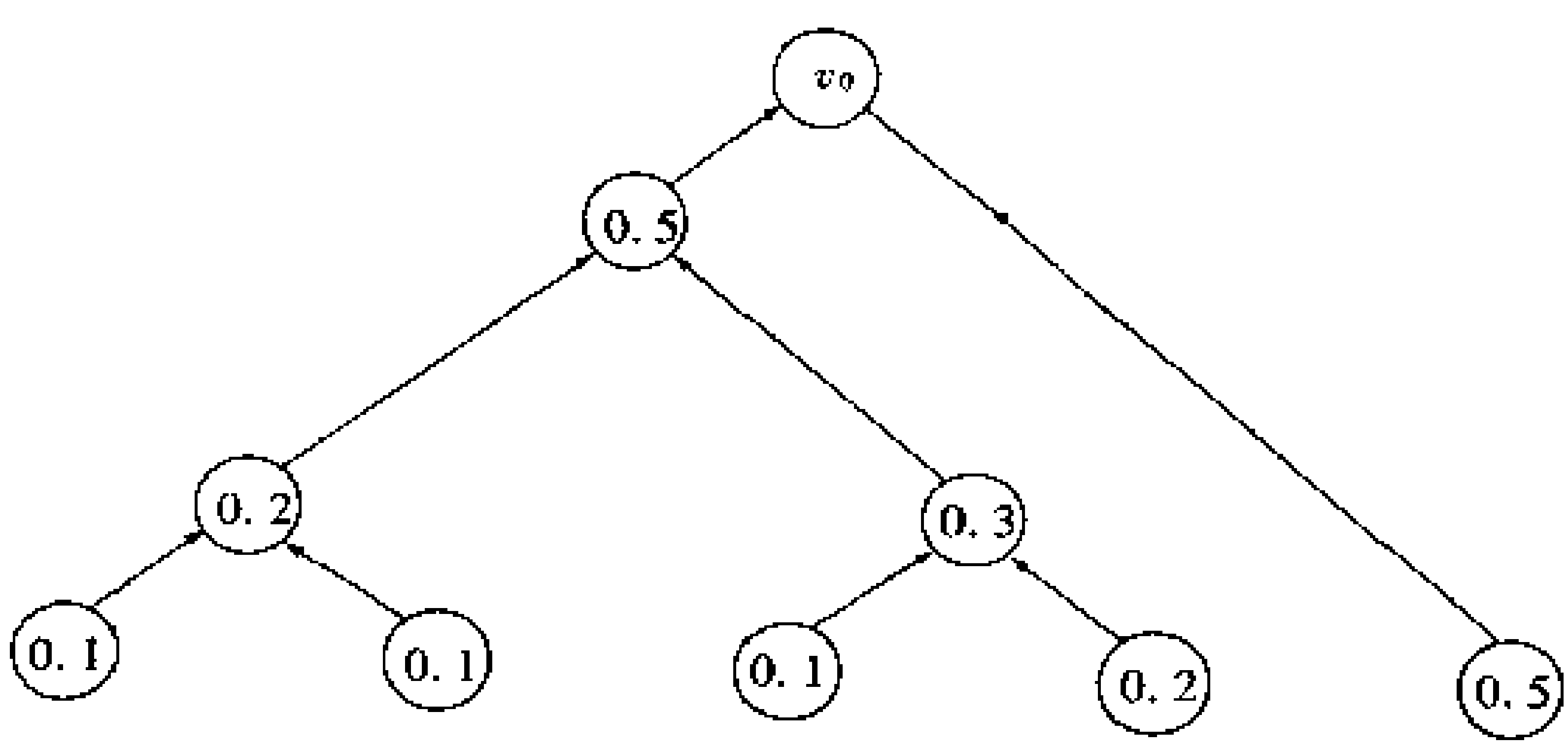


图 1.19

同的选择,所以可能产生不同构的 Huffman 树 T,它们的 $m(T)$及权序列 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是一致的.例如例1还可以有另一解,如图1.19所示.图中箭头表示"寻父"方向. m(1.18图)$=m$(1.19图)$=2.0$.

习题二

1. $v(T)>1$ 的树中,最长轨的起点终点是叶.

2. 恰有两个叶的树是一条轨.

3. $\Delta\geqslant k$ 的树至少 k 个叶,其中Δ表示图的次数之最大值.

4. 有 ω 个连通片的图,当且仅当 $\varepsilon=v-\omega$ 时是林.

5. G 的中心是指 $\max\limits_{v\in V(G)} d(u,v)=\min$ 的顶 u,证明树有一个中心或两个相邻的中心.

6. G 是 $2k$ 个奇次顶的林,则 G 中存在 k 条无公共边的轨 $P_1,P_2,\cdots,P_k$,使得 $E(G)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}E(P_i)$.

7. $d_1,d_2,\cdots,d_v$ 是树的次数序的充要条件是 $\sum\limits_{i=1}^{v}=2(v-1)$.

8. T 是 $k+1$ 个顶的树,G 是单图,G 的最小次数 $\delta(G)\geqslant k$,则 G 中含有与 T 同构的子图.

9. 烷烃分子式为 C_mH_n,碳四价,氢一价,价键不成回路,则对每个自然数 m,仅当 $n=2m+2$ 时,C_mH_n 才可能存在.

10. 求 $\tau(K_{3,3})$.

11. 轮是圈加一个新顶(轮心),再把每顶与新顶间连一新边(辐条)所得的图,试求 n 条辐条的轮的生成树的数目.

12. $e\in E(K_v)$,则 $\tau(K_v-e)=(v-2)v^{v-3}$.

13. 画出带权 0.1,0.2,0.3,0.4 的 Haffman 树.

14. Kruskal 算法能否用来:

(1)在加权连通图上求最大权的生成树?

(2)在不连通图中求最小权生成林？如果能，怎么求？写出算法来，且指出其时间复杂度.

15. 求图 1.20 中的最优树.

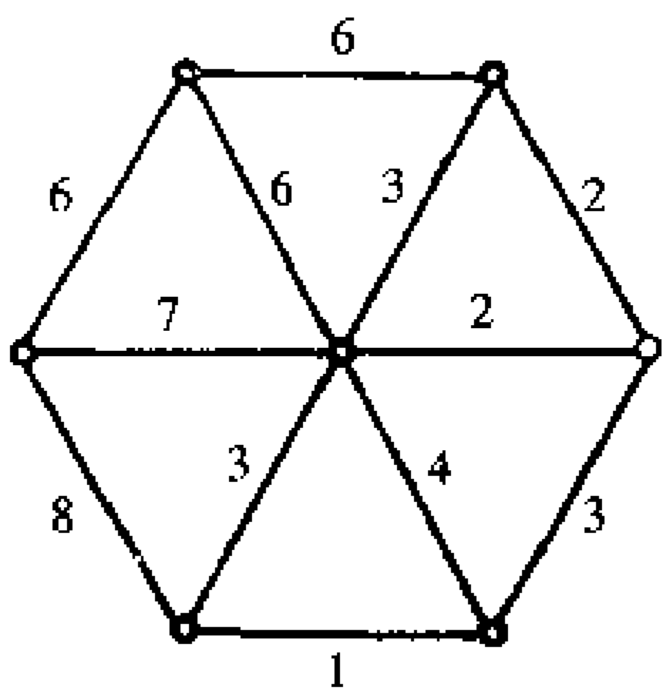


图 1.20

16. $\nu > 2$ 的连通图中至少有两个顶，把它们删除后所得的图仍连通.

17. 连通图有 n 个顶，则至少有 $n-1$ 条边.

18. $\tau(K_5)=?$ 其中不同构的生成树几个？

19. 图 G 的边数不少于顶数，则 G 中有圈.

20. 乒乓球单打比赛采用淘汰制，有 n 名选手参赛，要决出冠军，共需几场比赛？

21. 11 条水平线，11 条铅直线，以它们的交点为顶点构成一个图，这些直线上的线段是边，问至少去掉多少条边，才使每顶次数小于 4？至多去掉多少条边，还能使图连通？

22. 对于无向树，可以有几种定向方式，使其成为外向树？

23. H 是把图 G 的每边用长 k 的轨代替后所得的图，则

$$\tau(H)=k^{\varepsilon-\nu+1}\tau(G).$$

24. 有点若干，各点对间的距离各不相等，从每点到离本身最近的点画上直线段，求证不会出现封闭多边形.

25. 证明：每树(顶至少可为 2 者)为二分图，什么树是完全二分图？

26. T 是 $n(\geqslant 3)$ 顶树，直径 $d(T)=2$，当且仅当 $T\cong K_{1,n-1}$.

27. 证明或反驳：

(1)$d(G)=2$，则 G 有生成星.

(2)G 有生成星，则 $d(G)=2$.

28. 连通图 G 中有一个圈 C，C 长为 s，且 C 上边权皆取最小

值,则 G 中至少有 s 个不同的最优树.

1.8 平面图

1.8.1 平面图及其 Euler 公式

定义 1 一个图 G 称为可嵌入曲面 S,是指可以把它画在 S 上,使 G 的任两条边不在内点相交. 可嵌入平面的图称为平面图. □

例如树是平面图,而 K_5 可以嵌入环面(见图 1.21),$K_{3,3}$可以嵌入 Möbius 带(见图 1.22).

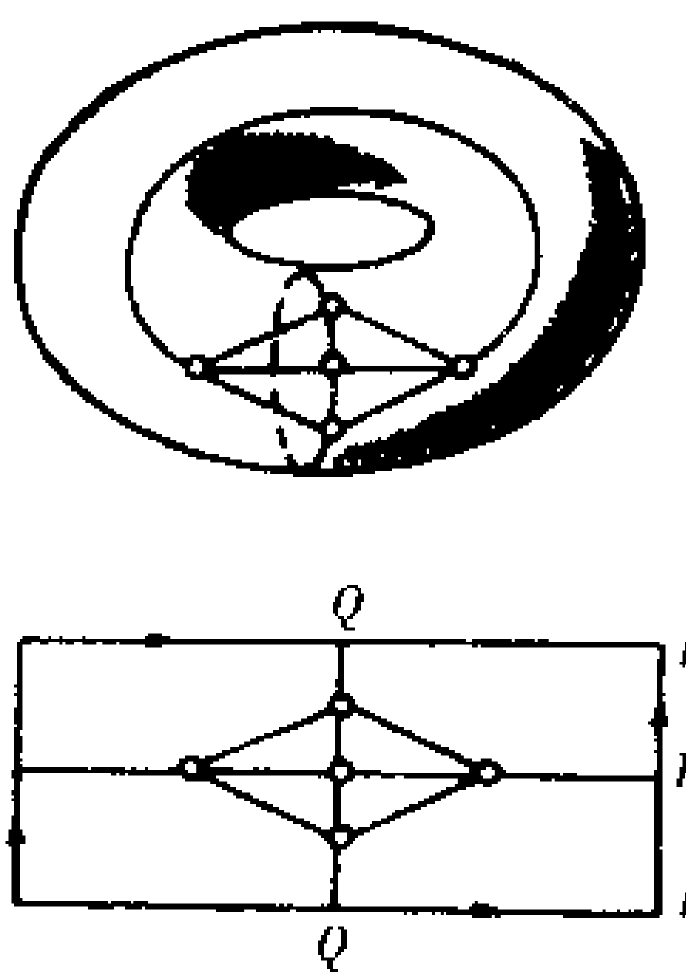


图 1.21

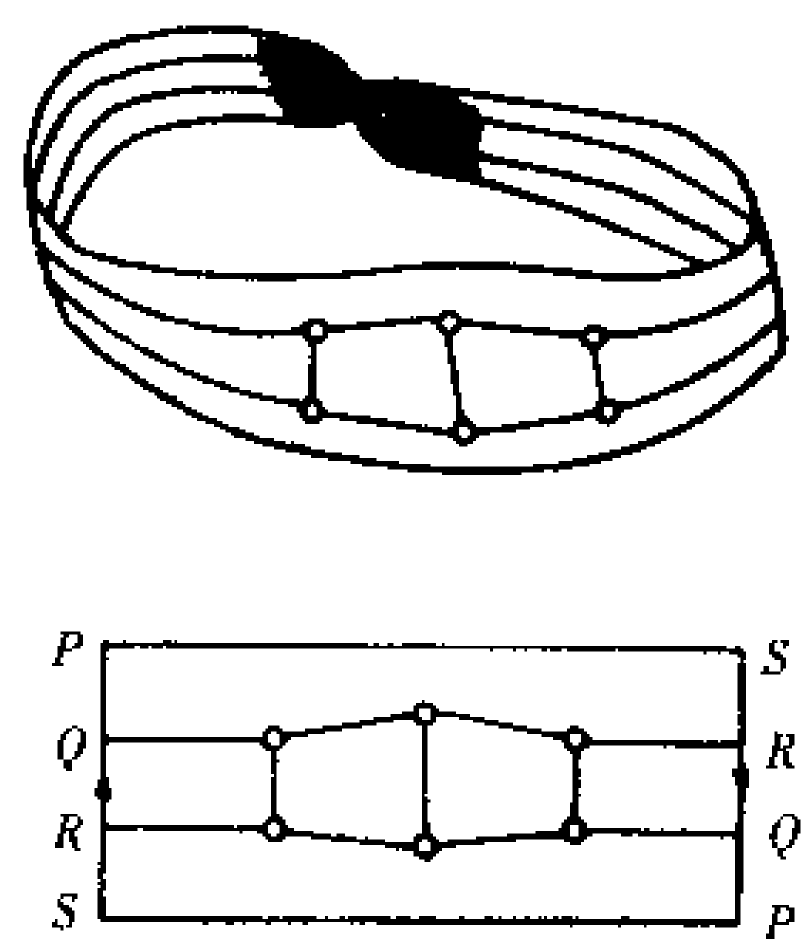


图 1.22

定理 1 任何图皆可嵌入三维欧氏空间 E^3.

证 取 E^3 中曲线;$l: x=t, y=t^2, z=t^3, t\geqslant 0$,在 l 上任取四点(t_i, t_i^2, t_i^3), $i=1,2,3,4$, $t_i\geqslant 0$,由范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 & t_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 4} (t_i - t_j) \neq 0,$$

所以此四点不共面，我们把 G 的顶画在曲线 l 上，把边画成直线段，则不会有任何两边在内点相交，不然相交的两边之四个端点共面，与 l 上任四点不共面相违，证毕.

定理 2 G 是平面图的充要条件是 G 可以嵌入球面.

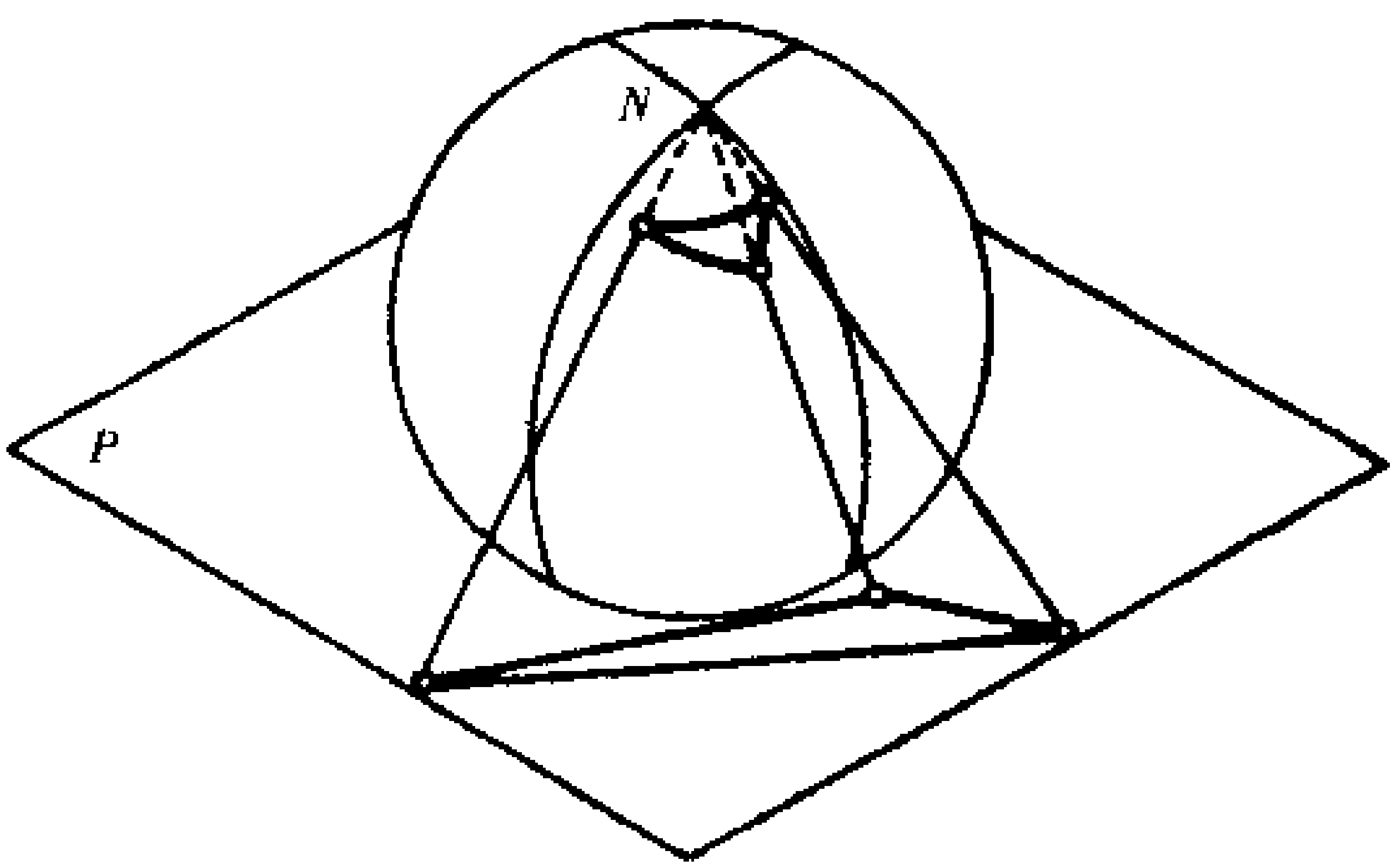


图 1.23

证 考虑球极平面射影(见图 1.23)，球 S 与平面 P 相切，过切点的直径另一端为北极 N，定义映射 $\varphi: S \to P$，当且仅当 N, s, p 共直线时，$\varphi(s) = p$，其中 $s \in S, p \in P$. φ 是一一的映射，P 上的∞点的 N 对应.

若 G 有平面嵌入 G'，则由 φ，G'在 S 上的原象即 G 在 S 上的嵌入；反之，若 G''是 G 在 S 上的嵌入，不妨设 N 不在 G''的边或顶上，则由 φ，G''的象即为 G 的平面嵌入，证毕.

定义 2 平面图 G 之平面嵌入把平面划分成若干连通闭区

域,每个这种闭区域称为 G 的一个面,其中无界面叫做 G 的外面.□

定理 2 v 是平面图的顶点,则可以把 v 嵌入 G 的外面.

证 考虑 G 的球面嵌入,令北极 N 是球面上的含 v 的闭区域的一个内点,以 N 为北极的球极平面射影所得的平面嵌入则使 v 嵌入外面,证毕.

定理 3(Euler,1736) G 是连通平面图,则

$$\upsilon-\varepsilon+\varphi=2, \tag{1}$$

其中 φ 是 G 的平面嵌入的面数.

证 对 φ 进行数学归纳法. $\varphi=1$ 时,G 中无圈,又 G 连通,故 G 是树,$\varepsilon=\upsilon-1$,这时公式(1)成立.假设对于 $\varphi\leqslant n(n\geqslant1)$,公式(1)已成立,考虑 $\varphi=n+1$ 的情形.

由于 $\varphi=n+1\geqslant2$,G 中有圈,设 $e\in E(G)$ 在圈 C 上,则 $G-e$ 仍连通,而被 e 分隔的两个面在 $G-e$ 中变成了一个面,且 $G-e$ 仍是平面图,由归纳法假设,

$$\upsilon(G-e)-\varepsilon(G-e)+\varphi(G-e)=2,$$

$$\upsilon(G)-[\varepsilon(G)-1]+[\varphi(G)-1]=2,$$

$$\upsilon(G)-\varepsilon(G)+\varphi(G)=2,$$

证毕.

推论 1 平面图的面数与平面嵌入方式无关.

推论 2 平面图的有界面面数恰为它的生成树之外的边数.

例 1 对哪些 n,存在 n 棱多面体?

解 显然,多面体是连通平面图 G(以其顶为图的顶,以其棱为图的边),且 $\upsilon(G)\geqslant4$,$\varphi(G)\geqslant4$,由 Euler 公式(1),$\varepsilon(G)\geqslant6$,即无少于 6 条棱的多面体.

四面体就是 6 条棱的多面体.

因 $2\varepsilon(G)\geqslant3\varphi(G)$,若有 7 棱多面体,则 $\varphi\leqslant\frac{14}{3}$.即 $\varphi=4$,于是

$$7 = v(G) + \varphi(G) - 2 = v + 2, v = 5.$$

但 $\varphi = 4$ 时，四面体是唯一的多面体，它只 4 个顶，与 $v = 5$ 相违，可见无 7 棱多面体.

考虑 $k \geqslant 4$，以 k 边形为底的棱锥为 $2k$ 条棱的多面体. 若把 $k-1$边形为底的棱锥底角处的一个三面角"锯掉一个小尖儿"，得到 $2k-1$ 条棱的多面体；总之 $n \geqslant 6, n \neq 7$ 时，有 n 棱多面体.

例 2 正多面体共有几种? 它们的棱数、顶数和面数各是多少? 每顶连接几条棱?

解 此题答案如下表：

面　数	4	6	8	12	20
面　形	正三角形	正方形	正三角形	正五边形	正三角形
顶　数	4	8	6	20	12
棱　数	6	12	12	30	30
每顶处棱　数	3	3	4	3	5

证明如下：没有以正六边形为面的正多面体，因为三个正六边形面拼在一起形成平面块. 正七边形等更多边形更不能做多面体的面，因为它们的内角超过 120°.

(1)以正五边形为面的正多面体.

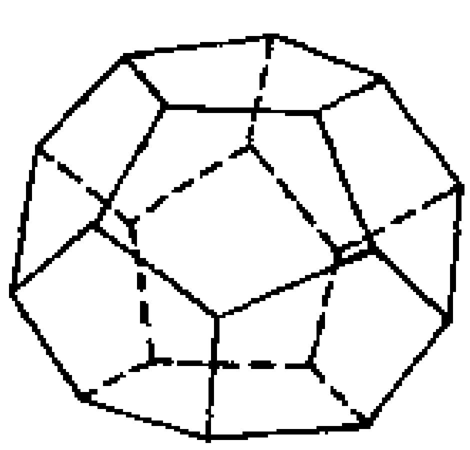


图 1.24

正五边形内角为$\frac{3}{5}\pi$，而$\frac{3}{5}\pi \times 4 > 2\pi$，所以以正五边形为面的正多面体图每顶皆 3 次，于是由 $\sum\limits_{v \in V(G)} d(v) = 2\varepsilon$，得 $3v = 2\varepsilon$，$v = \frac{2}{3}\varepsilon$，$\frac{5}{2}\varphi = \varepsilon$，$\varphi = \frac{2}{5}\varepsilon$，代入 Euler 公式 $v - \varepsilon + \varphi = 2$，得 $\frac{2}{3}\varepsilon - \varepsilon + \frac{2}{5}\varepsilon = 2$，解得 $\varepsilon = 30, v = 20, \varphi = 12$. 见图 1.24

(2)以正方形为面的正多面体

这时只能每顶3次，故 $3v=2\varepsilon$，$v=\frac{2}{3}\varepsilon$，$\frac{4}{2}\varphi=\varepsilon$，$\varphi=\frac{1}{2}\varepsilon$，代入 Euler 公式得

$$\frac{2}{3}\varepsilon-\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=2,$$

解得 $\varepsilon=12$，$v=8$，$\varphi=6$. 即它是正方体，见图 1.25.

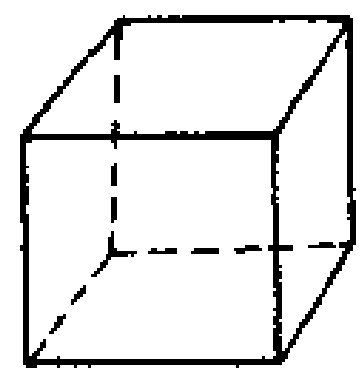


图 1.25

(3)以正三角形为面的正多面体

(i)若每顶3次，则 $3v=2\varepsilon$，$v=\frac{2}{3}\varepsilon$，$\frac{3}{2}\varphi=\varepsilon$，$\varphi=\frac{2}{3}\varepsilon$，代入 Euler 公式得

$$\frac{2}{3}\varepsilon-\varepsilon+\frac{2}{3}\varepsilon=2,$$

解得 $\varepsilon=6$，$v=4$，$\varphi=4$. 得正四面体，见图 1.26.

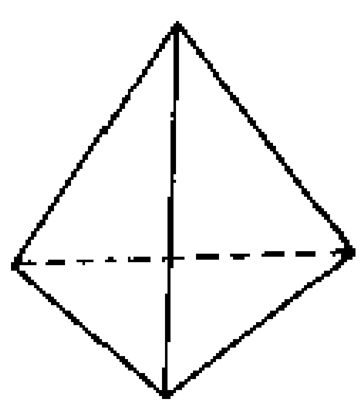


图 1.26

(ii)若每顶4次，则 $4v=2\varepsilon$，$v=\frac{1}{2}\varepsilon$，$\frac{3}{2}\varphi=\varepsilon$，$\varphi=\frac{2}{3}\varepsilon$，代入 Euler 公式得

$$\frac{1}{2}\varepsilon-\varepsilon+\frac{2}{3}\varepsilon=2,$$

解得 $\varepsilon=12$，$v=6$，$\varphi=8$. 它是正八面体，见图 1.27.

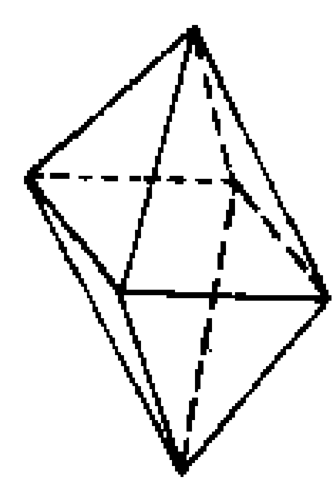


图 1.27

(iii)若每顶5次，则 $5v=2\varepsilon$，$v=\frac{2}{5}\varepsilon$，$\frac{3}{2}\varphi=\varepsilon$，$\varphi=\frac{2}{3}\varepsilon$，代入 Euler 公式得

$$\frac{2}{5}\varepsilon-\varepsilon+\frac{2}{3}\varepsilon=2,$$

解得 $\varepsilon=30$，$v=12$，$\varphi=20$. 即它是正20面体，见图 1.28.

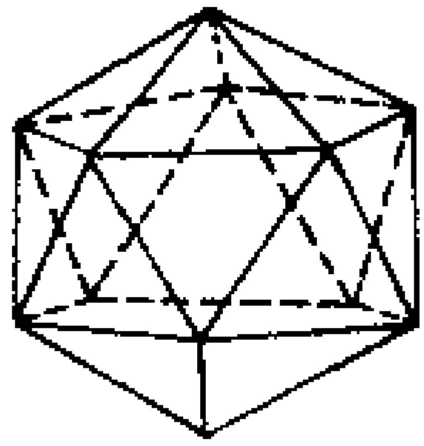


图 1.28

以正三角形为面的正多面体每顶处的棱不能多于5条.

综上所述，正多面体只有以上五种.

1.8.2 对偶图和极大平面图

定义 3 G'是平面图 G 的平面嵌入，则如下画出的图 G^* 是 G 的一个对偶图：

(i) G'的每个面内画上 G^* 的一个顶点 f^*.

(ii)当且仅当 G 的面 f_i 与 f_j 有公共边 e_k 时，画 G^* 的一条边 $e_k^* = f_i^* f_j^*$.

(iii) $e \in E(G)$ 是桥时(即 $G-e$ 的连通片比 G 的连通片多一个)，画 G^* 的一个环，此环与 e 所在的 G'的面内的顶 f^* 相关联(见图 1.29).□

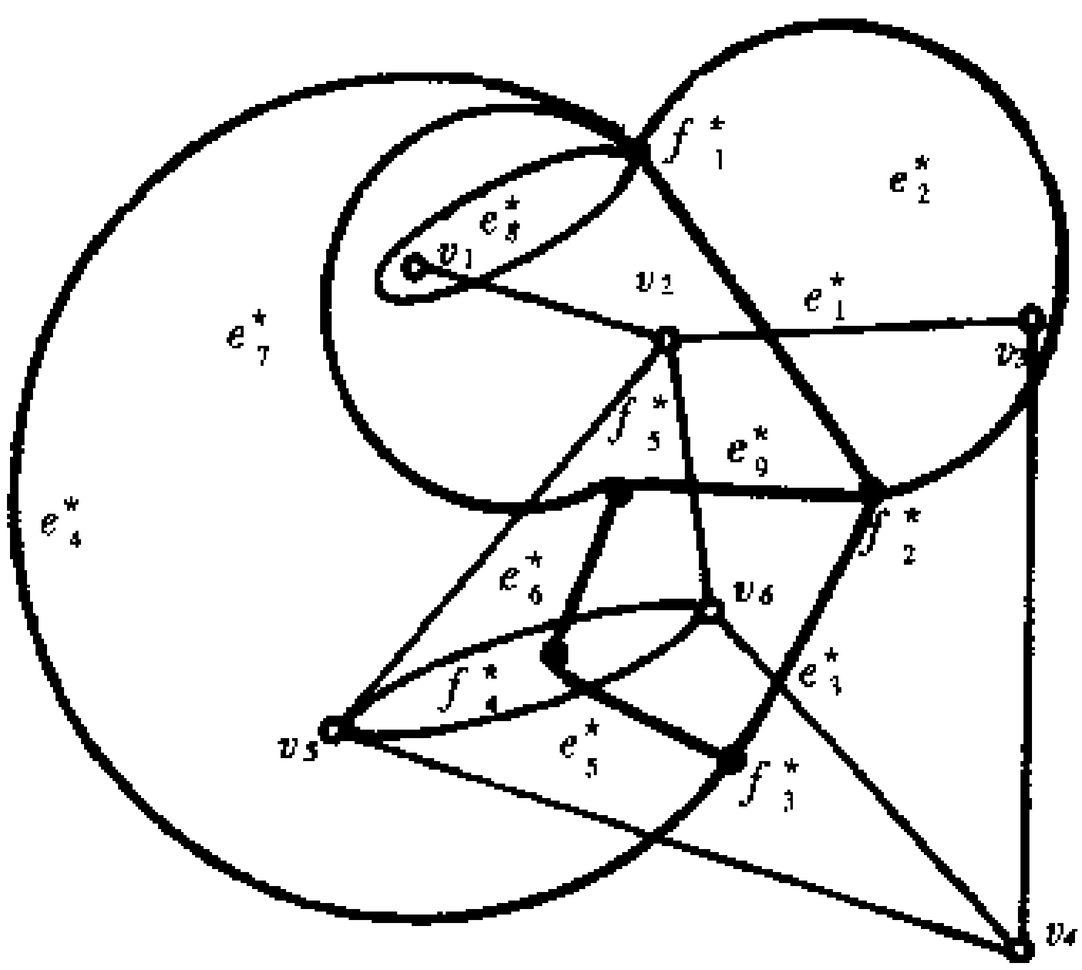


图 1.29

同一个平面图，不同的嵌入方式，所得的对偶图可以不同构. 例如图 1.29 中，桥 v_1v_2 若嵌入到△$v_2v_5v_6$ 内，则 G^* 上的环与 v_2 相关联. 又例如图 1.30 中是同一个无桥平面图的两种平面嵌入，(a)的对偶图有 5 次顶(在外面上)，(b)的对偶图无 5 次顶. 还容易得知，若 G 为平面图，则：

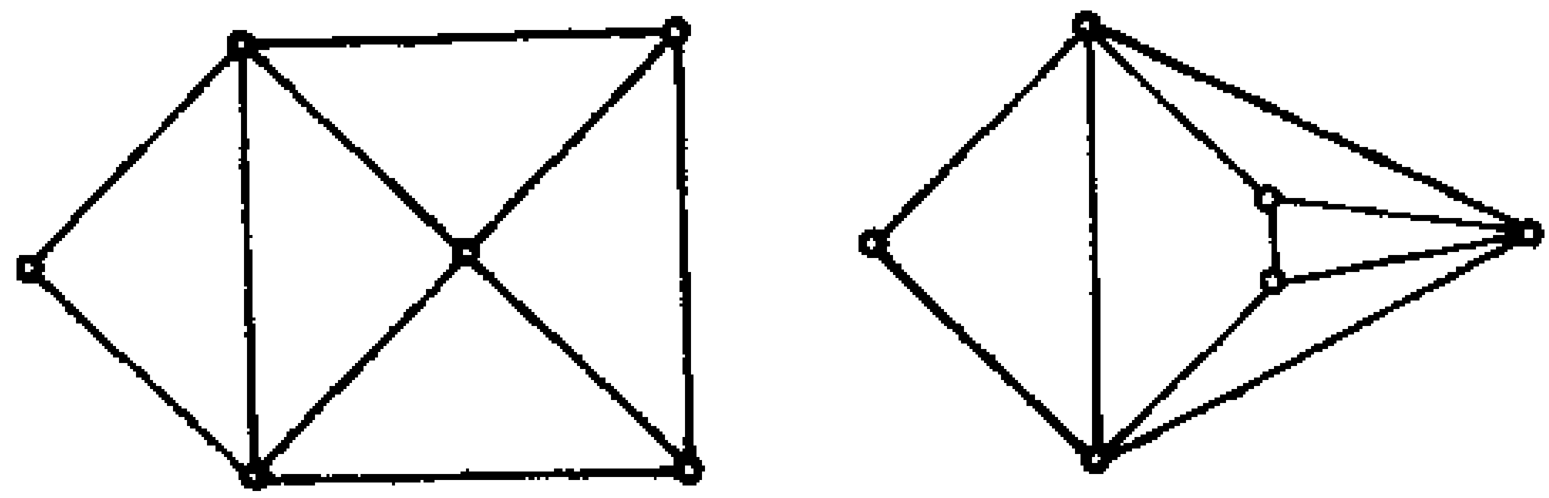
(i) $\varphi(G) = \upsilon(G^*)$，$\varepsilon(G) = \varepsilon(G^*)$，$d_G(f) = d_{G^*}(f^*)$，其中

面次数 $d(f)$是 G 中 f 面边界上的边之条数(桥要数两遍).

(ii) G 的对偶图 G^* 必存在,但未必唯一;G^* 仍为平图.

(iii) G 连通,则 $(G^*)^* = G$.

(iv)平面 $G_1 \cong G_2$,未必 $G_1^* \cong G_2^*$.



(a) (b)

图 1.30

定理 4 G 是平面图,对其任何平面嵌入,

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2\varepsilon(G),$$

其中 $F(G)$是 G 的平面嵌入的面集.

证 $\sum_{f \in F(G)} d(f) = \sum_{f^* \in V(G^*)} d(f^*) = 2\varepsilon(G^*) = 2\varepsilon(G)$,证毕.

推论 3 G 是$\upsilon(G) \geqslant 3$ 的平面图,则 $\varepsilon(G) \leqslant 3\upsilon(G) - 6$.

证 只需对连通平面图来证明,因 $\upsilon \geqslant 3$,显然 $d(f) \geqslant 3$,其中 $f \in F(G)$,又 $2\varepsilon = \sum_{f \in F(G)} d(f) \geqslant 3\varphi$, 由 Euler 公式 $\upsilon - \varepsilon + \varphi = 2$ 得

$3\upsilon - 3\varepsilon + 3\varphi = 6, 3\upsilon - 6 = 3\varepsilon - 3\varphi \geqslant 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon$,证毕.

推论 4 平面图 G 的最小次数$\delta(G) \leqslant 5$.

证 $\upsilon = 1, 2$ 时,命题自然成立,当 $\upsilon \geqslant 3$ 时,由推论 3,

$$\delta\upsilon \leqslant \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\varepsilon(3\upsilon - 6),$$

$$\delta \leqslant 6 - \frac{12}{\upsilon}.$$

故得 $\delta \leqslant 5$，证毕.

定义 4　G 是平面图，对任不相邻的顶对 u, v，$G+uv$ 不再是平面图，则称 G 是极大平面图. □

定理 5　G 是 $v(G)\geqslant 3$ 的极大平面图，当且仅当 G 的平面嵌入每个面皆 3 次.

证　设 G' 是极大平面图 G 的平面嵌入，若 G' 中有一个面的边界不是 K_3，则在此面边界上可以找到不邻的两个顶点 u, v，$G+uv$ 仍为平面图，与 G 是极大平面图相违. 可见极大平面图的每个面皆 3 次.

反之，若 G' 的每个面皆 3 次，由 $\sum_{f\in F(G)} d(f)=2\varepsilon$ 及 $3\varphi=2\varepsilon$，又 G 是连通图，由 Euler 公式 $v-\varepsilon+\varphi=2$ 得 $\varepsilon=3v-6$. 由推论 3，平面图边数上界为 $3v-6$，所以 G 是极大平面图，证毕.

推论 5　平面图 G 是极大平面图的充要条件是 $\varepsilon(G)=3v(G)-6$.

推论 6　G 是 $v(G)\geqslant 4$ 的极大平面图，则 $\delta(G)\geqslant 3$.

证　$\forall v\in V(G)$. 由于 G 是平面图，故 $G-v$ 也是平面图. 设 G' 是 G 的平面嵌入，v 必在 $G'-v$ 的一个面 f' 的内部. 又由于 G 是极大平面图，$G-v$ 的顶至少有三个在上述 f' 的边界上，故在 G 中 $d(v)\geqslant 3$，由 v 之任意性，$\delta(G)\geqslant 3$，证毕.

1.8.3 Kuratowsky 定理

相传一位秦始皇式的独裁者，死到临头留有遗言，把土地瓜分给他的五个儿子，这五个儿子在自己分得的领地上各修筑了一座宫殿，他们还企图修一些道路，使得每两座宫殿之间有一条道路直接相通，要求道路不能交叉. 愚蠢的王子们虽煞费苦心，终告失败.

1930 年，波兰数学家 Kuratowsky 给出平面图的充分必要条件，可以严格证明上述五宫修路问题无解.

定理 6　K_5 和 $K_{3,3}$ 是非平面图.

证　$v(K_5)=5$，$\varepsilon(K_5)=10$，$3v-6=9$，不满足平面图的必要

条件 $\varepsilon \leqslant \upsilon - 6$，故 K_5 不是平面图.

对于 $K_{3,3}$，因它无奇圈，所以无子图 K_3，若 $K_{3,3}$是平面图，每面次数至少是 4，于是

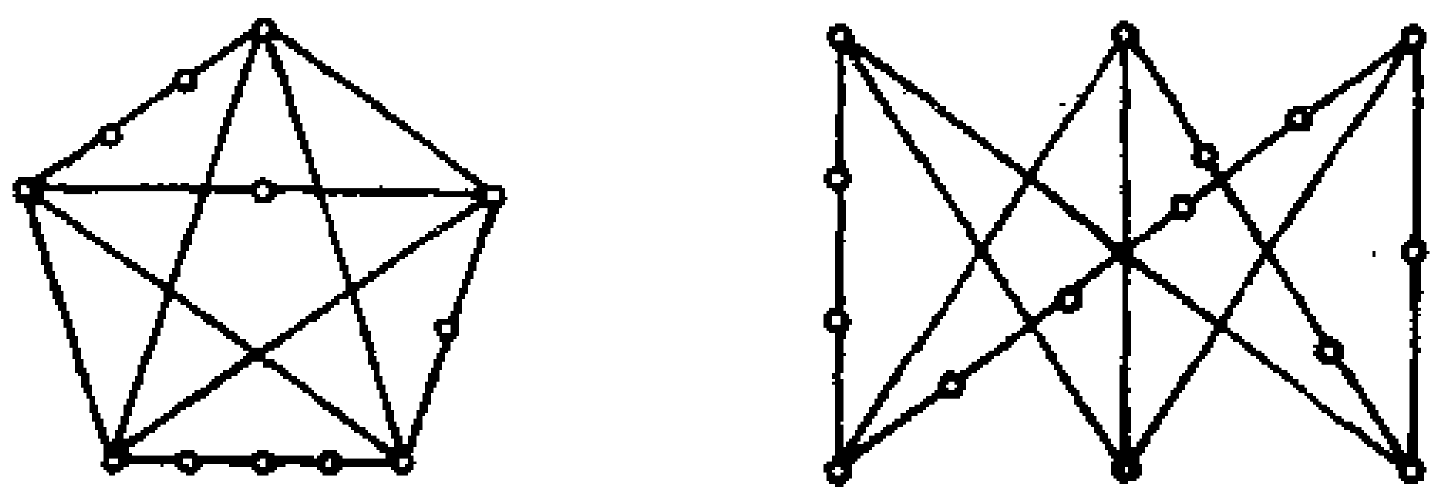
$$4\varphi \leqslant \sum_{f \in F(K_{3,3})} d(f) = 2\varepsilon = 2 \times 9 = 18,$$

$\varphi \leqslant 4.5$，即 $\varphi \leqslant 4$，由 Euler 公式

$$2 = \upsilon - \varepsilon + \varphi \leqslant 6 - 9 + 4 = 1,$$

这不可能，证毕.

两个图称为同胚，若其中一图是另一图的某些边内"加上"一些新项得到. 例如图 1.31(a)图与 K_5 同胚，(b)图与 $K_{3,3}$同胚.



(a)　　　　(b)

图 1.31

某些图之所以不能平面嵌入，就是因为它们身上长了与 K_5 或 $K_{3,3}$同胚的子图那种恶性肿块.

定理 7(Kuratowsky，1930)　G 是平面图的充要条件是 G 中无与 K_5 和 $K_{3,3}$同胚的子图.

定理 7 的证明偏长，此处从略.

Kuratowsky 定理可以改述如下：

G 是平面图，当且仅当 G 中无通过一系列边收缩($G \cdot e$)得到 K_5 或 $K_{3,3}$的子图.

例如 Petersen 图，如图 1.32，可以收缩成 K_5，所以它(也称"小妖")不是平面图.

1.8.4 图的厚度

非平面图无法嵌入平面，但可以考虑分层嵌入 n 个平面的问题：G 的边集至少可以划分成几个子集，使得每个子集的导出子图皆平面图？

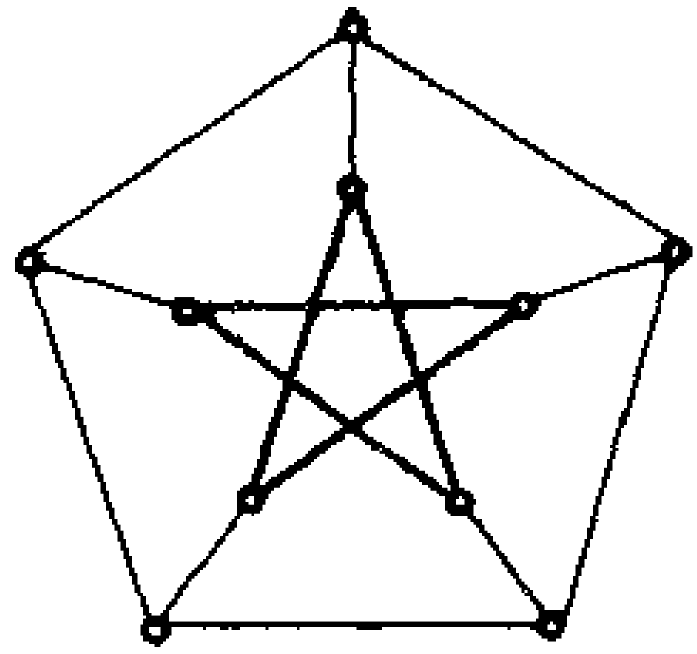


图 1.32

定义 5 若 $G=\bigcup\limits_{i=1}^{d}G_i$，其中 G_i 是 G 的平面子图，$i=1,2,\cdots,d$，$E(G_{i_1})\cap E(G_{i_2})=\varnothing$，$1\leqslant i_1<i_2\leqslant d$，则称 $(G_1,G_2,\cdots,G_d)$ 为 G 的平面分解，

$$\theta(G)=\min\{d\mid(G_1,G_2,\cdots,G_d)\text{为平面分解}\}$$

称为 G 的厚度或层次. □

例如 $\theta(K_5)=2$.

在现代工程技术中，需要求出图的厚度，例如在复杂电路布线问题中就需考虑相应的图的分层问题，可惜至今既无公式也无有效算法确定图的厚度. 只能给出它的下界.

定理 8 (1) $\theta(G)\geqslant\left\{\dfrac{\varepsilon}{3\upsilon-6}\right\}$，$(\upsilon>2)$；

(2) 若 G 不含三角形，则 $\theta(G)\geqslant\left\{\dfrac{\varepsilon}{2\upsilon-4}\right\}$，$(\upsilon>2)$；

(3) $\theta(K_\upsilon)\geqslant\left[\dfrac{\upsilon+7}{6}\right]$，$(\upsilon\geqslant3)$.

证 (1) 对于平面图，$0<\varepsilon\leqslant3\upsilon-6$，从而

$$0<\frac{\varepsilon}{3\upsilon-6}\leqslant1,\qquad(\upsilon>2),$$

故有

$$\theta(G)\geqslant\left\{\frac{\varepsilon}{3\upsilon-6}\right\}.$$

(2) 若 G 是平面图，且不含三角形，G 的 φ 个面之次数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_\varphi$，显然 $n_i\geqslant4$，$i=1,2,\cdots,\varphi$. 又 $\sum\limits_{f\in F(G)}d(f)=2\varepsilon$，故

得 $4\varphi \leqslant 2\varepsilon, \varphi \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$，由 Euler 公式

$$2 = \varphi + \upsilon - \varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \upsilon - \varepsilon = \upsilon - \frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon \leqslant 2\upsilon - 4,$$

所以

$$0 < \frac{\varepsilon}{4\upsilon - 4} \leqslant 1, \qquad (\upsilon > 2),$$

于是

$$\theta(G) \geqslant \left\{ \frac{\varepsilon}{2\upsilon - 4} \right\}, \quad (\upsilon > 2).$$

(3) 由(1)得

$$\theta(K_\upsilon) \geqslant \left\{ \frac{\varepsilon}{3\upsilon - 6} \right\},$$

对于 $K_\upsilon, \varepsilon = \frac{1}{2}\upsilon(\upsilon - 1)$，取 $\alpha = 1 - \frac{1}{3\upsilon - 6}, \upsilon \geqslant 3$，故 $0 < \alpha < 1$，于是

$$\theta(K_\upsilon) \geqslant \left[\frac{\upsilon(\upsilon - 1)}{6(\upsilon - 2)} + 1 - \frac{1}{3\upsilon - 6} \right]$$

$$= \left[\frac{\upsilon^2 + 5\upsilon - 14}{6(\upsilon - 2)} \right] = \left[\frac{\upsilon + 7}{6} \right],$$

证毕.

值得注意的是上面给出的 $\theta(G)$ 的下界往往偏小，例如 θ(Petersen 图) = 2，但

$$\left\{ \frac{\varepsilon}{3\upsilon - 6} \right\} = \left\{ \frac{15}{30 - 6} \right\} = 1,$$

误差 100%.

习题三

1. 证明：$K_5 - e$ $(e \in E(K_5))$ 是平面图.
2. 证明：$K_{3,3} - e$ $(e \in E(K_{3,3}))$ 是平面图.
3. 试把 K_7 嵌入环面.
4. 一个平面图 G 为自对偶图是指 G 与其对偶图 G^* 同构，证明

(1)G 是自对偶图,则 $\varepsilon(G)=2\upsilon(G)-2$.

(2)对每个 $n\geqslant 4$,作一个 n 顶自对偶图.

5. $\upsilon(G)\geqslant 11$, G 是平面图,则 G^c 是非平面图.

6. $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $n\geqslant 3$, S 是平面点集,它的任二点距离至少为 1,则其中最多 $3n-6$ 对点,每对点相距恰为 1.

7. 正十二面体与正六面体的对偶图是什么?

8. 图 1.33 是平面图吗?

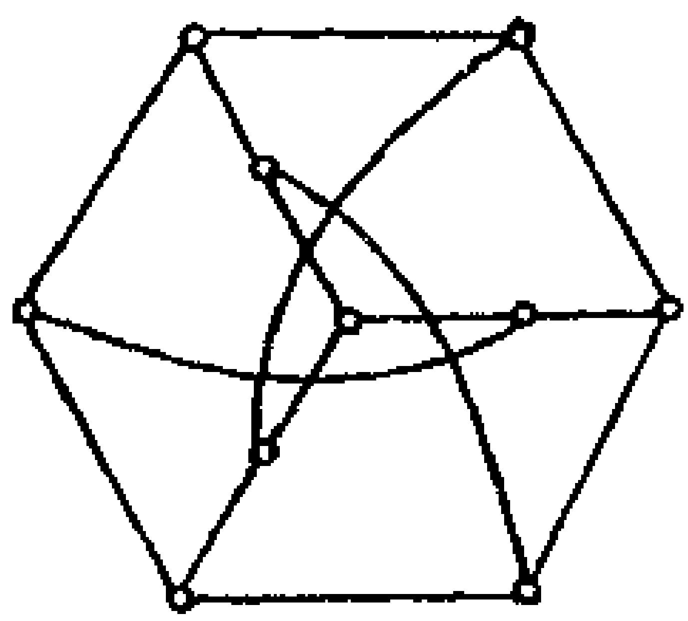


图 1.33

9. G 是平面图,则

$$\upsilon-\varepsilon+\varphi=\omega+1.$$

10. 若多面体的每两个面至多有一条公共边,则它至少有两个面有相同的边数.

11. G 由 $K_{3,3}$ 添加两个零次顶构成,则 G^c 是非平面图.

12. 把平面划分成 φ 个区域,每两个区域皆相邻,问 φ 最大是多少?

13. 平面图的平面嵌入可以使每条边皆呈直线段.

14. 平面图的平面嵌入可使每个点在同一个面上,则称其为外可平面图,证明:G 是外可平面图的充要条件是 G 不含 K_4 与 $K_{2,3}$ 的同胚.

1.9 纵深搜索和平面嵌入算法

1.9.1 广度优先与深度优先搜索算法

1)广度优先搜索算法(Breadth first search)BFS 算法

(1)$\forall v \in V(G)$,标号 $l(v)=0$,令 $l=0$.

(2)当所有标号为 l 的顶 u 的相关联的边的端点皆已标号,则转(3);否则,把与 u 相关联的未标号的顶皆标以 $l+1$,并记录这些边,用 $l+1$ 代替 l,转(2).

(3)止.□

定理 1 BFS 终止时,仍有未标志的顶,则 G 不连通;否则,BFS 记录的边导出的子图是 G 的生成树.

证 由 BFS 的执行过程知,标号之顶与 0 号顶是连通的,若终止时,所有的顶皆已标志,则由记录的边导出的 G 之子图是 G 的连通生成子图,又顶不二次标号,所以此生成子图中无圈,它是 G 的生成树.否则,即 BFS 终止时仍有未标志的顶,未标号的顶与已标号的顶不可能连通,G 是不连通图,证毕.

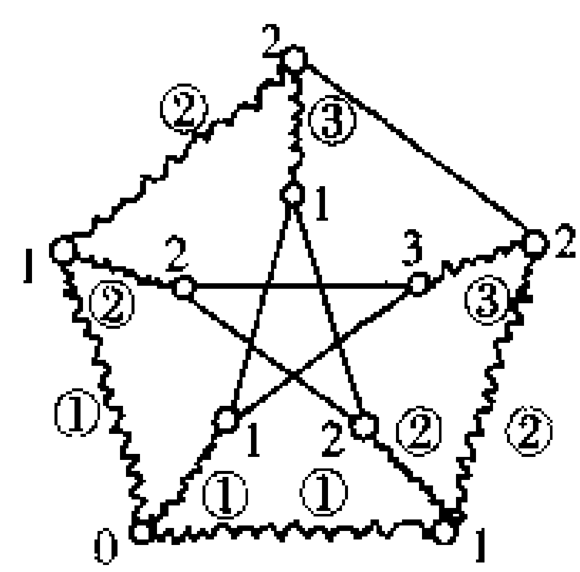


图 1.34

例如图 1.34 中,顶处的数字是 $l(v)$,边旁小圈内的数字表示边被记录的批次,波纹线表示的边导出生成树.

2)深度优先搜索算法(Depth first search)

DFS 算法是图论的最重要算法之一,它的思路可以用迷宫法则来表述,图 1.35 是 1690 年独裁者威廉王修筑的迷宫的示意图,其遗址至今仍保留在奥地利.

迷宫法则:

任务是从事先未知其结构的迷宫之入口出发,每个走廊都要搜索,再从入口退出.为了不兜圈子尽快退出,要记住哪些走廊已

经走过,沿着未走过的走廊尽可能远地走下去,走到已无未走过的走廊可选时,沿来路回返,到某一路口,发现可通往一条未走过的走廊时,沿此走廊搜索,依次类推,直至完成任务.

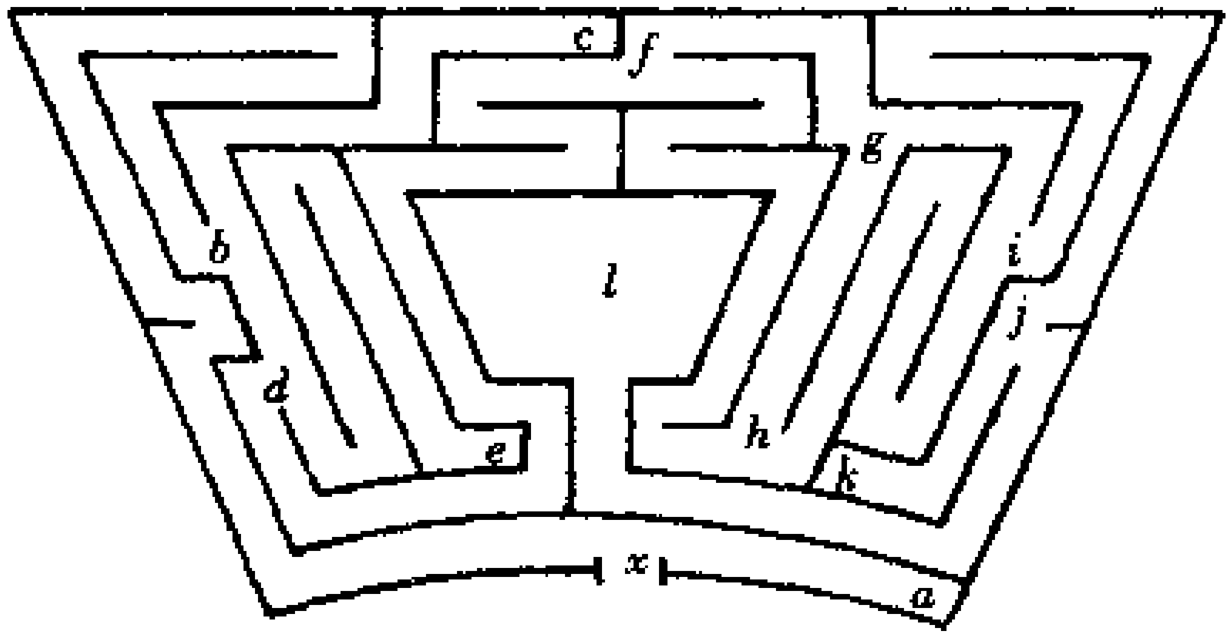


图 1.35

神话中雅典王子忒修斯就是在公主亚丽阿特帮助下,用绒线作标志,按上述迷宫法则深入搜索了克里特岛上人面妖精米诺托的迷宫,斩掉了这个吃人魔王,安全地从其迷宫入口撤出的.

1973 年,用上述迷宫思路,Hopcroft 和 Tarjan 设计了下面有效的 DFS 算法.

DFS 算法:

(1)标志一切边"未用过",对每顶 $v\in V(G)$,$k(v)\leftarrow 0$,$i\leftarrow 0$,$v\leftarrow s$.

(2)$i\leftarrow i+1$,$k(v)\leftarrow i$.

(3)若 v 无未用过的关联边,转(5).

(4)选一条未用过的与 v 关联的边 $e=uv$,标志 e"用过",若 $k(u)=0$,转(3);否则 $f(u)\leftarrow v$,$v\leftarrow u$,转(2).

(5)若 $l(v)=1$,止.

(6)$v\leftarrow f(v)$,转(3).□

在 DFS 算法中,$k(v)$称为顶 v 的 DFS 编码;$f(v)$叫做 v 之父,v 叫做$f(v)$之子,以父为尾以子为头的边叫做父子边.非父子边称为返回边.

DFS 与 BFS 的时间复杂度皆为 $O(|E(G)|)$.

图 1.36 是 DFS 执行的示意图,标了箭头的边是父子边,它们导出的是生成树. s 是 DFS 的出发点,是 DFS 产生的外向生成树的根,虚线表示返回路线. 在 DFS 中,图的每边恰通过两次又回到出发点.

定理 2 G 是连通图,则 DFS 产生的父子边导出的子图是以 s 为根的外向生成树.

证 显然,在父子边导出的子图上, $d^-(s)=0$, $v\neq s$ 时, $d^-(v)=1$. 作为无向图而言,父子边的导出子图是无圈的连通图,所以是树. 考虑序列 $v_0=v, v_1, v_2, \cdots$,其中 $f(v_i)=v_{i+1}$. $v_0\neq s$,因为 s 的父亲 $f(s)$ 不存在,所以这一序列止于 s. 从 s 沿此序列逆向运行,得到从 s 到 $v_0=v$ 的一条有向轨,由 v 的任意性,可见父子边导出的是以 s 为根的外向生成树,证毕.

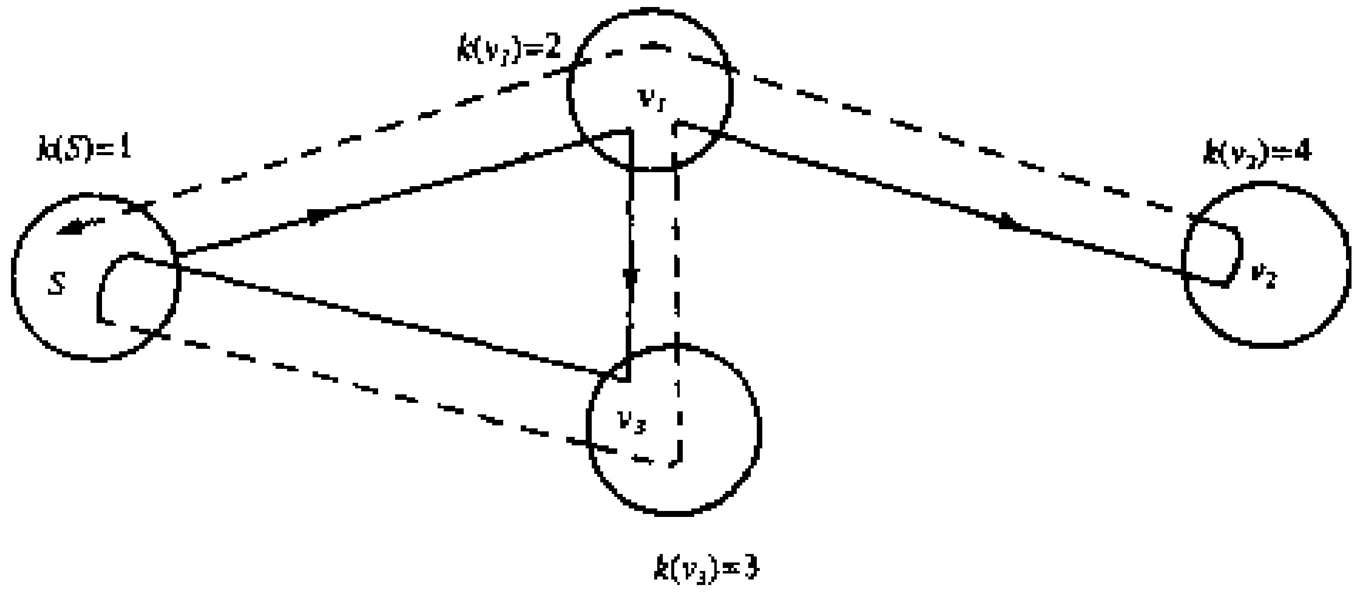


图 1.36

定理 3 在 DFS 中, $e=ab$ 是返回边,则要么 a 是 b 的祖先,要么 a 是 b 的后代子孙.

证 设 $k(a)<k(b)$,在 DFS 的活动中心,即算法中的 v,只沿父子边移动. 若 a 不是 b 之祖先,但由 $k(a)<k(b)$, a 比 b 先"生",即活动中心移至 b 之前,已从 a 移到 a 的某个前辈. 然而,由算法知,仅当与 a 关联的边皆被用过后才倒行至其父,这说明 e 已被用过, b 在 a 之前已被发现,应有 $k(b)<k(a)$,与 $k(a)<k$

(b)矛盾,故 a 是 b 之祖先.

同理当 $k(b)<k(a)$时,a 是 b 的后代,证毕.

例如图 1.36 中,sv_3 是返回边,s 是 v_3 的"祖父",v_3 是 s 之"孙".

1.9.2 求割顶和块的算法

G 是连通图,$v\in V(G)$,$G-v$ 不再连通,则称 v 是 G 的割顶,无割顶的图叫做块,G 中成块的极大子图叫做 G 的块.

我们把经过 DFS 的无向图定向成有向图,父子边从父向子画箭头,返回边以祖为头.再规定顶 v 的标号 $l(v)$:从 v 出发沿有向轨可以到达的顶 u 中 $k(u)$的最小值记成 $l(v)$,此种有向轨长可以为零,但至多允许含一条返回边.例如图 1.37 中,顶点第一个数是 $k(v)$,第二个数是 $l(v)$,$l(v_1)=7$,$l(v_2)=l(v_3)=l(v_4)=1$,$l(v_5)=l(v_6)=l(v_7)=2$.

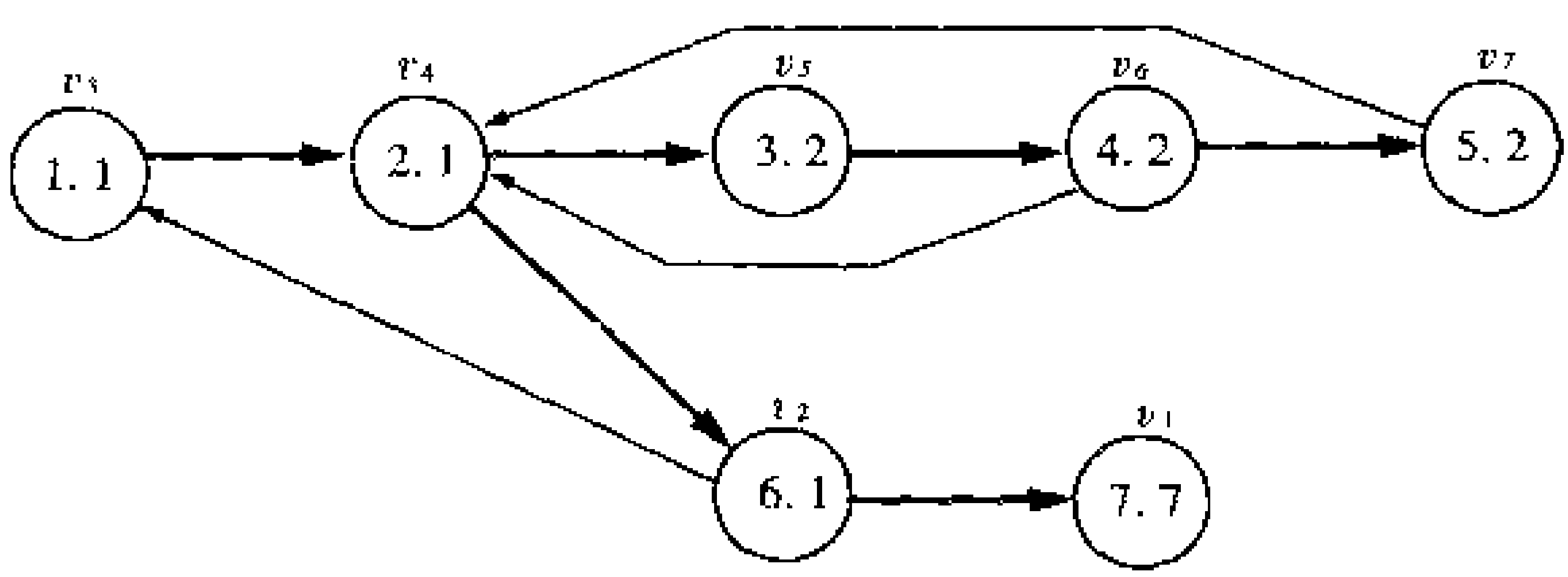


图 1.37

定理 4 DFS 中,$e=uv$ 是父子边,且 $k(u)>1$,$l(v)\geqslant k(u)$,则 u 是割顶.

证 令 S 是从根 r 到 u 的轨上含 r 而不含 u 的一切顶组成的集合,T 是以 v 为根的子树上的顶集.由定理 3,不存在连接 T 与 $V-(S\cup\{u\}\cup T)$的边.若存在连接 $t\in T$ 与 $s\in S$ 的边 ts,则它是返回边,且 $k(s)<k(u)$.这时 $l(v)\leqslant k(s)\leqslant k(u)$,与已知 $l(v)\geqslant k(u)$矛盾,故 ts 这种边不存在,故 u 是割顶,证毕.

例如图 1.37 中，v_4v_5 是父子边，且 $k(v_4)=2>1$，$l(v_5)=2$，又 $k(v_4)=2$，由定理 3，v_4 是割顶.

定理 5 若 u 是连通图 G 的割顶，G 经 DFS 后，$k(u)>1$，则存在父子边 $e=uv$，使得 $l(v)\geqslant k(u)$.

证 因 u 是割顶，设 $V-\{u\}$ 划分成 $V_1,V_2,\cdots,V_m$，$G[V_i]$ 是 $G-u$ 的连通片，$i=1,2,\cdots,m(\geqslant 2)$，则当 $i\neq j$ 时，在 G 上从 V_i 到 V_j 的一切轨皆含 u；又 $k(u)>1$，u 不是有向生成树的根，不妨设 $r\in V_1$，r 是根，在 DFS 过程中，活动中心必然要通过 u，设 uv 是 $v\notin V_1$ 的第一条父子边，设 $v\in V_2$，因无连通 V_2 与 $V-(V_2\cup\{u\})$之间的边，故 $l(v)\geqslant k(u)$，证毕.

定理 6 r 是对 G 的 DFS 过程中生成树的根，r 是图 G 的割顶的充分必要条件是至少有两条以 r 为尾的父子边.

证 若 r 是对 G 的 DFS 的生成树的根，且 r 是 G 的割顶，$V_1,V_2,\cdots,V_m$ 是 $V-\{r\}$的一个划分，$G[V_i]$是 $G-r$ 的连通片，$i=1,2,\cdots,m$. $i\neq j$ 时，V_i 与 V_j 之间的轨都含 r，这时没有起于边 $rv(v\in V_i)$而止于 V_j 中顶的树上的有向轨，故至少有两条以 r 为尾的父子边.

设 rv_1,rv_2 是两条父子边，T 是根在 v_1 的子树，由定理 3，无连接 $V(T)$ 与 $V(G)-(V(T)\cup\{r\})$之顶的边，又 $V(G)-(V(T)\cup\{r\})\neq\varnothing$，故 r 是 G 的割顶，证毕.

求取割顶与块的算法：

(1)标一切边未用过，$S=\varnothing$，对每顶 $v\in V(G)$，$k(v)\leftarrow 0$，$i\leftarrow 0$，$v\leftarrow s$.

(2)$i\leftarrow i+1$，$k(v)\leftarrow i$，$l(v)\leftarrow i$，把 v 放入先入后出存储器 S.

(3)若 v 无未用过的关联边，转(5).

(4)选一未用过的边 $e=vu$，标志 e 用过了，若 $k(u)\neq 0$，令 $l(v)\leftarrow\min\{l(v),k(u)\}$转(3)；否则($k(u)=0$)，令 $f(u)\leftarrow v$，$v\leftarrow u$，转(2).

(5)$k(f(v))=1$，转(9).

(6)($f(v)\neq s$)若 $l(v)<k(f(v))$,则

$$l(f(v))\leftarrow\min\{l(f(v)),l(v)\},$$

转(8).

(7)($l(v))\geqslant k(f(v))$ $f(v)$是割顶,把 S 中包括 v 在内的 v 上部之顶移出,这些顶连同 $f(v)$导出一个块.

(8)$v\leftarrow f(v)$,转(3).

(9)把 S 中连同 v 在内 v 上方之顶移出,这些顶连同 s 导出一个块.

(10)若 s 无未用过的关联边,止.

(11)顶 s 是割顶,令 $v\leftarrow s$,转(4).□

上述算法的时间复杂度是 $O(|E(G)|)$.

这个算法把 G 上的一切割顶和块都找到了.

1.9.3 有向图的 DFS 和极大强连通子图的算法

1)有向图的 DFS

有向 DFS 算法:

(1)标志每条边未用过,对每个顶 $v\in V(G)$,$k(v)\leftarrow0$,$i\leftarrow0$,$f(v)$未定,$v\leftarrow s$($s\in V(G)$,是搜索出发点).

(2)$i\leftarrow i+1$,$k(v)\leftarrow i$.

(3)若无以 v 为尾的未用过的边,转(5).

(4)选一条未用过的边 $e=vu$,标志 e 已用过;若 $k(u)\neq0$,转(3),若 $k(u)=0$,$f(u)\leftarrow v$,$v\leftarrow u$,转(2).

(5)若 $f(v)$已确定,$v\leftarrow f(v)$,转(3).

(6)若 $f(v)$未确定,选顶 u 满足$k(u)=0$,$v\leftarrow u$,转(2).

(7)止(所有顶皆被搜索).□

上述算法的时间复杂度为 $O(|E(G)|)$.

有向图经 DFS 之后,边可分成四种:

(1)父子边:导出生成林,见图 1.38 中的粗实线.

(2)返祖边:后代指向祖先之边,如图 1.38 中的 v_2v_3.

(3)前进边:祖先指向后代孙的边,如图 1.38 中的 v_1v_2.

(4)横跨边:生成林之间的边,如图 1.38 中的 v_5v_2,v_5v_4.

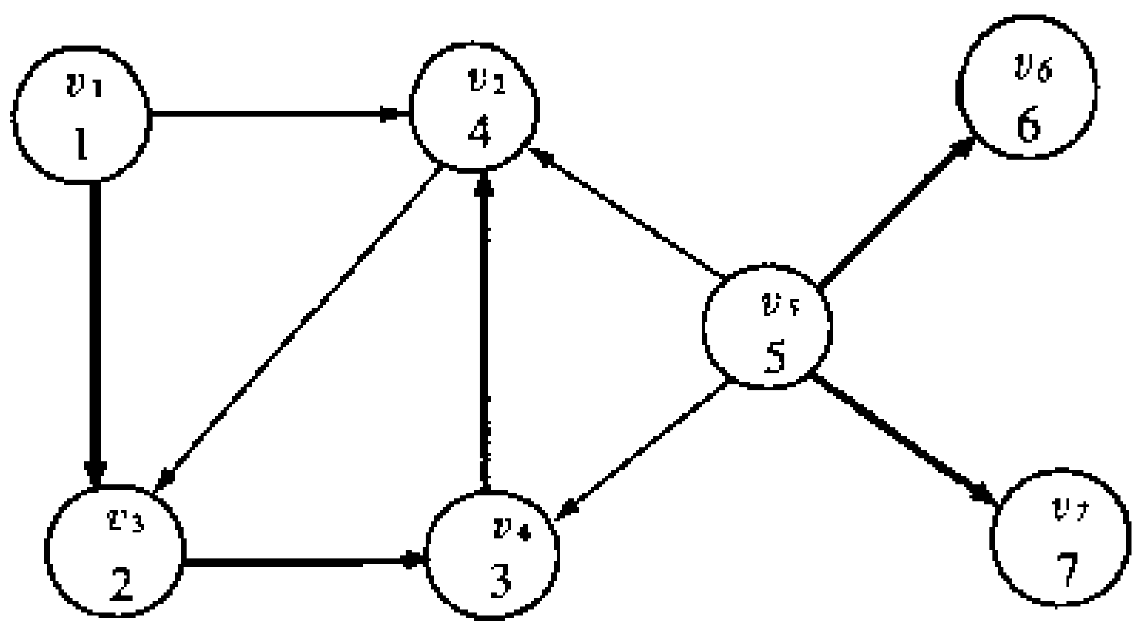


图 1.38

2)求极大强连通子图的算法

在有向图 G 中,$x,y\in V(G)$,且存在有向轨 $P(x,y)$,则称 x 可达 y;若 x 可达 y,y 亦可达 x,记成 $x\sim y$."$\sim$"是一种自反的、对称的和可传递的关系.用 $\sim$ 把 $V(G)$ 划分成若干等价类,每一类之导出子图叫做 G 的一个极大强连通子图.或者说,极大强连通子图是其任一对顶可以彼此到达,但再添加一个顶则不会如此的一个子图.

求极大强连通子图的算法:

(1)标志一切边未用过,对每一顶 $v\in V(G)$,$k(v)\leftarrow 0$,$f(v)$ 未定,$S=\varnothing$,$i\leftarrow 0$,活动中心 $v\leftarrow s(s\in V(G))$.

(2)$i\leftarrow i+1$,$k(v)\leftarrow i$,$l(v)\leftarrow i$,把 v 放入 S.

(3)若无以 v 为尾的未用过之边,转(7).

(4)选一未用过的边 $e=vu$,标志 e 用过了;若 $k(u)=0$,则 $f(u)\leftarrow v$,$v\leftarrow u$,转(2).

(5)若 $k(u)>k(v)$($e=vu$ 是前进边),转(3);若 $k(u)<k(v)$,$u\notin S$,转(3).

(6)$k(u)<k(v)$,$u\in S$,令

$$l(v)\leftarrow\min\{l(v),k(u)\},$$

转(3).

(7)$l(v)=k(v)$，则下至 v 的 S 中之顶全移出，它们导出一个极大强连通子图.

(8)若 $f(v)$已确定，则

$$l(f(v))\leftarrow\min\{l(f(v)),l(v)\},v\leftarrow f(v),$$

转(3).

(9)$f(v)$未确定，若存在 $u\in V(G),k(u)=0$，则 $v\leftarrow u$，转(2).

(10)止(一切顶被搜索).□

上述算法的时间复杂度为 $O(|E|)$.

1.9.4 平面嵌入算法

Kuratowsky 定理给出了平面图的充分必要条件，但要真的检验 G 中究竟有无 K_5 或 $K_{3,3}$ 的同胚子图，我们并无良策. 下面给出一个有效的平面嵌入算法，算法终止时，实现了平面嵌入者，自然为平面图，否则为非平面图. 这个算法集判定可否平面嵌入与实现平面嵌入于一身，它是 1966 年 Lempel，Even 和 Cederbaum 给出的，唤做"顶点添加平面嵌入法".

1) st 编码

因为 G 为平面图的充分必要条件是 G 的块皆平面图，下面总是假设 G 是一个块.

取 $e=st\in E(G)$，称满足下列条件的一一映射 g 为图 G 的 st 编码：

$$g:V(G)\rightarrow\{1,2,\cdots,\upsilon\},$$

使得(1)$g(s)=1$，(2)$g(t)=\upsilon$，(3)$v\in V(G)-\{s,t\}$，则存在 v 的两个邻顶 u,w，有 $g(u)<g(v)<g(w)$.

是否任何块都有 st 编码呢? 如果，如何编? 为此建立所谓寻路算法.

寻路算法：

(0)对 G 执行 DFS，且取 $k(t)=1,k(s)=2$(即 t 是 DFS 的出发点，s 是 t 的儿子)，把 s,t 及边 ts 标成"老的"，其余边皆标成"新的".

(1)若 $v\in V(G)$，存在新的返回边 $e=vw(k(v)\geqslant k(w))$，则标 e 是"老的"，得路 vw，止.

(2)若存在"新的"父子边 $e=vw(k(w)>k(v))$，从 e 开始，追踪定义 $l(w)$ 的路(沿父子边前进，通过一条返回边在一顶 u 处结束，其中 $k(u)=l(w)$). 把此路上一切顶与边标成"老的"，止.

(3)若存在"新的"返回边 $e=wv(k(w)>k(v))$，则从 e 及父子边逆行直至一个"老顶"，此路上的一切顶与边标以"老的"，止.

(4)一切与 v 关联的边皆"老的"，产生空路. 止. □

上述算法时间复杂度为 $O(|E(G)|)$.

定理 7 寻路算法总从老顶 v 开始，$v\neq t$，则老顶之祖先也是老的.

证 用数学归纳法来证. 若 $v=s$，s 之祖先是 t，t 是老的，命题成立. 假设已经进行了 p 次寻路，每次皆从老顶出发，且老顶之祖先皆老顶. 考虑 $p+1$ 次寻路之后，从寻路的四个步骤可以看出，其中任何一条执行时，命题结论仍正确，证毕.

定理 8 G 是块，从老顶 v 出发($v\neq t$)寻路，则每次产生一个新边新顶的路，此路止于另一老顶，或是 v 的一切关联边皆老的，产生空路.

证 只需考虑寻路算法中的 2. 因 G 是块，v 非割顶，则 $l(w)<k(v)$，故(2)寻路之终止点 u 是 v 之祖先，由于 v 是老的，由定理 7，u 也是老的，证毕.

***st* 编码算法：**

(1)$i\leftarrow 1$，$s,t\in S$，s 在 t 上方.

(2)若 v 在 S 的顶部，把 v 从 S 中移出；若 $v=t$，$g(t)\leftarrow i$，止.

(3)若 $v\neq t$，对 v 执行寻路算法，若从 v 始寻到的是空路，则 $g(v)\leftarrow i$，$i\leftarrow i+1$，转(2).

(4)若得的路非空，设它是 $vu_1u_2\cdots u_lw$，按 $u_l,u_{l-1},\cdots,u_2$，u_1 的顺序把它们放入 S，转(2). □

上述算法的时间复杂度是 $O(|E(G)|)$.

定理 9　st 编码算法给出的确是 st 编码.

证　我们从算法发现三个事实:

(i)设有一个顶同时出现在 S 的两上或更多的位置上.

(ii)一旦 v 出现在 S 中,S 中在 v 下方的顶直到 v 得到编码前是不会得到编码的.

(iii)仅当与 v 关联的边皆"老的"时,此顶才从 S 中移出,不再进入 S.

下面来证 t 移出 S 前,每个顶都会放入 S. 因为开始时,t 与 s 已在 S 中,我们只考虑 $v \notin \{s, t\}$;因 G 是块,则从 s 到 v 有一条不过 t 的轨. 设此轨为 $su_2u_3\cdots u_{l-1}v$,这里 $s = u_1, v = u_l$,且 u_m 是未放入 S 的第一个顶,因 u_{m-1} 已放入 S,由(ii),t 只能在 u_{m-1} 之后被移出;且由(iii),u_{m-1} 被移出,只能在与之关联的一切边皆老之后,所以 u_m 必于 t 被移出前放入 S.

下面证明得到的确为 st 编码.

因为每顶放入 S 后,终究要被移出,所以每顶皆得一编码 $g(v)$. 显然 $g(s)=1$,因为 s 是第一个被移出者. 以后的赋值是递增的,故 $g(t)=\nu$. 其它顶第一次放入 S 时,是做为一路之内顶,故在 S 中,此顶下方还有一个在 G 中相邻的顶,上方也有一顶是此顶在 G 中的邻顶,由(ii),在此顶上方那个顶编号小,此顶下方那个顶编号大,故 g 是一个 st 编码,证毕.

2)顶点添加平面嵌入算法

设 G 是块,已被 st 编码,我们用 st 码来称呼该顶,$V = \{1, 2, \cdots, \nu\}$. 再把 G 定向,使每一条有向边皆是尾小于头. 于是:

(1)$d^-(1) = 0$,1 是唯一的源,只出不入.

(2)$d^+(\nu) = 0$,ν 是唯一的坑,只入不出.

(3)$v \in \{2, 3, \cdots, \nu - 1\}$,$d^+(v) \cdot d^-(v) \neq 0$,$v$ 非源非坑,有进有出.

记 G' 是平面图 G 的平面嵌入,$G_k = G[\{1, 2, \cdots, k\}]$,即 G_k 是顶子集 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的导出子图.

引理1 设 G'_k 是含于G'中的G_k之平面嵌入,则 $G'-V(G'_k)$的一切顶与边皆嵌入 G'_k 的一个面内部,其中 $k<v$.

证 $G'-V(G'_k)$的顶集非空,而 $V(G'-V(G'_k))\cap V(G'_k)=\varnothing$,所以存在 G'_k 的一个面f,f 内含$G'-V(G'_k)$的若干个顶.又因为 f 边界上的顶皆小于f 内部的顶(f 内之顶是 $V(G'-V(G'_k))$中的,都比 k 大),于是 f 内的最大的顶必为坑,不然,有一边以它为尾,此边之头是比尾更大的顶,此头不在 f 内,必在 f 边界上,而 f 上的顶属于G'_k,都不大于k,矛盾.又 G 只有一个坑,所以 f 内部含 $G'-V(G'_k)$的一切顶与边,不然,在 G'_k 的另一个面f'内仍有 $G'-V(G'_k)$的顶,于是同理得知 f'内亦有坑,与坑的唯一性相违,证毕.

由引理1,我们可以把 $G'-V(G'_k)$的顶与边嵌入 G'_k 的外面内.

我们如下地生长一个灌木:把 G_k 的顶按 st 号码放在从第一层到第 v 层的水平线上,再画上边,实现 G_k 的平面嵌入G'_k.再从G'_k 的顶出发不交叉地画出进入 $V(G)-V(G_k)$的一切边.不过这些边的头画在最高层的水平线上,其中两条边有同一个头时,画成两个头,再把这些头标志以 G 中的 st 编码.这时,可能有几个在最高层的顶有相同的号码,它们在 G 中本来是同一个顶.

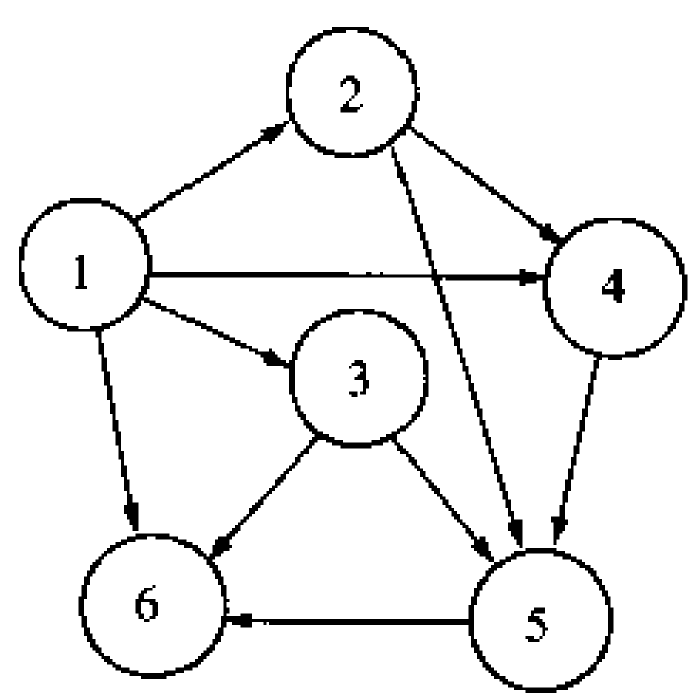


图 1.39

称最高层的顶为虚拟顶,以虚拟顶为头的边叫做虚拟边(见图 1.39,图 1.40).

若 B_k 的 $k+1$ 号虚拟顶连贯地出现在最高层,就把这几个顶重合成一个顶,保持其关联的边不交叉,并把此顶从第 v 层拉下来,放在第 $k+1$ 层上.

再把从 $k+1$ 号顶出发的虚拟边与虚拟顶画好，得灌木 B_{k+1}.这一过程若总能进行，则可得灌木 B_v，即得到了 G 的平面嵌入.

问题在于要有办法解决虚拟顶上同一号码者在第 v 层水平线上不连贯的问题.为此我们讨论图（未必是块）的“元件”概念.

在 $G-v$ 中取一连通片 G_i，$G[V(G_i)\cup\{v\}]$叫做 G 的关于 v 的一个元件.

引理 2 设 v 是 B_k 的割顶，$v>1$，则恰有 B_k 关于 v 的一个元件，含有比 v 小的顶.

证 由 st 码之定义，任取 $u\in V(B_k)$，$1\leqslant u<v$，不妨设 $u>1$，存在 $u_1<u$，$u_1u\in E(B_k)$；存在 $u_2<u_1$，$u_2u_1\in E(B_k)$；…，于是找到了一条从 1 到 u 但不超过 v 的道路.即一切比 v 小的顶在 B_k-v 的同一连通片上，于是 $v>1$ 时，恰有一个元件含比 v 小的顶，证毕.

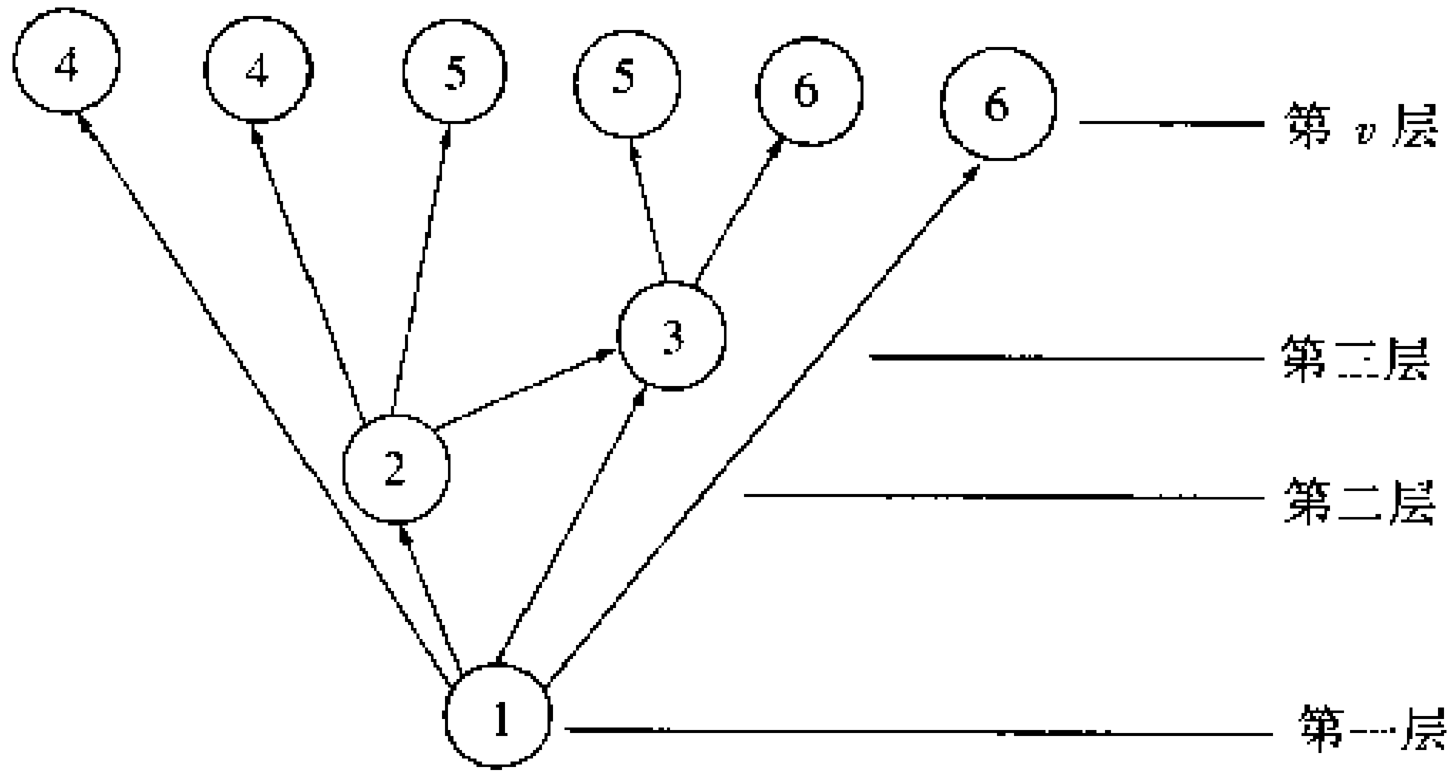


图 1.40

引理 2 的意思是，若 v 是 B_k 的割顶，除去含 1 的那个关于 v 的元件，其它关于 v 的元件，v 都是最小的顶，而这些以 v 为最小（低）的顶的每个元件又是以 v 为根的子灌木，每个子灌木可以以 v 为根翻转 180°（我们约定根在最下方）或者把同根的灌木们位置进行置换，以期 $k+1$ 号虚拟顶在最高层连贯出现（见图 1.41）.

在图 1.41 中，把①与⑧导出的元件和①与⑨导出的元件对

调，再把①④⑤⑧⑨导出的元件翻转 180°，之后以①为根右旋到最右侧，则造成三个⑧连贯出现的现象，最上层的排列为⑨，⑨，⑨，⑧，⑧，⑧，⑨.

引理 3 设 H 是 B_k 的块，$V(H) \supseteq \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$，$y_1, y_2, \cdots, y_m$ 又是 $B_k - E(H)$ 中边之端点，则所有的 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 在 B_k 的每一种平面嵌入形成的灌木 B'_k 都在 H 的平面嵌入 H' 的外面边界上，且顺序相同（可以是顺时针排列也可以是逆时针排列）.

证 设在 B'_k 中，H 的嵌入为 H'，则 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 是 $B'_k - E(H')$ 的边之端点，所以 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 在 H' 的外面边界上是显然的.

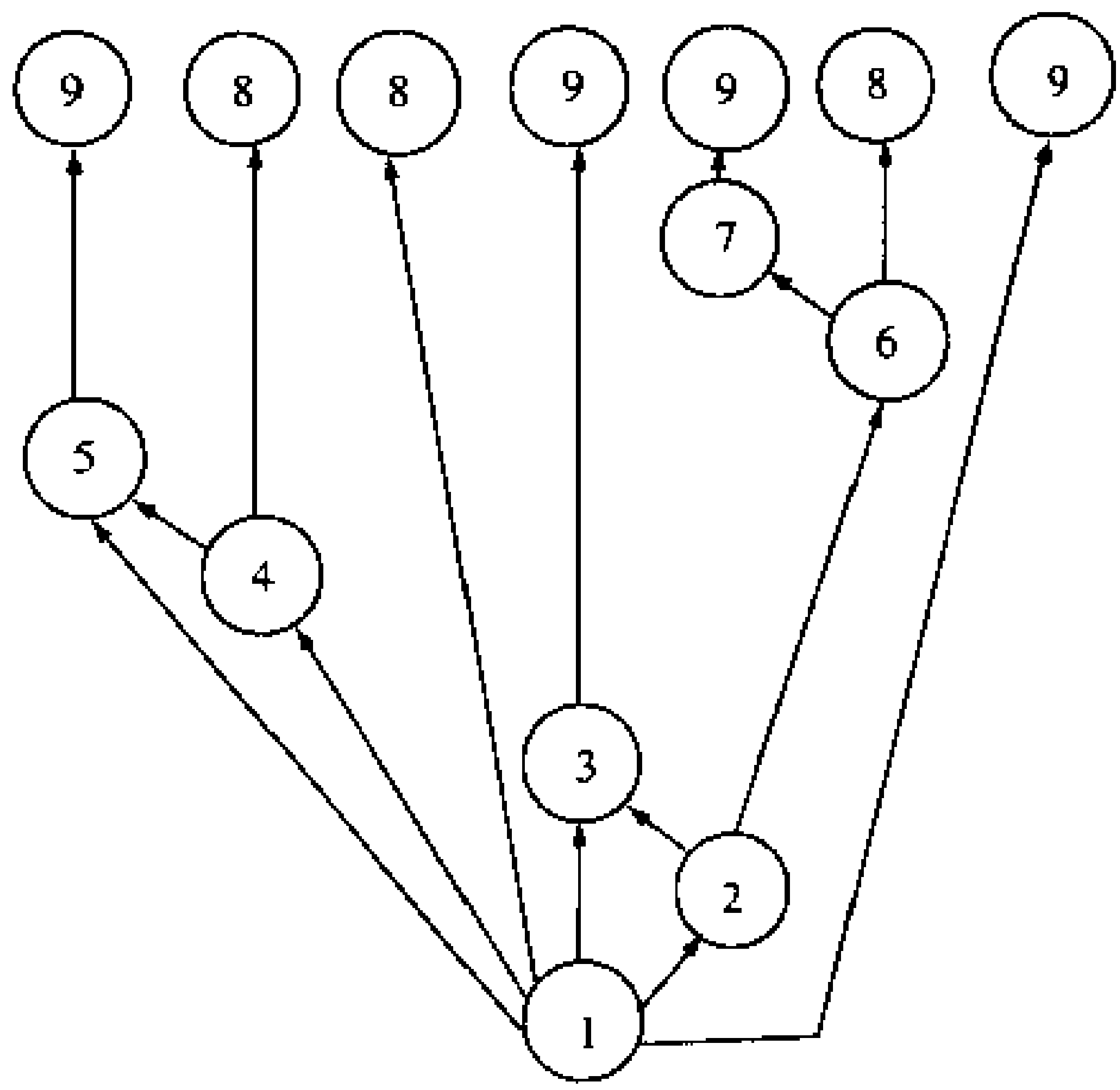


图 1.41

设 B'_k, B''_k 是 G 的两个不同方式画出的灌木，H 是其中的块，H 的平面嵌入分别 H' 与 H''；若 y_i, y_j 在 H' 的外边界上相邻，但在 H'' 外边界上不相邻，则 H'' 外边界上有另外两个顶 y_k, y_l，它

们隔离了 y_i, y_j. 在 H' 中有两条轨 $P_1(y_i, y_j)$ 与 $P_2(y_k, y_l)$，它们无公共顶点，但在 H'' 中这样的两条轨不存在，矛盾. 所以 B_k 的不同嵌入方式不影响 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 在 H 的嵌入中在外边界上的相邻关系，证毕.

定理 10 设 B'_k 与 B''_k 是 G_k 的两个灌木，则存在有限次 B'_k 中元件的翻转与置换，使得 B'_k 变成 B'''_k，且 B'''_k 与 B''_k 中虚拟顶出现的次序一致.

证 对顶数进行数学归纳法证明.

若 B'_k 与 B''_k 只两个顶，命题显然成立.

假设对顶数 $\leqslant p-1$ 的灌木 B'_k 与 B''_k 定理已成立，考虑顶数为 p 的两个灌木，令 $v=1$（根）.

(i)若 v 是 B'_k 与 B''_k 的割顶，我们把关于 v 的元件（子灌木）排列得顺序一致. 由归纳法假设，B'_k 中的每个以 v 为根的子灌木可以通过有限次元件的翻转与置换而使其虚拟顶的排列与 B''_k 的相应子灌木一致，从而定理成立.

(ii)若 v 不是 B'_k 与 B''_k 的割顶，设 H 是含 v 的块，在 B'_k 与 B''_k 中，H 的嵌入分别是 H' 与 H''. 设 $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ 是 H 之顶集的子集，且 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 都是 $E(B'_k)-E(H')$ 中边之端点，由引理 3，$y_1, y_2, \cdots, y_m$ 都出现在 H' 与 H'' 外面边界上. 若绕行顺序相反，则可把 B'_k 翻转使 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 按同一绕行方向在 H' 与 H'' 的外边界上顺序一致，由引理 2，每个 $y_i (i=1,2,\cdots,m)$ 皆是某子灌木的根. 且这些子灌木在 B'_k 与 B''_k 中出现的次序，由引理 3，可以变成一致. 由归纳法假设，每个上述子灌木可以经有限次翻转与置换，使相应的子灌木上的虚拟顶出现的次序一致，进而 B'_k 与 B''_k 的虚拟顶出现的次序一致，证毕.

由引理 1 知，把 G 嵌入平面时，可以把 $G'-V(G'_k)$ 的边与顶嵌在 G'_k 的外面内，所以存在一种 B_k，使得 $k+1$ 号虚拟顶在最高层连贯出现；倘若我们在画灌木 B_k 时，最高层上 $k+1$ 号虚拟顶未能连贯出现，由定理 10，总可以通过元件的翻转与置换，使 k

+1 号虚拟顶在最高层连贯出现,进而得到 $B_{k+1}, B_{k-2}, \cdots, B_y$,最终得到 G'.

习题四

1. 证明:DFS 得到的生成树上,一个团的一切顶必出现在一条有向道路上;它们是否连贯地出现? 论证你的答案.

2. 设 G 是连通图,(a)顶 $u \neq s$ 是割顶的充要条件是当 G 上的 DFS 终止时,存在父子边 uv,不存在返回边 xy,使得 x 是 v 的后代,y 是 u 的祖先.(b)设计一个时间复杂度为 $O(|E|)$的求割顶的算法,且能产生块.

3. C 是有向图上的有向圈,执行 DFS 时,v 是 C 上 $k(v)$最小者,则 v 是 DFS 所得生成林中一个子树之根,且 C 的一切顶皆在此子树上.

4. 设计一个求桥的算法

5. 用顶点添加平面嵌入法论证 Petersen 图是否平面图(图 1.32).

6. 用顶点添加嵌入法把图 1.42 嵌入平面.

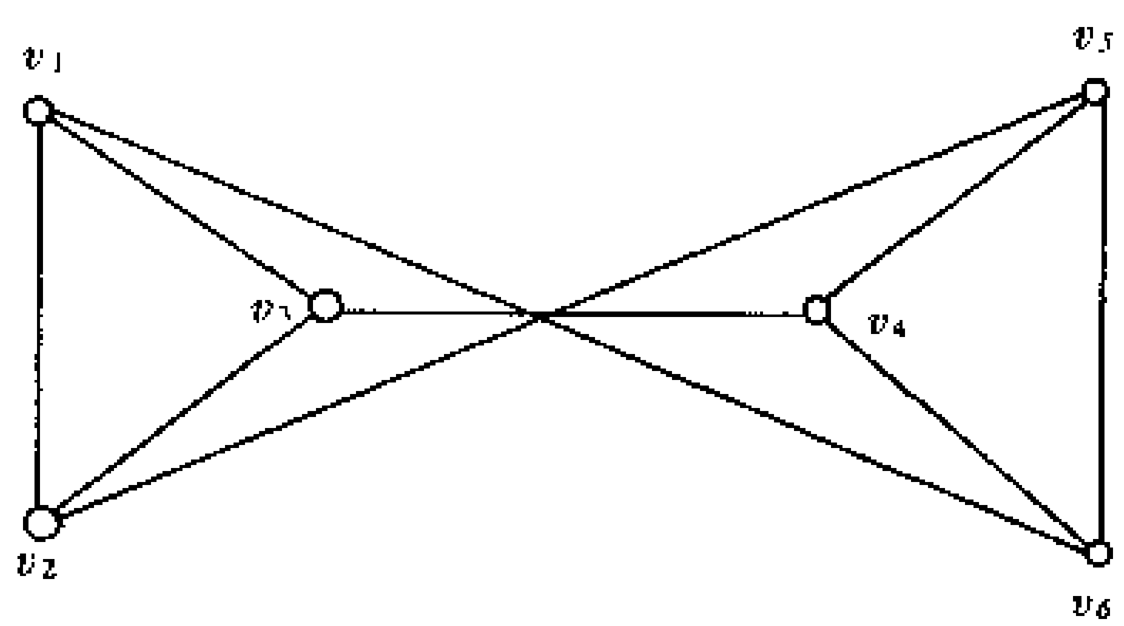


图 1.42

7. 图 1.43 是平面图吗?

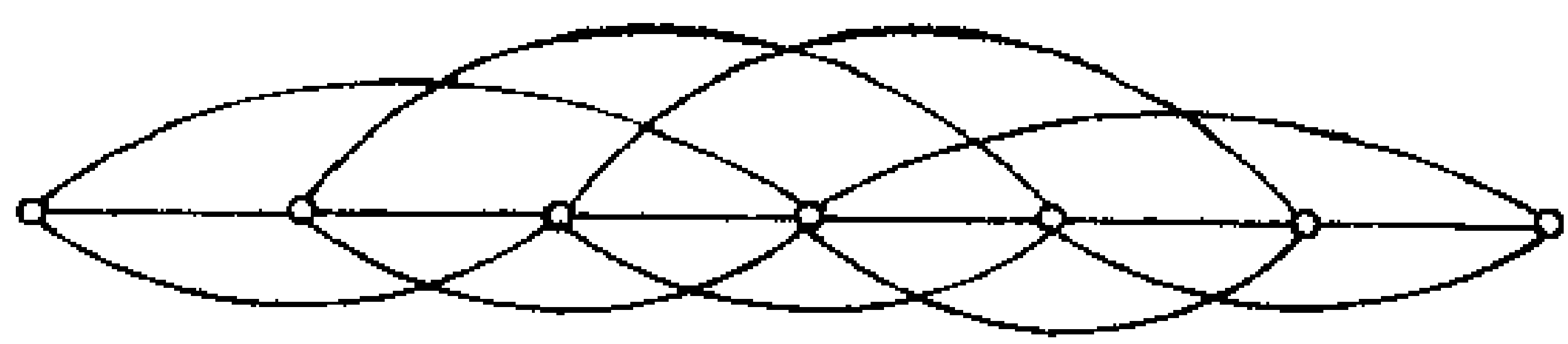


图 1.43

1.10 匹　配

让我们从下面的婚配问题谈起：某团体有若干未婚的姑娘和小伙子，所有的姑娘小伙都到了结婚年龄，如果没有另外的条件限制，为了满足姑娘们的愿望，必备的条件是可供挑选的小伙子至少要和姑娘一样多.但每位姑娘都不会草率处理终身大事，她们往往会排除一些小伙子作为自己可能的配偶，于是实际上存在一张她认为是可以接受的配偶的名单.问：

(1)这个团体里的每个姑娘是否都可以与她认可的小伙子结婚?

这个问题的答案并非总是肯定的，或许有三位姑娘，她们手头的名单都列出两名小伙子，而这三张名单竟然完全一样！既然并非永远可行，那么再问：

(2)在什么条件下，可以满足每位姑娘的心愿?

当姑娘们的名单有矛盾时，则应考虑：

(3)最多几位姑娘可以如愿?

(4)如何匹配，才会使婚后这个团体里的家庭最为美满?

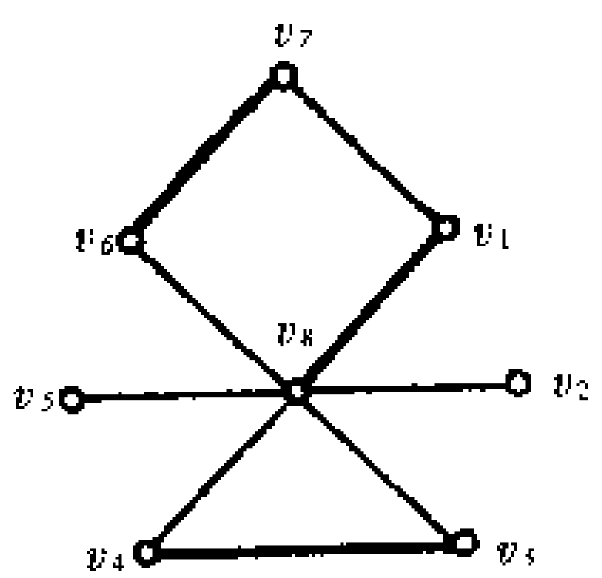
提请读者注意，这里讲的不是游戏或笑话，事实上，许多重要的实际问题，其数学模型与上述婚配问题的数学模型是一样的，为了解决诸如此类的问题，图论中建立了一套数学理论和有效算法，这些正是本章讨论的内容.

1.10.1 匹配理论

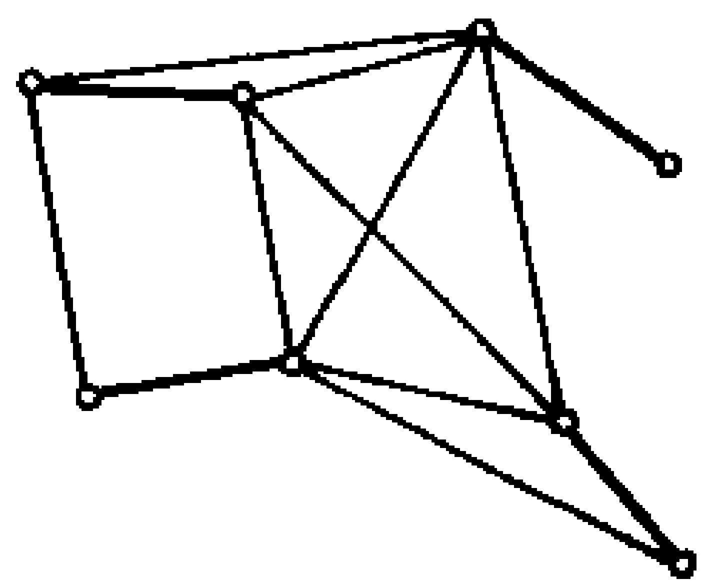
定义 1 $M\subseteq E(G)$，$\forall e_i,e_j\in M$，e_i,e_j 不相邻，则称 M 是图

G 的一个匹配；M 中一边的两端点称为在 M 中相配；M 中边的每个端点称为被 M 许配. G 中每个顶皆被 M 许配时，M 称为完备匹配；G 中已无匹配 M'，使得 $|M'| > |M|$，则称 M 是 G 的最大匹配. □

图 1.44(a)中的粗实线表示的边子集是一个最大匹配；(b)中粗实线表示的边子集是一个完备匹配.



(a)



(b)

图 1.44

例 1 Bernoulli-Euler 错放信笺问题.

某人给六位朋友各写一信，准备了六个写有收信人地址姓名的信封，问有多少种投放信笺的可能，使每封信的信笺与信封皆不符？

解 设信笺为 x_i，信封为 y_i，$i = 1, 2, \cdots, 6$，x_i 与 y_i 是相符的. 于是问题化为求图 1.45 中有多少种完备匹配，把这个未知数记成 $\varphi(6)$.

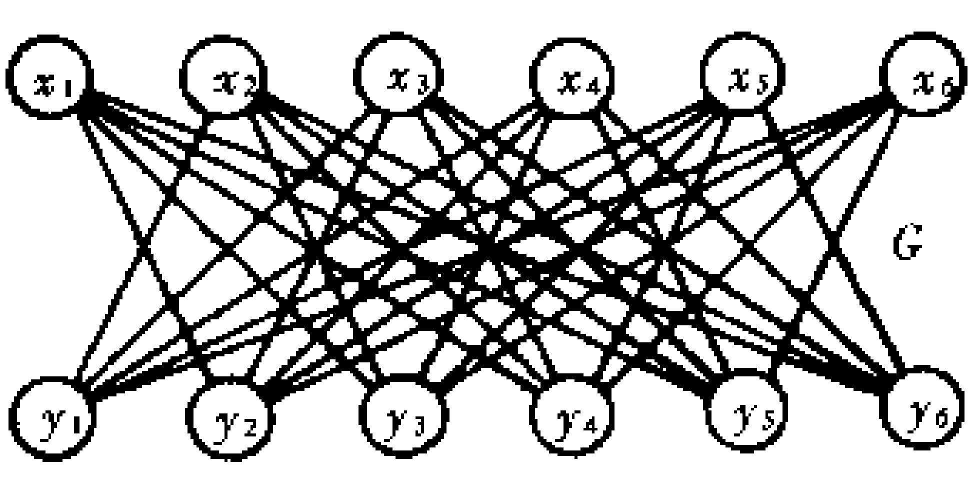


图 1.45

x_1 与 y_2 相配时，完备匹配的个数等于从图 G 中删除 x_1 与 y_2 后所得的图 $G_{x_1y_2}$ 中完备匹配的个数，这个数记成 $\psi(5)$. 在 $G_{x_1y_2}$ 中，若 x_2 与 y_1 相配，则 $\psi(5)=\varphi(4)$，若 x_2 不与 y_1 相配，则 $\psi(5)=\varphi(5)$. 于是，G 中 x_1 与 y_2 相配时，可得 $\varphi(5)+\varphi(4)$ 个完备匹配；同理，x_1 与 $y_j(3\leqslant j\leqslant 6)$ 相配时，亦有 $\varphi(5)+\varphi(4)$ 个完备匹配，故 $\varphi(6)=5[\varphi(5)+\varphi(4)]$，同理可得 $\varphi(5)=4[\varphi(4)+\varphi(3)]$，$\varphi(4)=3[\varphi(3)+\varphi(2)]$，$\varphi(3)=2[\varphi(2)+\varphi(1)]$，$\varphi(2)=1$，$\varphi(1)=0$，故可算出 $\varphi(6)=256$，即有 256 种错放的可能.

一般而言，有关于 n 封信皆插错信笺的可能方式 $\varphi(n)$ 的递推公式($n\geqslant 3$)

$$\varphi(n)=(n-1)[\varphi(n-1)+\varphi(n-2)],\varphi(2)=1,\varphi(1)=0.$$

定义 2 M 是图 G 上的匹配，G 中有一轨，其边交替在 $E-M$ 与 M 中出现，则称此轨为 G 中 M 的交错轨. 若 M 的交错轨的起止顶皆未被 M 许配，则称此轨为 M 的可增广轨. □

如果把可增广轨上不属 M 的边调入 M 中，把轨上原属 M 的边从 M 中删除，则 M 可增加一条边.

规定 $A\ominus B=(A\cup B)-(A\cap B)$，称为集合 A 与 B 的对称差；显然 $A\ominus B=B\ominus A$，$\ominus$ 有时写成 $\oplus$.

定理 1(Berge,1957) M 是图 G 的最大匹配的充要条件是：G 中无 M 的可增广轨.

证 设 M 是 G 的最大匹配，但 G 中有 M 的可增广轨，则可以把 M 的边数增加 1，与 M 是最大匹配矛盾，故这时 G 中无 M 的可增广轨.

下证充分性，已知 G 中不含 M 的可增广轨，欲证 M 是 G 的最大匹配. 若 M 不是最大匹配，则 G 中有另一匹配 M'，$|M'|>|M|$；令

$$H=G[M\ominus M'],$$

则子图 H 中顶的次数非 1 则 2，因为 H 的顶至多与 M 的一条边和 M' 的一条边相关联，又不会有零次数，故 H 的连通片，或是 M

与M'的边交错出现的一个偶圈，或是 M 与M'的边交错出现的一条轨；又因$|M'|>|M|$，故 H 中的边M'中的比M 中的多，所以，必有 H 的某个连通片是轨，且此轨以 M'中的边为起止边，于是得到了 M 的可增广轨，与 G 中无M 的可增广轨矛盾，证毕.

定义 3 $A\subseteq V(G)$，$V(G)$中与 A 中顶相邻的顶所成的集合记成 $N(A)$，称为 A 的邻集.□

定理 2(Hall，1935) G 是二分图，顶集划分成 X 与 Y，G 中存在把 X 中顶皆许配的匹配之充要条件是，对一切 $S\subseteq X$，$|N(S)|\geqslant|S|$.

证

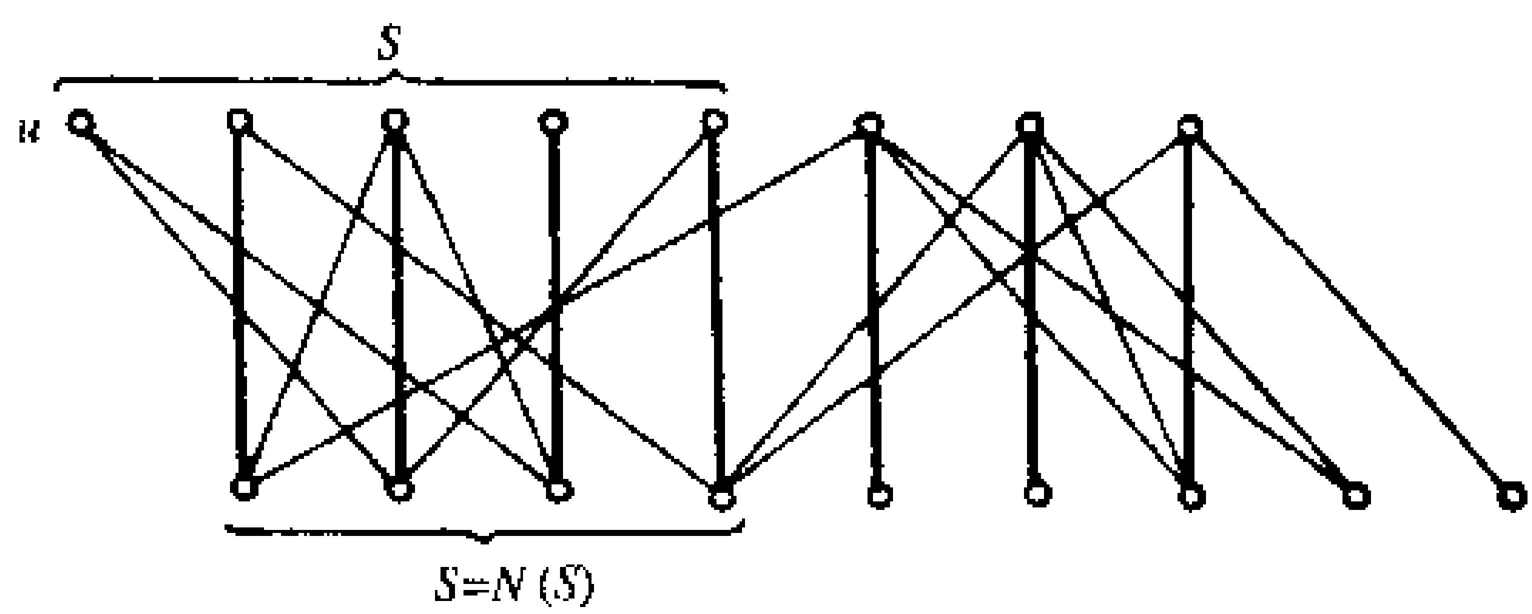


图 1.46

设 G 中含把X 中每顶皆许配的匹配M，且令 S 是X 的子集，则 S 中各顶亦被许配，故$|N(S)|\geqslant|S|$.

反之，若一切 $S\subseteq X$，有$|N(S)|\geqslant|S|$，但 G 中无把X 中顶皆许配的匹配；设 M^* 是 G 的一个最大匹配，M^* 也不能把 X 中顶皆许配，令 u 是一个 X 中的未被M^* 许配的顶(见图 1.46)，又令 Z 是被M^*的交错轨与 u 相连通的顶点集合；因 M^* 是最大匹配，由 Berge 定理 1，u 是Z 中仅有的未被M^*许配的顶.取

$$S=Z\cap X,T=Z\cap Y,$$

显然，$S-\{u\}$中的顶在 M^*中与 T 中顶相配，于是，

$$|T|=|S|-1,N(S)=T,$$

故得

$$|S|=|N(S)|+1,$$

与$|N(S)|\geqslant|S|$相违，证毕.

推论 1 G 是k 次正则二分图(即每顶皆 k 次)，$k>0$，则 G 有完备匹配.

证 设 G 之顶集二分图划分为 X 与 Y，则 $k|X|=\varepsilon=k|Y|$，$k>0$，故$|X|=|Y|$. 令 S 是X 中的非空子集，E_1 与 E_2 分别表示与 S 及$N(S)$中顶相关联的边集，由 $N(S)$定义，$E_1\subseteq E_2$，故

$$k|N(S)|=|E_2|\geqslant|E_1|=k|S|,$$

于是$|N(S)|\geqslant|S|$，由 Hall 定理 2，G 中有把X 中顶皆许配的匹配M，又因$|X|=|Y|$，故 M 是完备匹配，证毕.

定义 4 $K\subset V(G)$，且 G 的每条边至少一个端点属于K，则称 K 是图G 的一个覆盖. 若 K 是一个覆盖，$\forall v\in K$，$K-\{v\}$不是 G 的覆盖，则称 K 是一个极小覆盖. 若 K 是覆盖，但无覆盖 K'，使得$|K'|<|K|$，则称 K 是最小覆盖. 用 $\alpha(G)$表示 G 中最小覆盖之顶数，$\alpha(G)$称为 G 之覆盖数. □

定理 3(König，1931) 在二分图中，若 M^*是最大匹配，$\overline{K}$ 是最小覆盖，则$|M^*|=|\overline{K}|=\alpha(G)$.

证 设 M^*是二分图 G 中的最大匹配，$V(G)$的二分图划分为 X 与 Y，若 M^*把 X 中的一切顶皆许配，则$|M^*|=|X|$，这时，X 显然是一个最小覆盖，故$|M^*|=\alpha(G)$.

若存在未被 M^*许配的顶，令 U 是X 中未被M^*许配的顶之集合(见图 1.47)，Z 是由 M^*的交错轨与 U 顶相连通的顶之集合，且令 $S=Z\cap X$，$T=Z\cap Y$，则 $N(S)=T$. 又令 $\overline{K}=(X-S)\cup T$，则 G 的每边至少一端在$\overline{K}$ 中，不然，将会有一边，一端在 S 中，另一端在 $Y-T$ 中，与此 $N(S)=T$ 矛盾，故 $\overline{K}$ 是G 的覆盖，且显然有$|M^*|=|\overline{K}|$. 而任一匹配 M，都有$|M|\leqslant\alpha(G)$，故$|M^*|\leqslant\alpha(G)$，于是$|\overline{K}|\leqslant\alpha(G)$，即 $\overline{K}$ 是最小覆盖，证毕.

定理 4(Tutte，1947) 图 G 有完备匹配的充要条件是对一切 $S\subset V(G)$，$o(G-S)\leqslant|S|$，其中 $o(G-S)$表示图 $G-S$ 的奇数个顶连通片的个数.

证 设单图 G 有完备匹配 M, $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 是 $G-S$ 的奇数个顶的连通片(下称奇片), $n \geqslant 0$. 显然, 当 $S=\varnothing$, $o(G-S)=0$, 即 $n=0$, 所以不妨设 $S \neq \varnothing$. 因 G_i 是奇片, $i=1,2,\cdots,n$, G_i 中的某个顶 u_i 必被 M 许配于 S 的一个顶 v_i, 因而 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subseteq S$, $o(G-S)=|\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}| \leqslant |S|$.

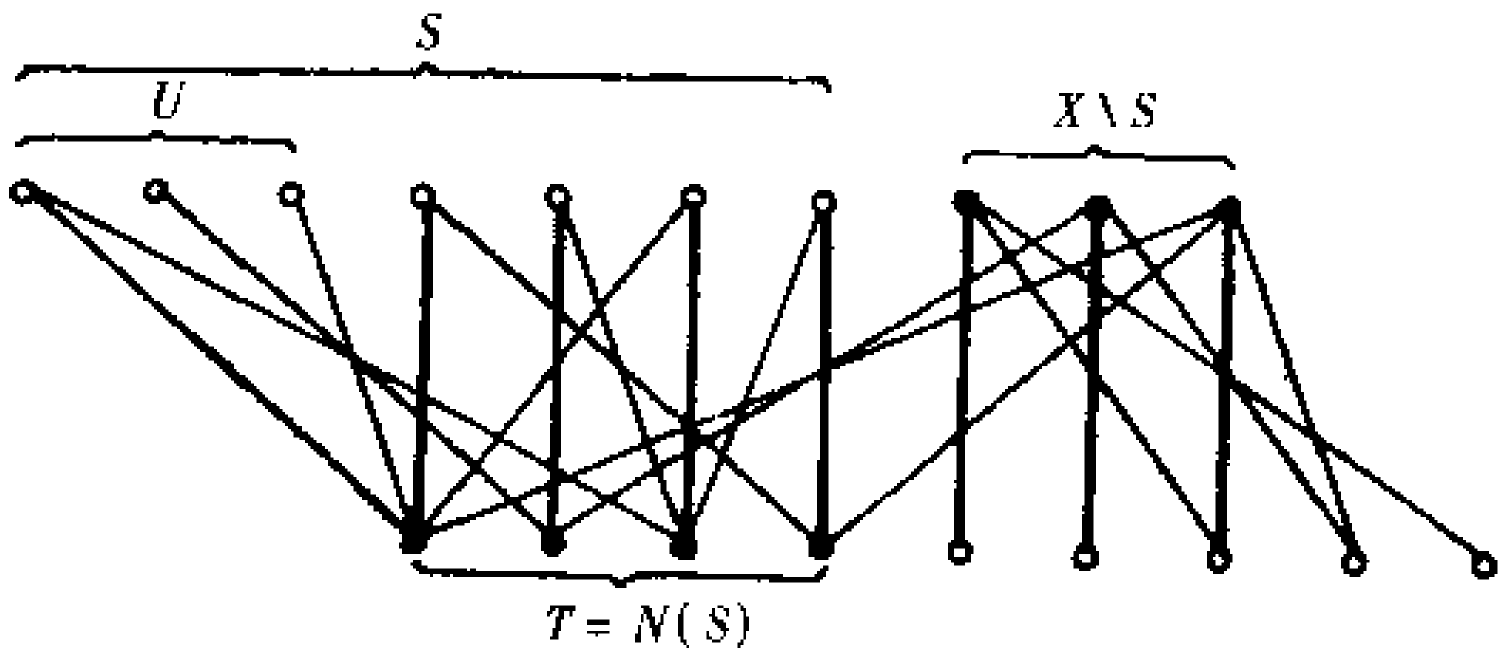


图 1.47

反之, 若对一切 $S \subset V(G)$, $o(G-S) \leqslant |S|$, 但 G 中无完备匹配, 则 G 是一个没有完备匹配而有最多边的图 G^* 的生成子图. 因 $G-S$ 是 G^*-S 的生成子图, 故 $o(G^*-S) \leqslant o(G-S)$, 于是 $o(G^*-S) \leqslant |S|$. 特别地, 取 $S=\varnothing$, $o(G^*)=0$, 即 $\upsilon(G^*)$ 是偶数.

用 U 表示 G^* 是 $\upsilon-1$ 次顶的集合, 由 G^* 之定义, $U \neq \varnothing$. 若 $U=V(G)$, G^* 中有完备匹配, 可见 U 是 $V(G)$ 的真子集. 下面证明 G^*-U 是不相交的完全图之并. 不然, G^*-U 的某个连通片不是完全图, 在该连通片中, 存在顶 x, y, z, 使得 $xy, yz \in E(G^*)$, 而 $xz \notin E(G^*)$. 又 $y \notin U$, 存在 $w \in V(G^*-U)$, 使得 $yw \notin E(G^*)$. 因为 G^* 是没有完备匹配的 $|V(G)|$ 个顶的边数最多的图, 对一切 $e \notin E(G^*)$, G^*+e 中有完备匹配. 令 M_1 与 M_2 分别是 G^*+xz 与 G^*+yw 的完备匹配, 令 H 为 $M_1 \ominus M_2$ 在 $G^*+xz+yw$ 中的导出子图, 则 H 每顶皆 2 次, H 是不相交的偶圈之并, 图 1.48 粗实线是 M_1 上的边, 波纹线是 M_2 中的边.

情形1 xz 与 yw 在 H 的不同连通片中.若 yw 在 H 的圈 C 上,那么 M_1 在 C 上的边与 M_2 不在 C 上的边构成 G^* 的一个完备匹配,与 G^* 的定义矛盾,见图 1.48.

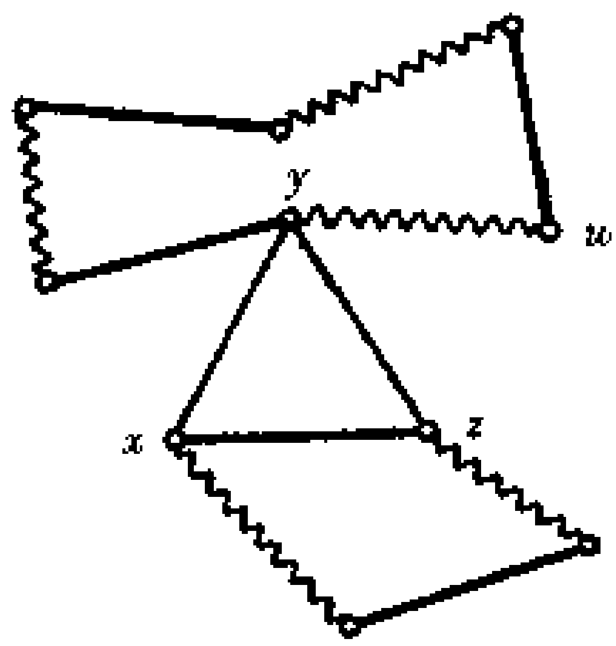


图 1.48

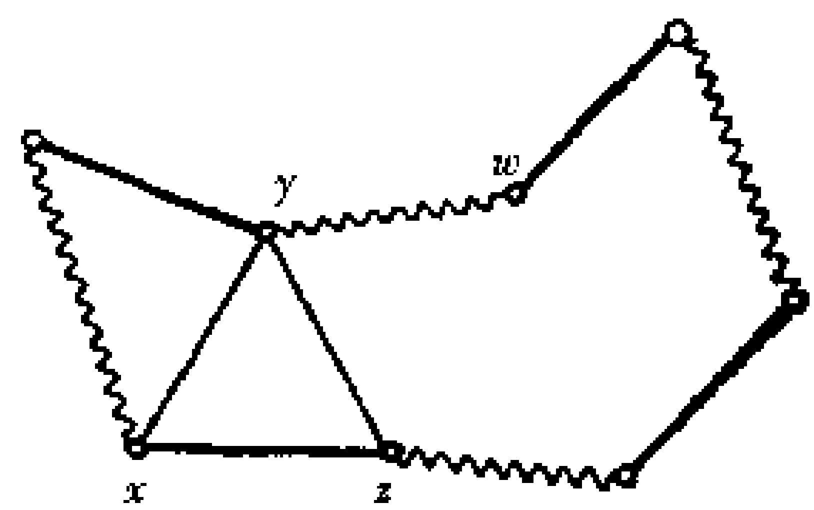


图 1.49

情形2 xz 与 yw 在 H 的同一个圈 C 上,见图 1.49,这时 C 上 $yw\cdots z$ 部分 M_1 的边与 yz 及 M_2 不在 $yw\cdots z$ 部分的边构成 G^* 的一个完备匹配,矛盾.

综上所述,知 G^*-U 是不相交的完全图之并.

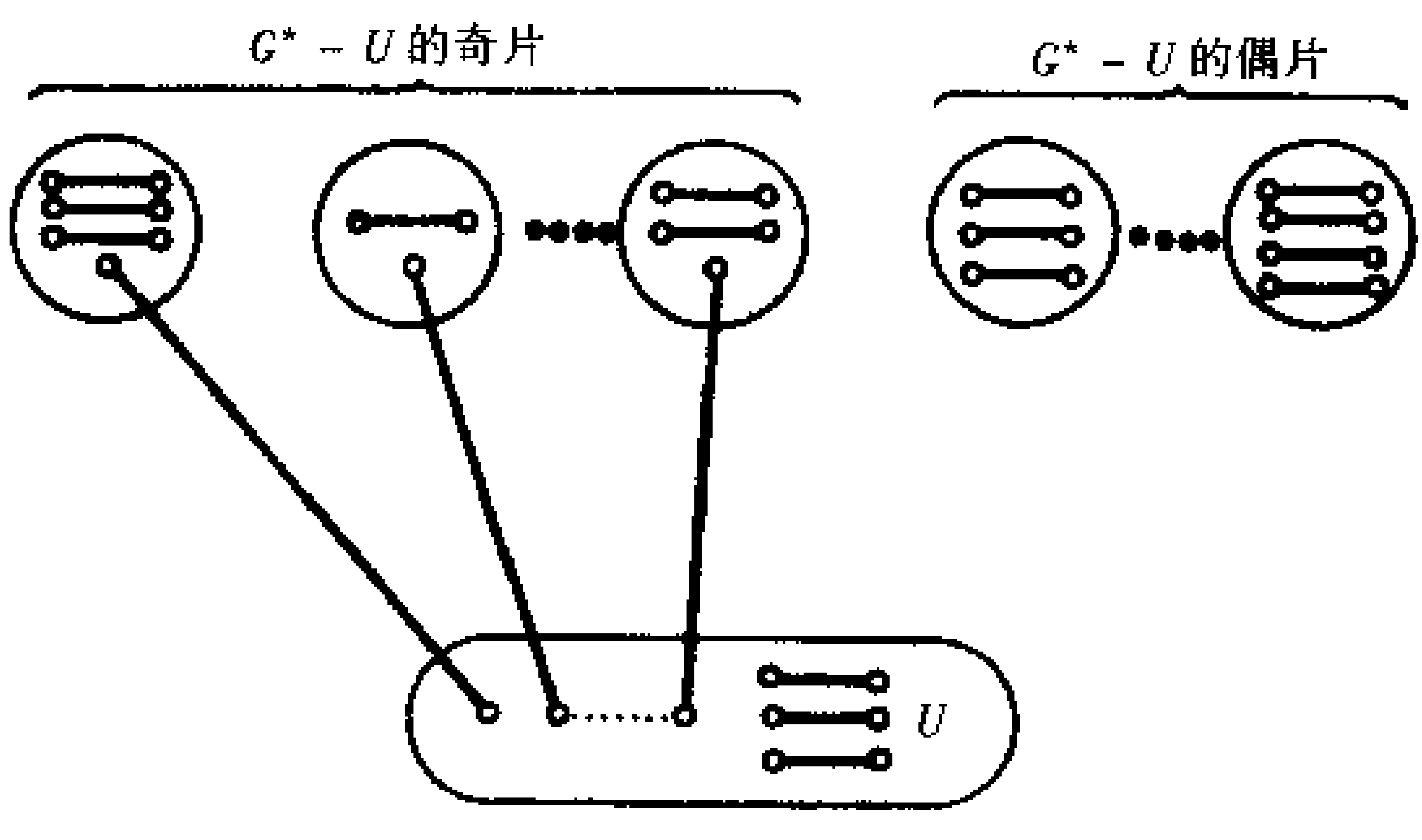


图 1.50

由 $o(G^*-U)\leqslant|U|$,G^*-U 中的奇片至多 $|U|$ 个,但 G^* 中有了完备匹配,见图 1.50,把 G^*-U 的每个奇片中的一个顶

许配给 U 的一个顶，U 中其余的顶两两相配，$G^* - U$ 中的每个偶片中的顶两两相配，这与 G^* 本无完备匹配矛盾，证毕.

推论 1 每个无桥三次正则图有完备匹配.

证 令 G 是三次正则无桥图，S 是 $V(G)$ 的真子集，$G_1, G_2, \cdots, G_n$ 是 $G - S$ 的奇片，m_i 是一个端点在 G_i 中，另一个端点在 S 中的边之条数，$1 \leqslant i \leqslant n$. 因 $d(v) = 3(v \in V(G))$，则

$$\sum_{v \in V(G_i)} d(v) = 3\upsilon(G_i), i = 1,2,\cdots,n; \sum_{v \in S} d(v) = 3|S|,$$

于是

$$m_i = \sum_{v \in V(G_i)} d(v) - 2\varepsilon(G_i) = 3\upsilon(G_i) - 2\varepsilon(G_i),$$

可见 m_i 是奇数，又 G 无桥，故 $m_i \geqslant 3, 1 \leqslant i \leqslant n$，从而

$$o(G - S) = n \leqslant \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} m_i \leqslant \frac{1}{3} \sum_{v \in S} d(v) = |S|,$$

由 Tutte 定理，G 中有完备匹配，证毕.

由 Tutte 定理知，妖怪无完备匹配.

对于图 1.51，取 $S = \{v\}$，则有 $3 = o(G - S) > |S| = 1$，由

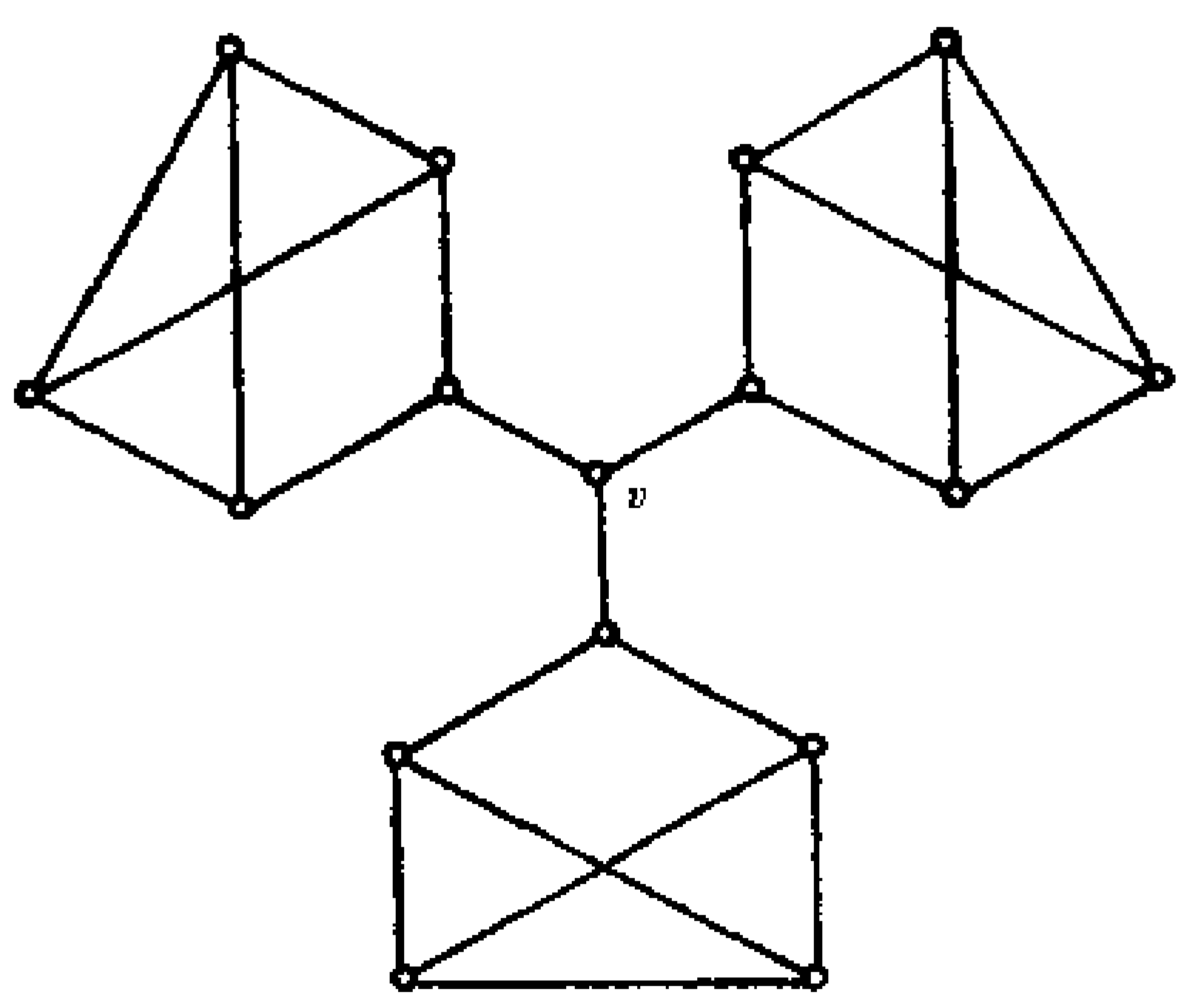


图 1.51

Tutte 定理,此图无完备匹配.

1.10.2 二分图中最大匹配与最佳匹配的算法

1)匈牙利算法

实际模型:某公司有职员 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,他们去做工作 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,每人适合做其中一项或几项工作,问能否每人都分配一项适合的工作?

数学模型:G 是二分图,$V(G)=X\cup Y$,$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$,当且仅当 x_i 适合干工作 y_j 时,$x_iy_j\in E(G)$,问 G 中是否有完备匹配?

1965 年匈牙利数学家 Edmonds 提出上述问题的有效算法,且以他的祖国命名此算法.

HUNGARIAN **算法**:

(0)从 G 中取一初始匹配 M.

(1)若 M 已把 X 中顶皆许配,止,M 即完备匹配;否则,取 X 中未被 M 许配的顶 u,记 $S=\{u\}$,$T=\emptyset$.

(2)若 $N(S)=T$,止,无完备匹配;否则取 $y\in N(S)-T$.

(3)若 y 被 M 许配,设 $yz\in M$,$S\leftarrow S\cup\{y\}$,$T\leftarrow T\cup\{y\}$,转(2);否则,取可增广轨 $P(u,y)$,令 $M\leftarrow M\ominus E(P)$,转(1).□

上述算法的思路是把初始匹配通过可增广轨逐次增广,以至得到最大匹配.

图 1.52 中粗实线是二分图 G 中的初始匹配 M.

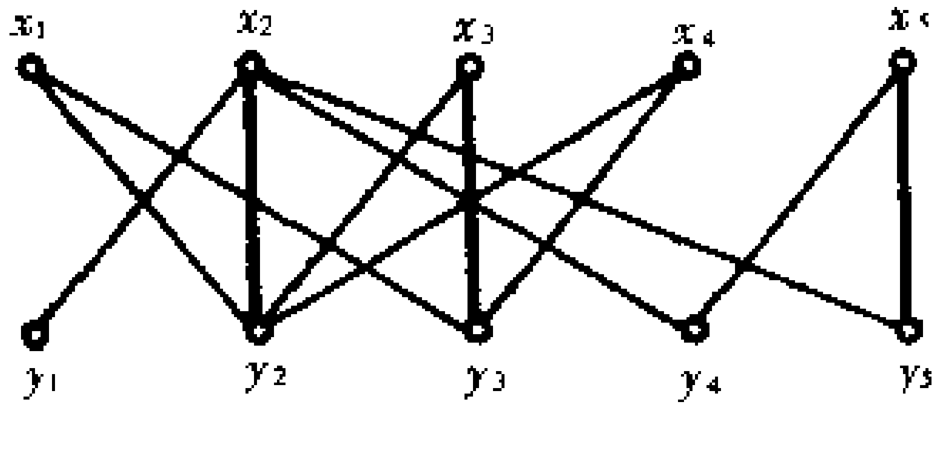


图 1.52

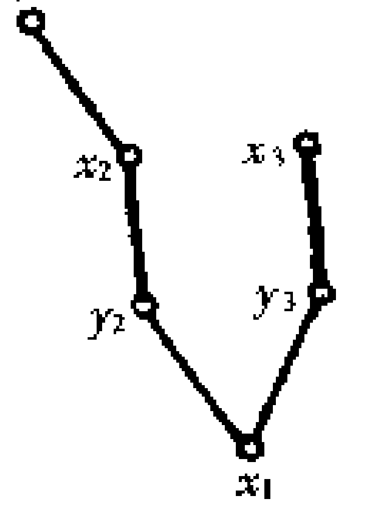


图 1.53

$M=\{x_2y_2, x_3y_3, x_5y_5\}$，图 1.53 是以未被 M 许配的顶 x_1 为根生长的“交错树”，即从 x_1 起，每轨皆 M 的交错轨，从中发现 $x_1y_2x_2y_1$ 是 M 可增广轨，于是把 M 增广成图 1.54 中的粗实线所示的较大匹配 M_1.

$M_1=\{x_1y_2, x_2y_1, x_3y_3, x_5y_5\}$. 图 1.55 是以未被 M_1 许配的顶 x_4 为根生长的交错树，树叶皆被 M_1 许配，可见已无 M_1 可增广轨，M_1 是 G 中最大匹配，G 中无完备匹配.

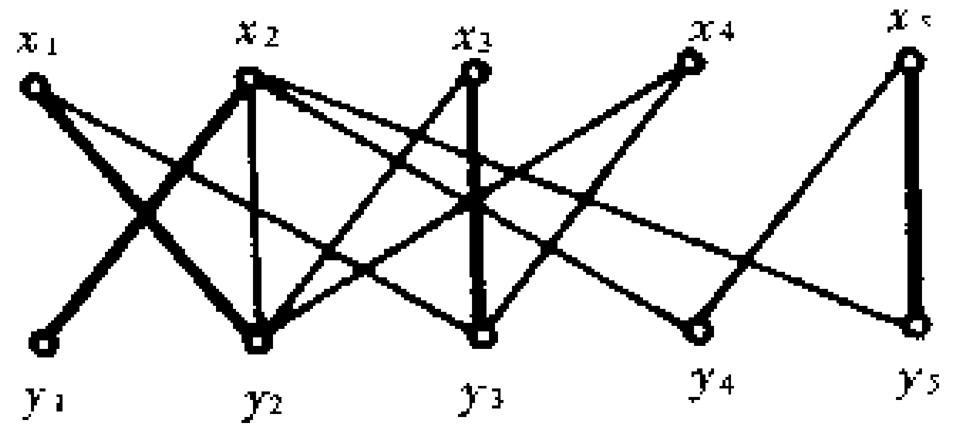


图 1.54

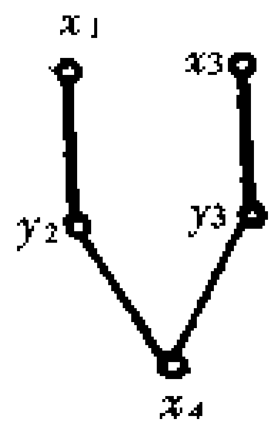


图 1.55

2) Kuhn－Munkras 算法

实际模型：在 1）的分工问题当中，职员们做各项工作，效益未必一致，需要制定一个分工方案，使人尽其才，公司的总效益最大.

数学模型：G 是加权完全二分图，$V(G)$ 的二分图划分为 X 与 Y，$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，权 $w(x_iy_j)\geqslant 0$ 是职员 x_i 做工作 y_j 的效益，求总权最大的完备匹配（这种匹配称为最佳匹配）.

若用穷举法，需要对 $n!$ 个完备匹配进行比较，不可行.

定义 5 映射 $l: V(G)\to \mathbf{R}$，满足 $\forall x\in X, y\in Y$，

$$l(x)+l(y)\geqslant w(xy),$$

则称 $l(v)$ 是完全二分图 G 的可行顶标；令

$$E_l=\{xy \mid xy\in E(G), l(x)+l(y)=w(xy)\},$$

称以 E_l 为边集的 G 之生成子图为相等子图，记之为 G_l. □

可行顶标是存在的，例如

$$\begin{cases} l(x)=\max\limits_{y\in Y} w(xy), x\in X; \\ l(y)=0, y\in Y. \end{cases}$$

定理 5 G_l 的完备匹配即 G 的最佳匹配.

证 设 M^* 是 G_l 的一个完备匹配,因 G_l 是 G 的生成子图,故 M^* 也是 G 的完备匹配. M^* 中的边之端点集合含 G 的每个顶点恰一次,所以

$$W(M^*)=\sum_{e\in M^*} w(e)=\sum_{v\in V(G)} l(v).$$

另一方面,若 M 是 G 中任一完备匹配,则

$$W(M)=\sum_{e\in M} w(e)\leqslant\sum_{e\in V(G)} l(v),$$

所以 $W(M^*)\geqslant W(M)$,即 M^* 是 G 的最佳匹配,证毕.

定理 5 告知,欲求完全二分图的最佳匹配,只需用匈牙利算法求其相等子图的完备匹配;问题是,G_l 无完备匹配时怎么办? 1957 年,Kuhn 和 Munkras 给出了一个解决该问题的有效算法,用逐次修改顶标 $l(v)$的办法使相应的相等子图之最大匹配逐次增广,最后出现完备匹配.

KUHN - MUNKRAS **算法**:

(0)选定初始的可行顶标 l,确定 G_l,在 G_l 中选一初始匹配 M.

(1)X 中顶皆被 M 许配,止,M 即为最佳匹配;否则,取 G_l 中未被 M 许配的顶 u,令 $S=\{u\}$, $T=\varnothing$.

(2)若 $N_{G_l}(S)\supset T$,转(3);若 $N_{G_l}(S)=T$,取

$$\alpha_l=\min_{x\in S, y\notin T}\{l(x)+l(y)-w(xy)\},$$

$$\hat{l}(v)=\begin{cases} l(v)-\alpha_l, v\in S; \\ l(v)+\alpha_l, v\in T; \\ l(v), \quad\quad 其它. \end{cases}$$

$l\leftarrow\hat{l}$, $G_l\leftarrow G_{\hat{l}}$.

(3)选 $N_{G_l}(S)-T$ 中一顶 y,若 y 已被 M 许配,且 $yz\in M$,

则 $S\leftarrow S\cup\{z\}$，$T\leftarrow T\cup\{y\}$，转(2)；否则，取 G_l 中的一个 M 可增广轨 $P(u,y)$，令 $M\leftarrow M\ominus E(P)$，转(1). □

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{1}$$

例 2 $K_{5,5}$的权矩阵为(1)，其中 $X=\{x_i\}$，$Y=\{y_i\}$，$i=1,2,\cdots,5$，求此 $K_{5,5}$上的最佳匹配.

解 (1)取可行顶标 $l(v)$如下：

$l(y_i)=0$，$i=1,2,\cdots,5$；

$l(x_1)=\max\{3,5,5,4,1\}=5$，$l(x_2)=\max\{2,2,0,2,2\}=2$，

$l(x_3)=\max\{2,4,4,1,0\}=4$，$l(x_4)=\max\{0,1,1,0,0\}=1$，

$l(x_5)=\max\{1,2,1,3,3\}=3$.

(2)取 G_l 及其上匹配(粗实线)如图 1.56. $o(G-x_2)=3$，由 Tutte 定理，G_l 中无完备匹配，需修改顶标.

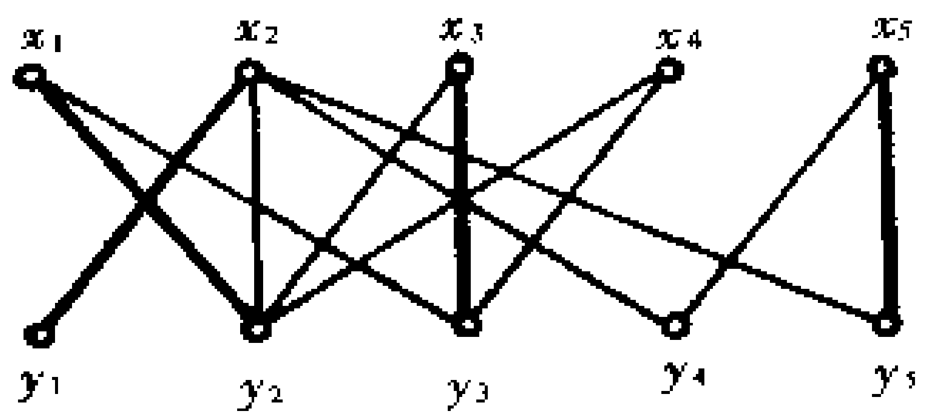


图 1.56

(3) $u=x_4$，得 $S=\{x_4,x_3,x_1\}$，$T=\{y_3,y_2\}$，$N_{G_l}(S)=T$，于是

$$\alpha_l=\min_{x\in S,y\notin T}\{l(x)+l(y)-w(xy)\}=1,$$

把 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 的顶标分别改成 4,2,3,0,3；y_1,y_2,y_3,y_4,y_5 的顶标分别改成 0,1,1,0,0.

(4)用修改后的顶标 $\bar{l}$ 得 $G_{\bar{l}}$ 以及其上的一个完备匹配(粗实线)如图 1.57. 此匹配即 $K_{5,5}$中的最佳匹配，其总权为 $2+4+1+4+3=14$.

我们发现：$\alpha_l>0$；修改后的顶标仍是可行顶标；G_l 中仍含 G_l 中的那个匹配 M；G_l 中至少出现一条不属于 M 的边，所以会造成 M 的逐渐增广. 这些事实的证明留给感兴趣的读者.

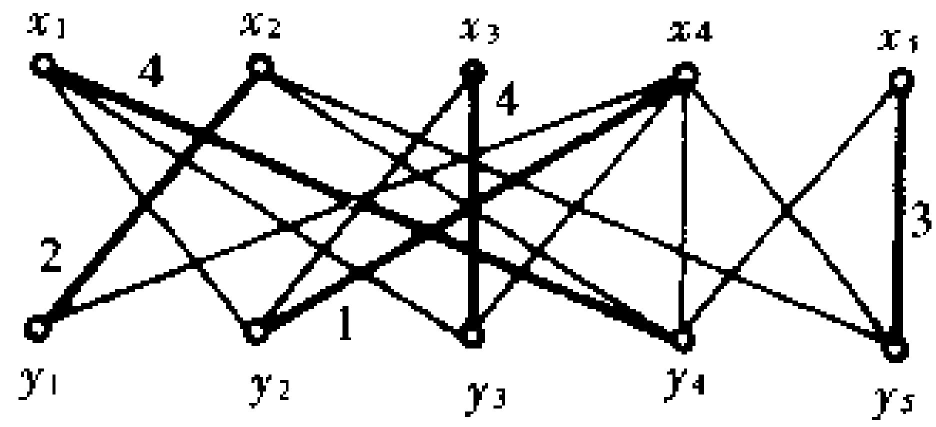


图 1.57

习题五

1. 求 K_{2n} 与 $K_{n,n}$ 中不同的完备匹配的个数.

2. 证明树至多一个完备匹配.

3. 对于 $k>1$，给出没有完备匹配的 k 次正则图的例子.

4. 两人在图 G 上博奕：交替选取不相同的顶点 $v_0, v_1, v_2, \cdots$，使得 $i>0$ 时，v_i 与 v_{i-1} 相邻，直到不能选到顶为止，谁最后选得一顶谁赢. 证明：第一个选顶人有必胜策略的充要条件是 G 中无完备匹配，并叙述一个必胜策略.

5. G 的 k 次因子是指 G 的一个 k 次正则生成子图. G 的 k 次因子分解是指把 G 表成无公共边的 k 次因子之并，即 $G=\bigcup_{i=1}^{n} H_i$，其中 H_i，$1\leqslant i\leqslant n$，是 G 的 k 次因子；证明：

(1) $K_{n,n}$ 与 K_{2n} 是可 1 次因子分解的.

(2) Petersen 图是不可 1 次因子分解的.

6. K_{2n+1} $(n\geqslant 1)$ 可以表成 n 个连通的 2 次因子之并.

7. 证明：8×8 的正方形删去对角线端点处两个 1×1 的小正方形后，不能用 1×2 的长方形单层遮盖.

8. 证明：二分图有完备匹配的充要条件是对任何 $S\subseteq V$，

$|N(S)|\geqslant|S|$.这一命题对一般图是否成立?

9. 对 $k>0$,证明:

(1)每个 k 次正则 2 分图是可以 1 次因子分解的.

(2)每个 $2k$ 次正则图可以 2 次因子分解.

10. 城中每位姑娘都"结识"k 位小伙子($k>1$),每位小伙子都结识 k 位姑娘,则每个小伙子和每位姑娘都能与其结识的人结婚.

11. 矩阵的一行或一列称为矩阵的一条线,证明:0-1 矩阵中含矩阵中所有 1 的线集合的最小阶数等于没有两个在同一线上的 1 最大个数.

12. $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $a_{ij}\in\{0,1\}$, $m\leqslant n$,且 A 的每一行都有 k 个 1,而每列中 1 的个数不超过 1,则 $A=P_1+P_2+\cdots P_k$,其中 P_i 也是 0-1 $m\times n$ 矩阵,其每行恰有 1 个 1,每列中 1 的个数不超过 1 个.

13. G 是顶集划分成 X 与 Y 的二分图,则 G 的最大匹配之边数等于 $|X|-\max\limits_{S\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}$

14. 由 König 定理推导出 Hall 定理.

15. 由 Tutte 定理推导出 Hall 定理.

16. 证明:树 T 有完备匹配的充要条件是 $\forall v\in V(T)$, $o(T-v)=1$

17. 甲乙二人玩"捉乌龟"游戏,先把 54 张扑克牌藏起一张,剩下的有一张没对儿,它就叫做乌龟.再把牌分给两人,每人把手中的对子抛出来,你能判定乌龟在谁手中吗? 为什么?

18. a,b,c,d,e,f 六个人组成检查团,检查五个单位的工作.若某单位和检查团中某成员有过工作联系,则不许他到该单位检查工作,已知第一单位与 b,c,d 有过联系,第二单位与 a,e,f 有过联系,第三单位与 $a、b、e、f$ 有过联系,第四单位与 a,b,d,f 有过联系,第五单位与 a,b,c 有过联系,请列出去各单位检查工作的名单.

18. $\{ace,bc,dab,db,be\}$这组信息是否可以分别把每个字用

它的一个字母来代替而加以简化,若能,给出简化结果.

20. A,B,C,D 四种材料造 a,b,c,d 四种产品的成本如下面矩阵所示:

$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}\begin{pmatrix} 99 & 6 & 59 & 73 \\ 79 & 15 & 93 & 87 \\ 67 & 93 & 13 & 81 \\ 16 & 29 & 86 & 26 \end{pmatrix}$$
$$\quad a \quad\; b \quad\; c \quad\; d$$

一种产品只用一种材料,问什么生产方案使成本最低?

21. 从 64 个格的棋盘上选 16 个格,使每行每列含其中两个格,求证可以把 16 个棋子放在所选格子上,使得每行每列恰含一个白子一个黑子,已知共有 8 个黑子 8 个白子.

1.11 图上遍历

从图上一顶出发,能把所有的边一次性地行遍吗?能把所有的顶一次性地行遍吗?

前者从理论和算法上都已有效地得以解决,后者不论从理论上还是从算法上都未能有效地解决,成了数学和计算机科学当中最难解的问题之一.

1.11.1 Euler 图

定义 1 图中含每条边的行迹称为 Euler 行迹;闭的 Euler 行迹叫做 Euler 回路,含 Euler 回路的图称为 Euler 图. □

直观地讲,欧拉图就是从一顶出发每边恰通过一次又能回到出发顶的那种图.

定理 1 G 是 $\nu(G)\geqslant 3$ 的连通图,下面的三个命题等价:

(1) G 是 Euler 图.

(2) G 的每顶皆偶次.

(3) $G=\bigcup_{i=1}^{d} C_i$, C_i 是圈,且 $E(C_i)\cap E(C_j)=\varnothing$, $i\neq j$.

证 (1)⇒(2)已知 G 是 Euler 图,设 W 是 G 中 Euler 回路,$\forall v \in V(G)$,则 v 必在 W 上出现.设 v 出现了 k 次,则 $d(v)=2k$,即 $d(v)$是偶数,由 v 的任意性知(2)成立.

(2)⇒(3) 已知 G 是每顶皆偶次的连通图,又树($\nu \geqslant 3$)有叶,故 G 不是树,在 G 上可以找到一个圈 C_1;把 C_1 上的边从 G 上删除,得子图 G_1,若 G_1 的每顶皆零次,则 $G=C_1$,(3)成立;不然,G_1 中必有一个连通片每顶皆偶次,其上有圈 C_2,把 C_2 的边从 G_1 中删除,得新图 G_2;依此类推,进行有限次之后,得到无边图 G_d,所以 $G=\bigcup_{i=1}^{d} C_i$,C_i 是 G 中之圈,且 $E(C_i) \cap E(C_j)=\varnothing$,$i \neq j$,$1 \leqslant i,j \leqslant d$.

(3)⇒(1) $d=1$ 时,G 显然是 Euler 图;$d \geqslant 2$ 时,由于 G 连通,可以找到两个圈,不妨认为是 C_1 与 C_2,C_1 与 C_2 有公共顶 v_0,令 $C_{12}=C_1 \cup C_2$,则 C_{12}是闭行迹.又由 G 连通,还可找到一个圈,不妨认为 C_3,C_3 与 C_{12}有公共顶,于是 $C_{123}=\bigcup_{i=1}^{3} C_i$ 是闭行迹;如此下去,得证 $G=\bigcup_{i=1}^{d} C_i$ 是闭所迹,故 G 是 Euler 图,证毕.

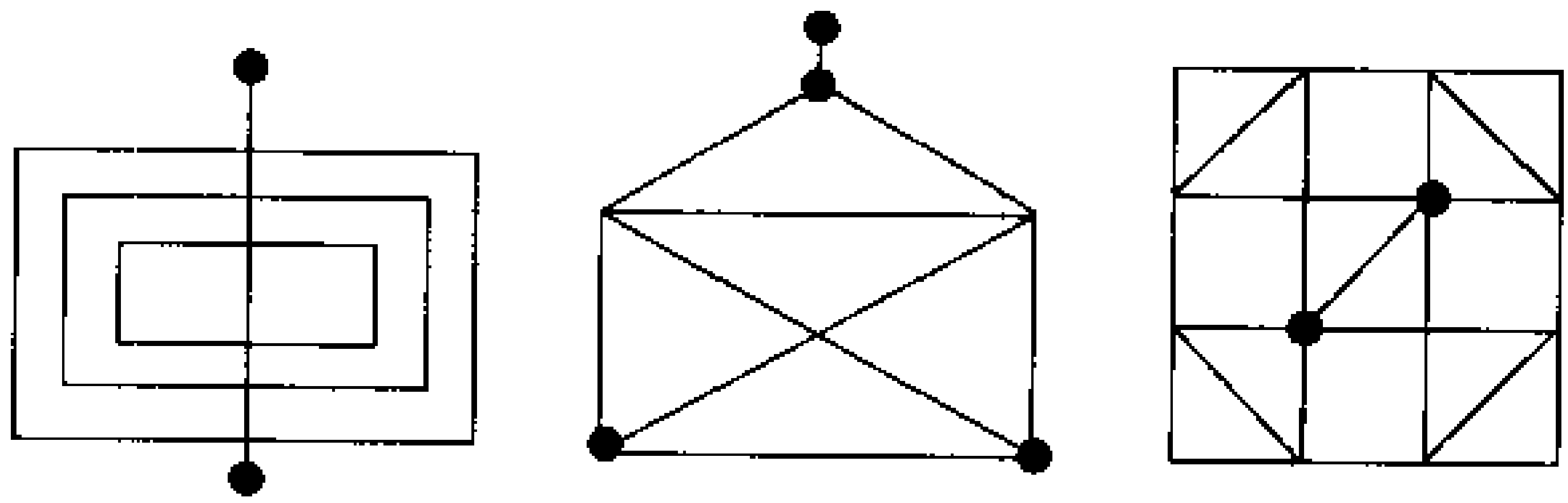
定理 2 连通图 G 中有 Euler 行迹的充要条件是 G 中至多两个奇次顶.

证 设连通图 G 有 Euler 行迹,若是闭行迹,则 G 是 Euler 图,由定理 1,G 中无奇次顶.若不是闭行迹,设 u_0 与 v_0 是此行迹的起止顶,考虑 $G+u_0v_0$,它是 Euler 图,每顶皆偶次,则 u_0 与 v_0 是 G 中仅有的两个奇次顶.

反之,若 G 中无奇次顶,由定理 1,它是 Euler 图,有闭的 Euler 行迹.若有奇次顶,且不超过两个奇次顶,由于奇次顶个数是偶数,所以恰有两个奇次顶,设它们是 u_0, v_0.由于 $G+u_0v_0$ 是每顶皆偶次的连通图,由定理 1,$G+u_0v_0$ 是 Euler 图,有 Enler 回路 C,故有 Euler 行迹 $C-u_0v_0$,证毕.

例 1 图 1.58 中哪个图可以"一笔画"?

解 (a)恰两个奇次顶,在竖线的两端,所以可以一笔画.(c)上中间小正方形上是全图仅有的两个奇次顶,所以(c)可一笔画.至于(b),其上有4个奇次顶,由定理2,(b)不可一笔画.图1.58中"●"顶是奇次的.



(a) (b) (c)

图 1.58

例 2 七桥问题无解

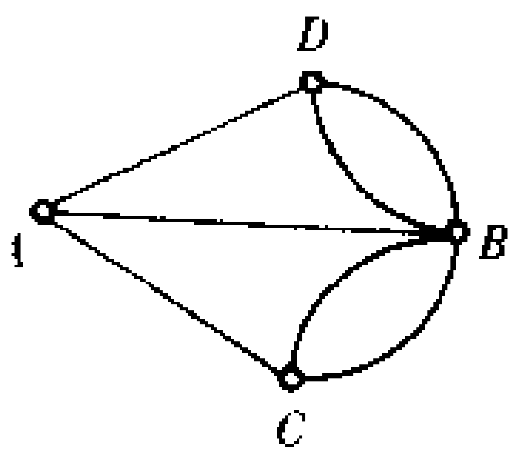


图 1.59

证 图1.1可以画成图1.59.此图上每顶皆奇次,所以由定理1与定理2,它既无Euler回路,也无Euler行迹,人们不可能每桥恰过一次,证毕.

例 3 在圆上任取 n 个点($n>2$),把每个点用线段与其余各点连接,能否一笔画出所有这些线段,使第一条线段的终点与第二条线段的起点重合,第二条线段的终点与第三条线段的起点重合,…,最后一条线段的终点与最初那条线段的起点重合?

解 以这 n 个点为顶,以所连线段为边,构成一个连通图 G,当 n 为奇数时,G 的每顶皆偶次,由定理1,G 是Euler图,本题答案是肯定的.否则,即当 n 为偶数时,G 的每顶皆奇次,由定理1,本题答案是否定的.

例 4 平面Euler图 G,可以表成不超过 $\nu(G)-2$ 个无公共边的圈之并.

证 由于 G 是平面图,所以 $\varepsilon(G)\leqslant 3\nu-6$,又 G 是 Euler 图,可以表成无公共边的圈之并.即使每圈 3 条边,最多也只能表成 $\frac{1}{3}(3\nu-6)=\nu-2$ 个无公共边的圈之并,证毕.

对于非平面 Euler 图,我们猜想例 4 的结论仍成立,即:

任何 Euler 图皆可表成 $\nu-2$ 个无公共边的圈之并.

至今尚未证明或反驳这一猜想.

1.11.2 求 Euler 回路的算法

FLEURY **算法**:

(1) $\forall v_0\in V(G)$,令 $W_0=v_0$.

(2) 设行迹 $W_i=v_0e_1v_1e_2\cdots e_iv_i$ 已选定,则从 $E-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 中选取一条边 e_{i+1},使得

(i) e_{i+1} 与 e_i 相邻,

(ii) 除非已无选择的余地,e_{i+1} 不要选 $G-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 的桥.

(3) 直到(2)不能进行为止.□

上述算法的时间复杂度为 $O(|E(G)|)$;它是 1921 年由数学家 Fleury 首创的.

例 5 求图 1.60 中的 Euler 回路.

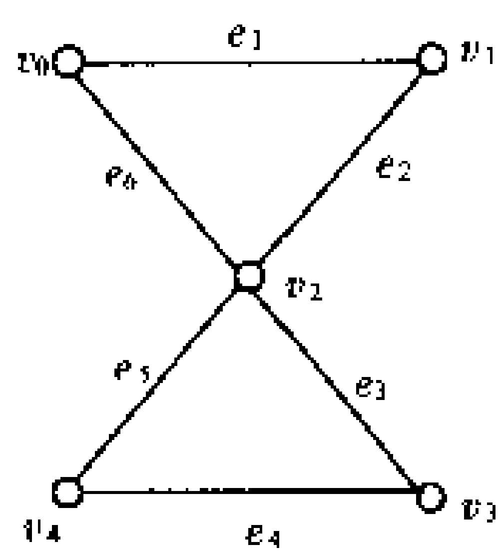


图 1.60

解 取 $W_0=v_0$, $W_1=v_0e_1v_1$,这时与 e_1 相邻的未取用的边只有 e_2,尽管 e_2 是 $G-e_1$ 的桥,因已无选择的余地,故只有取 $W_2=v_0e_1v_1e_2v_2$. 至此 W_3 不能选 $v_0e_1v_1e_2v_2e_6v_0$,因为 e_6 是 $G-\{e_1,e_2\}$ 的桥,而这时并非无其它选择的余地,例如可取 $W_3=v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3$,继续执行 Fleury 算法,取

$$W_4=v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3e_4v_4,$$
$$W_5=v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3e_4v_4e_5v_2,$$

$$W_6 = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_4 v_4 e_5 v_2 e_6 v_0$$

W_6 即为 G 的一条 Euler 回路. □

事实上，若不遵守 Fleury 算法，硬是取 $W_3 = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_6 v_0$，那么 e_3, e_4, e_5 尚未行到，再去通过 e_3, e_4, e_5 时，必然造成 e_1, e_2, e_6 中有的边通过两遍，这不符合 Euler 回路的要求. 所以不能随便过桥，以防过桥时身后未通过的边无法再通行.

定理 3 若 G 是 Euler 图，则 Fleury 算法终止时得到的是 Euler 回路.

证 设 $W_n = v_0 e_1 v_1 \cdots e_n v_n$ 是 Fleury 算法终止时得到的行迹，则 v_n 在 G_n 中的次数是 0，故 $v_0 = v_n$，W_n 是闭行迹.

若 W_n 不是 Euler 回路，令 S 是 G_n 中有正次数的顶集，则$S \neq \emptyset$. 但 $v_n \notin S$，令 $\bar{S} = V(G) - S$，则 $v_n \in \bar{S}$. 令 m 是 $v_m \in S$，而 $v_{m+1} \in \bar{S}$ 的 v 的脚标的最大值，因 W_n 终止于 $\bar{S}$，e_{m+1} 是 G_m 的桥，见图 1.61. 令 e 是 G_m 中与 v_m 关联的一条边，且 $e \neq e_{m+1}$. 由算法第二步，e 必为 G_m 的桥，因此 e 也是 $G_m[S]$ 的桥. 又 $G_m[S] = G_n[S]$. 故 $G_m[S]$ 每顶皆偶次，$G_m[S]$ 中无桥，与 e 是 $G_m[S]$ 的桥矛盾，证毕.

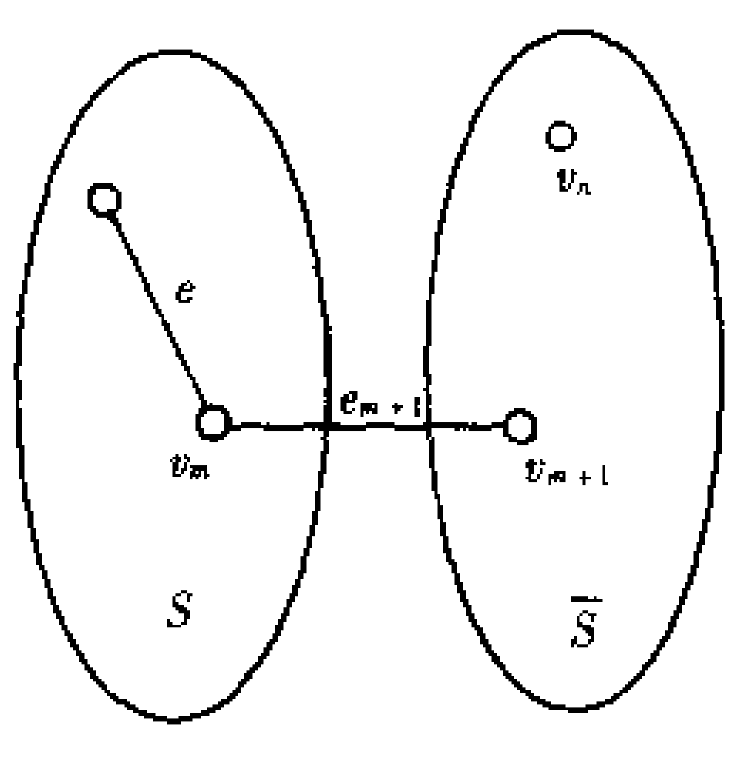


图 1.61

1.11.3 中国邮路问题(Chinese pastman problem)

中国邮路问题的数学模型是在加权连通图 G 上取总权最小

的一条回路 W，且 G 的边全在 W 上出现，称这种回路为理想回路. 如果 G 是 Euler 图，由 Fleury 算法求得的 Euler 回路即为理想回路. 如果 G 不是 Euler 图，则理想回路上至少有一条边出现两次. Edmonds 和 Johnson 于 1973 年给出了有效解决中国邮路问题的一个算法. 下面我们通过实例交代该算法的运算步骤.

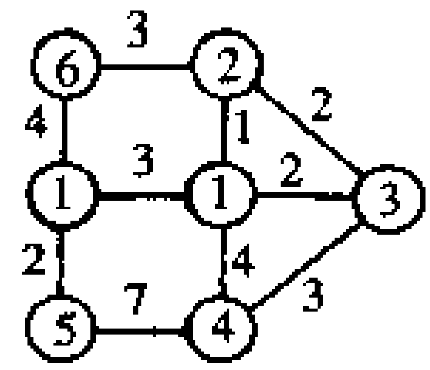


图 1.62

例 6 求图 1.62 上的中国邮路，边旁的数字是边之权.

(1)求 G 中奇次顶集合 X_1.

$$X_1 = \{①,②,③,④\}.$$

(2)用 Dijkstra 算法求 X_1 中每对顶的距离.

$d(①,②)=4$，$d(①,③)=5$，$d(①,④)=7$，$d(②,③)=2$，$d(②,④)=5$，$d(③,④)=3$.

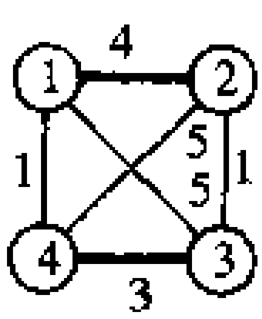


图 1.63

(3)以 X_1 为顶集构作加权完全图 $K_{|X_1|}$，以其两顶在 G 中之距离为两顶间边之权.(见图 1.63)

(4)求(3)中 $K_{|X_1|}$ 的最佳匹配 M.

$M = \{①②,③④\}$

(5)在 G 上用 Dijkstra 算法求 M 中边之端点在 G 中的最短轨.

$P_1 = ①⑦②$，$P_2 = ③④$.

(6)把(5)中最短轨上的边变成重边，新加的边的权与 G 中和它有两个共同端点的边之权一致.(见图 1.64)

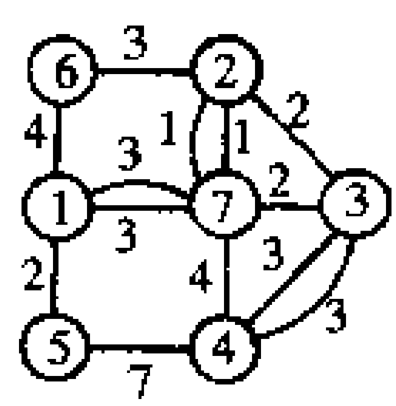


图 1.64

(7)在(6)中得到的加权 Euler 图上用 Fleury 算法求一条 Euler 回路. 此回路即中国邮路.

中国邮路 = ⑥②③⑦②⑦①⑦④③④⑤①⑥，

总长 = 38.

以上的步骤(1)—(7)对任何中国邮路的实例皆可用.时间复杂度为$O(|E(G)|)$.

1.11.4 Hamilton 图

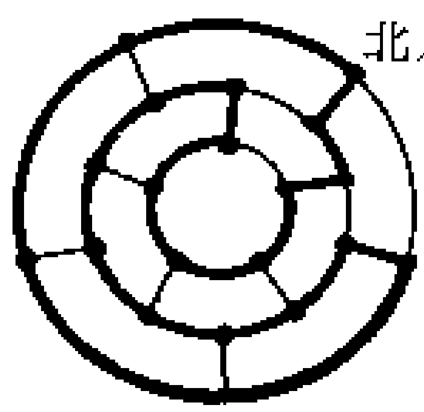


图 1.65

定义 2 含图的一切顶的轨叫做 Hamilton 轨,闭的 Hamilton 轨叫做 Hamilton 圈,有 Hamilton 圈的图叫做 Hamilton 图.□

例如 Hamilton 周游世界的游戏就是要求在以正十二面的顶点为顶,以其棱为边的一个平面图 G 上求一条 Hamilton 圈,G 的平面嵌入如图 1.65,它的一条 Hamilton 图在 1.55 中用粗实线表示.

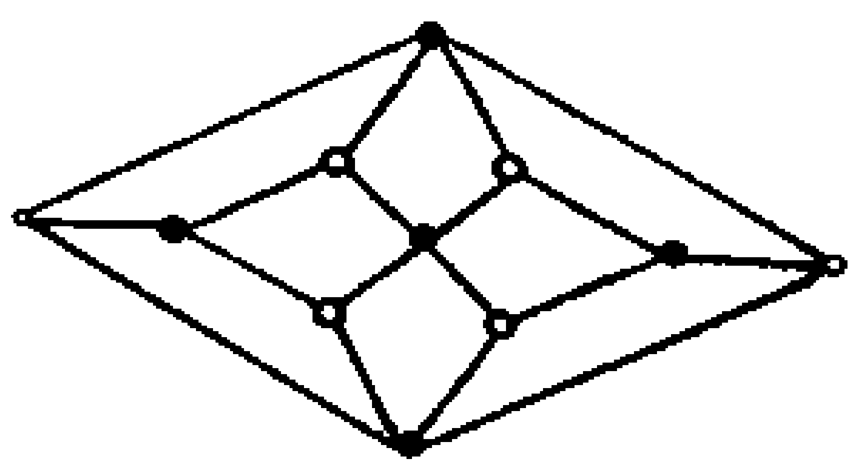


图 1.66

图 1.66 不是 Hamilton 图,事实上,以黑顶●为 X 集合,以白顶○为 Y 集合可以看清此图是 2 分图,又一共 11 顶,它不会有 11 个顶的奇圈.图 1.66 是著名的 Herschel 图.

定理 4 G 是 Hamilton 图,则 $\forall S\subset V(G), S\neq\emptyset$,必有 $\omega(G-S)\leqslant|S|$.

证 设 C 是 G 的 Hamilton 圈,则 $\omega(C-S)\leqslant|S|$,其中 $\forall S\subset V(G), S\neq\emptyset$,而 $C-S$ 是 $G-S$ 生成子图,故有

$$\omega(G-S)\leqslant\omega(C-S)\leqslant|S|,$$

证毕.

例 7 图 1.67 中的图是否 Hamilton 图?

解 不是,三个"黑顶"删除后得 4 个连通片,由定理 4,它不是 Hamilton 图.

定理 5(Ore,1960) G 是 $\nu(G)\geqslant3$ 的图.$\forall u,v\in V(G)$,$d(u)+d(v)\geqslant\nu-1$,则 G 中有 Hamilton 轨;若 $d(u)+d(v)\geqslant\nu$,

则 G 中有 Hamilton 圈.

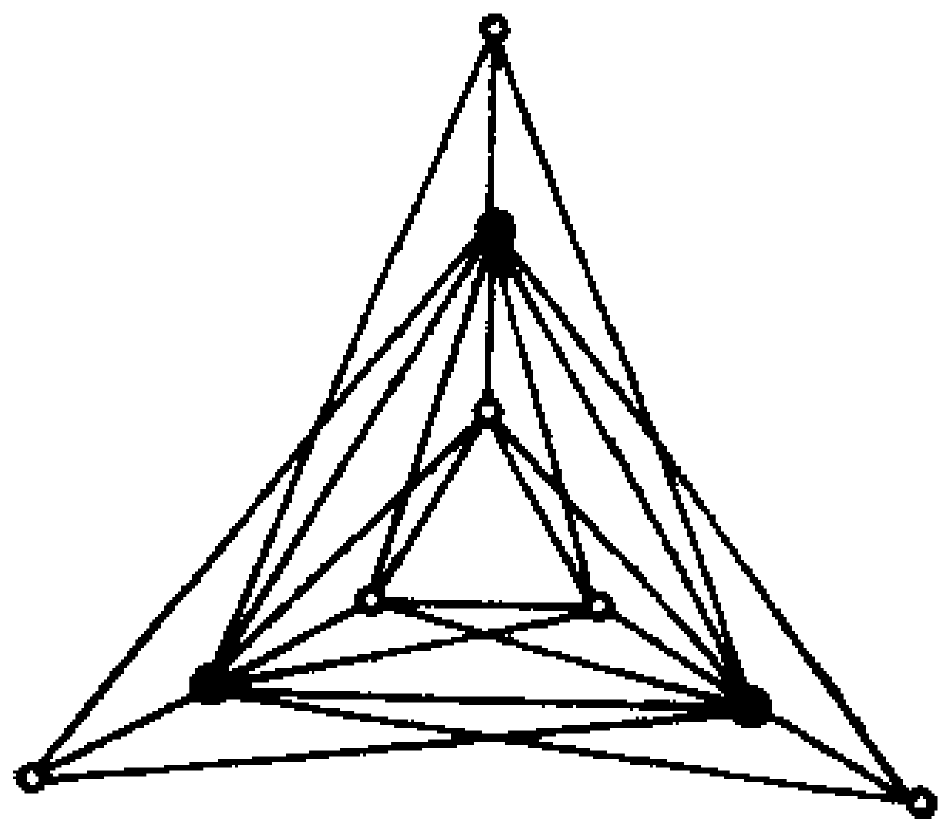


图 1.67

证 首先证明，$\forall u,v\in V(G)$，$d(u)+d(v)\geqslant \upsilon-1$ 时，G 是连通图.事实上，若 G 不连通，则有 $\omega\geqslant 2$ 个连通片 $G_1,G_2\cdots,G_\omega$. $\forall u_1\in V(G_1)$，$d(u_1)\leqslant \upsilon(G_1)-1$，$\forall u_2\in V(G_2)$，$d(u_2)\leqslant \upsilon(G_2)-1$，于是 $d(u_1)+d(u_2)\leqslant \upsilon(G_1)+\upsilon(G_2)-2\leqslant \upsilon-2$，与 $d(u_1)+d(u_2)\geqslant \upsilon-1$ 矛盾.

若 $\forall u,v\in V(G)$，$d(u)+d(v)\geqslant \upsilon-1$，而 G 中无 Hamilton 轨，令 $P(v_1,v_{l+1})$ 是 G 的一条最长轨，其长为 $l<\upsilon-1$，则 v_1 与 v_{l+1} 相关联的边的另一端必为 $P(v_1,v_{l+1})$ 的内顶.设 P 上的顶依次为 $v_1,v_2,\cdots,v_{l+1}$，其中 $v_{j_1},v_{j_2},\cdots,v_{j_k}$ 与 v_1 相邻，而 v_{j_1-1}，$v_{j_2-1},\cdots,v_{j_k-1}$ 都不与 v_{l+1} 相邻，则 $d(v_1)=k$，$d(v_{l+1})\leqslant l-k$，这样，$d(v_1)+d(v_{l+1})\leqslant l<\upsilon-1$，与定理条件相违，所以 G 中必出现如图 1.68 的结构，于是有长 $l+1$ 的一个圈 C，$C=v_1v_{i+1}v_{i+2}\cdots v_{l+1}v_iv_{i-1}\cdots v_2v_1$. 又 $P(v_1,v_{l+1})$ 的顶数 $l+1<\upsilon$，故存在 $w\in V(G)$，$w\notin V(P(v_1,v_{l+1}))$. 由 G 的连通性，存在轨 $P_1(w,v_1)$，设 v_{k_0} 是从 w 起 $P_1(w,v_1)$ 上第一个在 C 上的顶，于是从 w 起，沿 $P_1(w,v_1)$ 运行至 v_{k_0}，再沿 C 运行经 C 上每顶恰一

次,则得一条比 $P(V_1, v_{l+1})$ 更长的轨,与 $P_1(v_1, v_{l+1})$ 是最长轨相违. 所以 G 中有 Hamilton 轨.

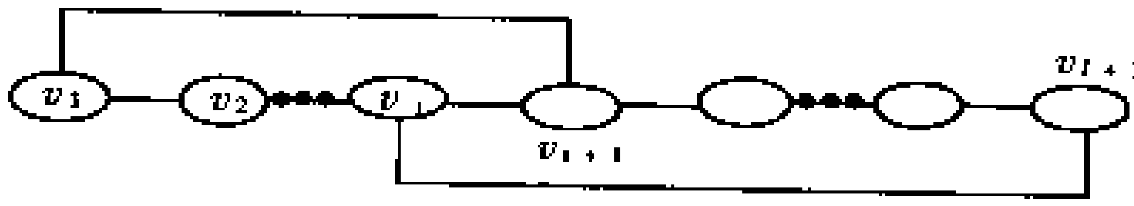


图 1.68

定理的后半部分显然成立. 因为这时 G 中有最长轨,其长为 $v-1$,此轨出现如图 1.58 的结构,形成 Hamilton 图,证毕.

例 8 围圆桌坐了不少于五个人,那么一定可以调整他们的座位,使得每个人两侧都挨着新邻座.

证 若恰好是五人,原来的座次是 $ABCDEA$,可以调成 $ADBECA$.

若超过了五个人,以人为顶,仅当两人原来不邻座时,在此相应的二顶间连一条边,得一图 G. G 的每顶皆 $|V(G)|-3$ 次,于是任二顶次数之和为 $2v-6$,又 $v>5$,故 $2v-6\geqslant v$,由定理 5,G 是哈密顿图,按 G 之 Hamilton 圈的次序请各位人席即可,证毕.

例 9 一个有限集合的全部子集可以这样排序,使任何相邻集合相差一个元素.

证 设此集合为 A,$|A|=n$,我们把 A 的每个子集用有序的 n 个 0-1 数码来表示,不妨设 $A=\{1,2,3,\cdots,n\}$,一子集含 i 时,第 i 位写 1,否则第 i 位写 0. 全部子集共 2^n 个,以每个子集相应的 n 个分量的 0-1 编码数串为顶,仅当两个数串仅有一个同位数码相异时,在此二顶间连一边,得一图 G,此图称为 n 维立方体(骨架). 例如图 1.69(a)是一维立方体,(b)是二维立方体,(c)是三维立方体,(d)是四维立方体.

显然,若 k 维立方体 G_k 已做好,把 G_k 及其复制品分别放在上方和下方,再把上方的各顶标码"加头"0,把下方的各顶"加头"1,并把上下两图的对应顶连上一条竖直边,则得 $k+1$ 维立方体 G_{k+1}.

对于 $n=1$,例 9 显然成立,下面考虑 $n\geq 2$. 容易证明 n 维立方体是 Hamilton 图,图 1.69 的粗实线即 Hamilton 圈,把 G_n 上的顶按其 Hamilton 圈上的顺序排序(按顺时针),因其每顶代表一个子集,且相邻顶代表仅相差一个元素的两子集,所以上述排序合乎例 9 的要求,证毕.

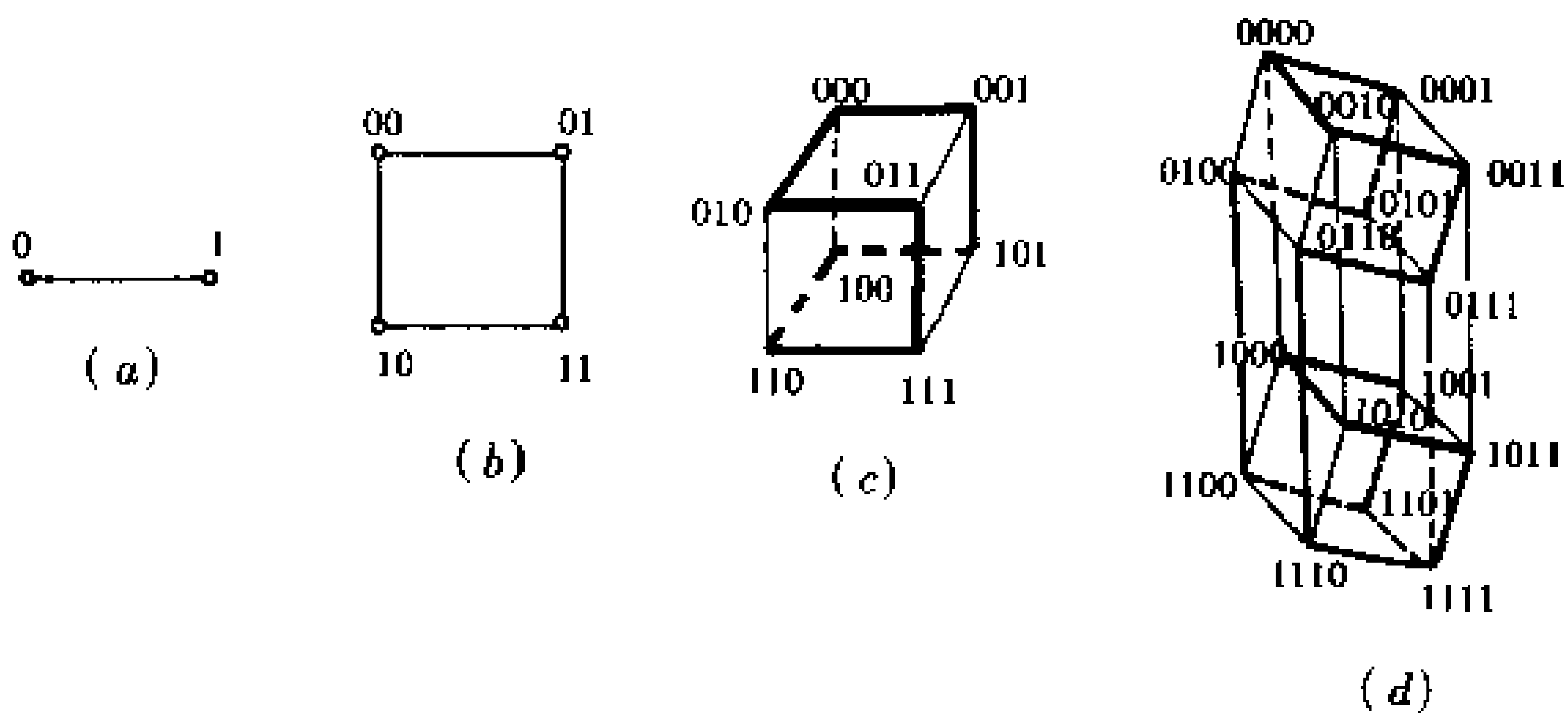


图 1.69

下面讨论"马图". 所谓马图,是以国际象棋的方格为顶,仅当马从甲格能一步跳到乙格时,在甲乙两顶间连一边,如此构成的一个图 G.

例 10 4×4 的棋盘上的马图是否 Hamilton 图? 5 × 5 的马图是否 Hamilton 图? 8 × 8 的马图是否 Hamilton 图?

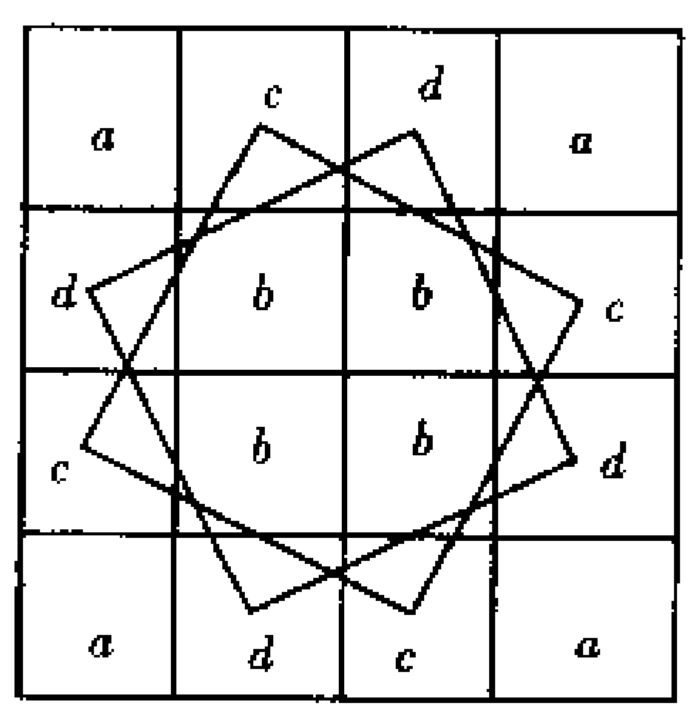


图 1.70

解 对于 4 × 4 的马图,见图 1.70,4 个 c 字顶构成一个四阶圈,4 个 d 字顶构成一个四阶圈,4 个 a 字顶是 2 次的,每个 a 顶仅与两个 b 字顶相邻. 若把 4 个 b 字顶删去,得六个连通片,两个 4 阶圈和四个孤立顶 a,而 4×4 的马图是连通的,每个 b 与一个 c 一个 d 相邻,每个 a 与两个 b 两邻. 由定

理 4 知此图不是 Hamilton 图.

对于 5×5 的马图,见图 1.71,a 字顶是 2 次的,它们在一个 8 阶圈上,所以他们不可能在此图的 25 阶圈上,即 5×5 马图不是 Hamilton 图.

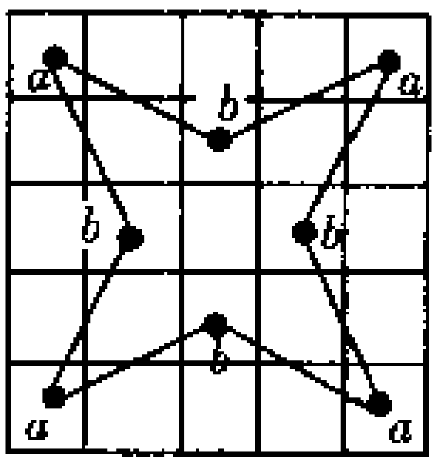
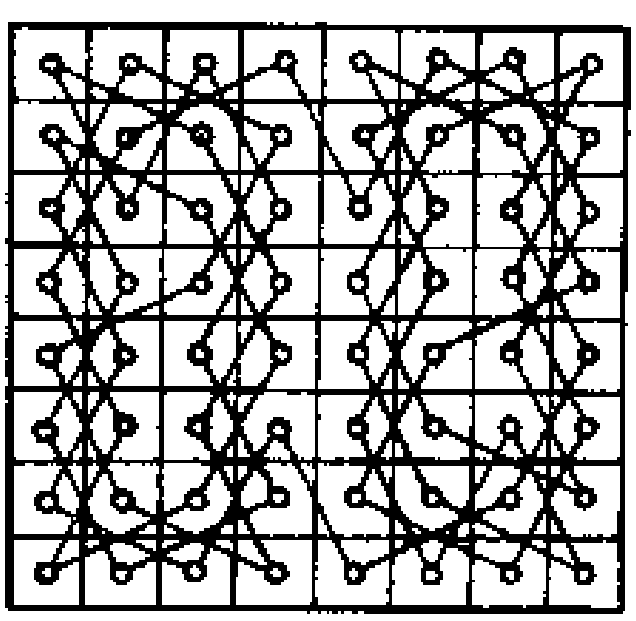


图 1.71

8×8 的马图是 Hamilton 图,其 Hamilton 圈画在图 1.72 中,方格中的数是马行走的步数,恰成一个每行之和,每列之和皆 260 的幻方.

定理 6 u 与 v 是图 G 两个不相邻的顶,且 $d(u)+d(v)\geqslant \upsilon$,则 G 是 Hamilton 图的充要条件是 $G+uv$ 是 Hamilton 图.

证 设 G 是 Hamilton 图,则 $G+uv$ 显然也是.反之,若 $G+uv$ 是 Hamilton 图,而 G 不是 Hamilton 图,这时 G 中有 Hamilton 轨,$v_1v_2\cdots v_\upsilon$.其中 $v_1=u$,$v_\upsilon=v$.若对某个 $i(2\leqslant i\leqslant \upsilon-1)$,$v_1v_i\in E(G)$,则 $v_{i-1}v_\upsilon\notin E(G)$,不然,$v_1v_2\cdots v_\upsilon v_{\upsilon-1}\cdots v_iu_1$ 是 G 的 Hamilton 圈,与上述假设 G 非 Hamilton 图相违.因而 $d(v_\upsilon)\leqslant \upsilon-1-d(v_1)$,与 $d(u)+d(v)\geqslant \upsilon$ 矛盾,证毕.



50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

图 1.72

定义 3 把 G 中次数之和至少为 υ 的两个不邻之顶间添加一边,直至这种加边过程终止,得到的新图为原来那个图 G 的闭包,记之为 $C(G)$.□

定理7 G是连通图,则$C(G)$存在唯一.

证 $C(G)$的存在性不足道.下证唯一性.设G_1与G_2是G的两个闭包,且$e_1,e_2,\cdots,e_m$与$f_1,f_2,\cdots,f_n$分别是构作G_1与G_2时加的边(若G一条边也不可加时,$C(G)=G$,唯一性成立).下证$e_i\in E(G_2),i=1,2,\cdots,m;f_j\in E(G_1),j=1,2,\cdots,n$.不然,设$e_{k+1}$是$e_1,e_2,\cdots,e_m$中不在$G_2$上的第一条边,令$H=G+\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$,由$G_1$之定义,当$uv=e_{k+1}$时,

$$d_H(u)+d_H(v)\geqslant v,$$

又$H\subseteq G_2$,故

$$d_{G_2}(u)+d_{G_2}(v)\geqslant v.$$

但$e_{k+1}=uv$不在G_2中,应有$d_{G_2}(u)+d_{G_2}(v)<v$,矛盾.可见$e_1,e_2,\cdots,e_m\in E(G_2)$;同理$f_1,f_2,\cdots,f_n\in E(G_1)$,证毕.

例如图1.73,不能用*Ore*定理判定其为Hamilton图,但它确为Hamilton图,因为它的闭包是K_6.

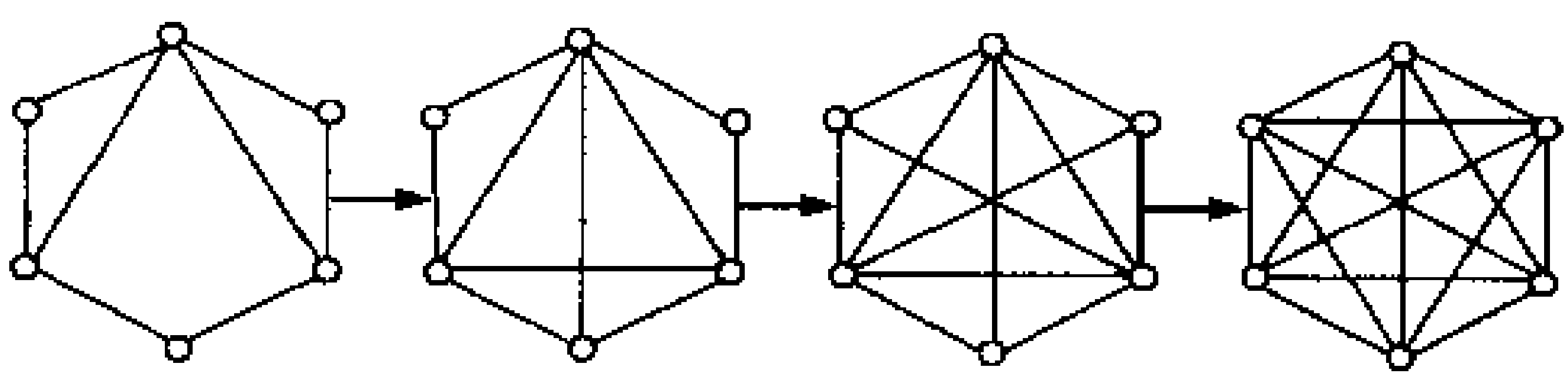


图1.73

虽然闭包概念的引入对于判定是否Hamilton图有一些作用,但它并不是一个有效的充要条件,它只是把G是否Hamilton图转化成另一个图$C(G)$是否Hamilton图,这种进展步子太小,不能令人满意.建立有效的充要条件,以便在多项式时间内判明图的Hamilton性,是一个十分之艰巨的老大难问题,目前尚无任何可解的迹象(见本书NPC理论).

例11 n个朋友围圆桌聚会,若每两位朋友只能相邻坐在一起一次,最多可以有几种入席方式?

解 此题就是求 K_n 中无公共边的 Hamilton 圈的个数. K_n 中的边数为$\frac{1}{2}n(n-1)$,所以无公共边的 Hamilton 圈的个数不超过 $\left[\frac{1}{2}n(n-1)\div n\right]=\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]$个. 下面用构造法找到$\left[\frac{n-1}{2}\right]$个无公共边的 Hamilton 圈.

当 $n=2k+1$ 时($k\geqslant1$),可以找到 k 个无公共边的 Hamilton 圈,见图 1.74. 把 $2k+1$ 个顶分别用 $0,1,2\cdots,2k$ 来表示,$1,2,\cdots,2k$ 这些顶均匀地放在圆周上,O 顶放在圆心,则 C_1 是一个 Hamilto 圈,在图 1.74 中 C_1 用粗实线表示. 把 C_1 顺时针旋转$\frac{\pi}{k}$,得到与 C_1 无公共边的第二个 Hamilton 圈 C_2. 如此旋转 $k-1$ 次,即得到 k 个两两无公共边的 Hamilton 圈.

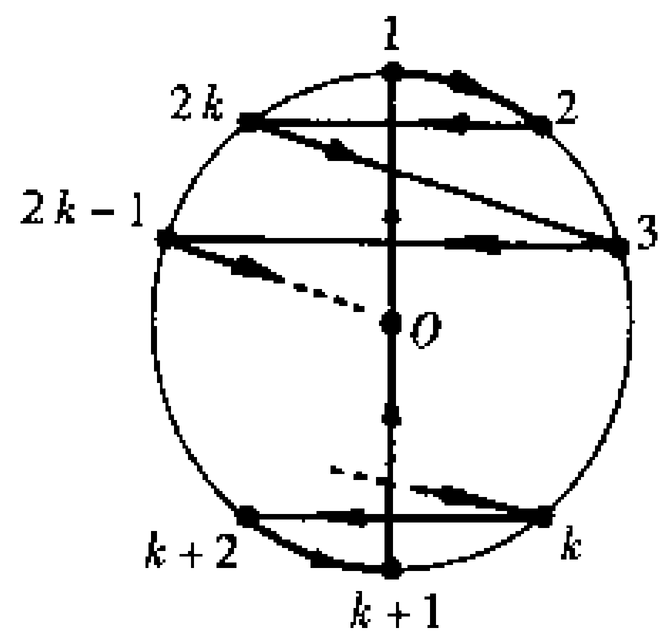


图 1.74

$C_1=(0)(1)(2)(2k)(3)(2k-1)(4)\cdots(k)(k+2)(k+1)(0)$

对于 $n=2k+2,k\geqslant1$,把 $2k+1$ 号顶放在图 1.74 O 顶的“上空”,见图 1.75,即在圆所在平面过 O 的垂线上放置顶 $2k+1$,当图 1.74 中的圈 C_1 运行到左侧距水平直径最近的顶时,在 $n=2k+1$ 的情形是向右下方运行,这里改成向$(2k+1)$运行,再从$(2k+1)$向右下方距水平直径最近的顶运行,于是可得 $n=2K+2$ 时的一个 Hamilton 圈,再用顺时针旋转$\frac{\pi}{k}$的方式得到 k 个两两无公共边的 Hamilton 圈.

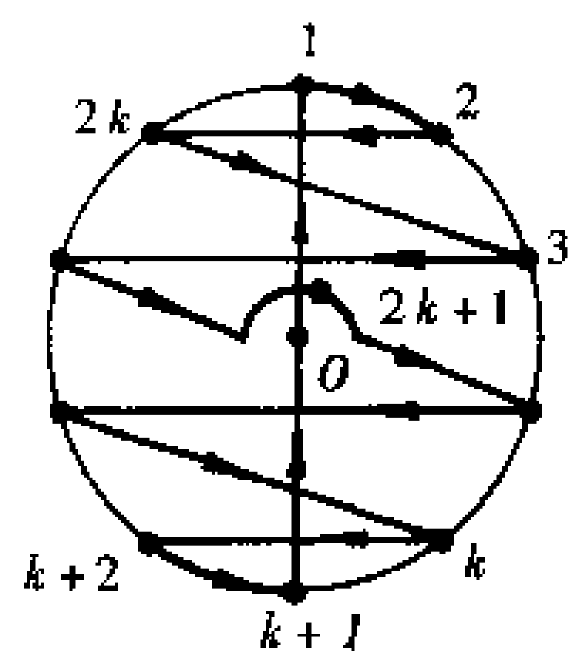


图 1.75

总之 K_n 中有 $\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]$ 个无公共边的 Hamilton 圈.

习题六

1. G 是 Euler 图,则 G 的每个块也是 Euler 图.

2. G 是连通图,有 $2k>0$ 个奇次顶,则 G 有 k 条无公共边的行迹 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_k$,使得 $E(G)=\bigcup_{i=1}^{k}E(Q_i)$.

3. G 是 Euler 图,$\upsilon(G)\geqslant 3$,则 G 的每一条起点为 v 的行迹可延长为 G 的 Euler 回路的充要条件是 $G-v$ 是林.

4. 称一个图 G 是由顶 v_0 可任意行遍的,若经过下列步骤总是产生一条 Euler 回路:由 v_0 出发,经任取的一条与之关联的边,达到一顶 u 后,由任取的一条尚未用过的与 u 关联的边离开 u,如此继续,直至用遍 G 的所有边.证明:Euler 图 G 是可由 v_0 任意行遍的,当且仅当 G 的每个圈皆含 v_0.

5. 称一个图是随意 Hamilton 的,若从 G 的任一顶出发,然后进入任何一个尚未进入过的邻顶,直至没有未进入的顶可选,最后产生一条 Hamilton 圈,证明这种随意 Hamilton 的图必为 C_n,K_{2n},$K_{n,n}$之一(C_n 是 n 顶圈).

6. 若 G 有 Hamilton 轨,则 $\forall S\subset V$,皆有$\omega(G-S)\leqslant|S|+1$.

7. G 中任二顶间皆有 Hamilton 轨,则称 G 是 Hamilton 连通的,证明:G 是 Hamilton 连通的,且 $\upsilon\geqslant 4$,则 $\varepsilon>\left[\frac{1}{2}(3\upsilon+1)\right]$.

8. G 不是 Hamilton 图,但 $\forall v\in V(G)$,$G-v$ 是 Hamilton 图,则称 G 是亚哈密顿图,证明 Petersen 图是亚哈密顿图.

9. 证明 $K_{n,n}$中有 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个无公共边的 Hamilton 圈.

10. 用 n 条($n>1$)水平线与 n 条竖直线相截得一图G,G 有 n^2 个顶点(每两直线的交点为一顶),以截得的线段为边,问 G 是否有 Hamilton 轨和 Hamilton 圈.

11. 一个 n 行 m 列的方格网,每个结点处穿了一颗珍珠,确定 m,n 的值,使得剪断一些线之后,做成一个项链.

12. 某朝一暴君在皇宫召见 $2n$ 位大臣,其中一些大臣间互存仇恨,每位大臣的仇人不超过 $n-1$ 个,证明:这些大臣可以排成一圈,每个大臣的左右都不是仇人.

13. 今有 1cm^3 的立方体四枚,它们的每个面用红、黄、兰、绿四色之一染成,请把这四个立方体堆成高 4cm 的四棱柱,使柱的每一侧面上都出现四种颜色.

14. 求 Chvatal 图(1.76)上的一条 Euler 回路.

15. 在正八面体的每个面上重合地放一个四面体的面,所得的多面体图是否 Hamilton 图?

16. 一个二十面体是用纸糊成的,能否把这它剪成两部分,使得每个面也剪成了两部分但又剪不着二十面体的顶点?

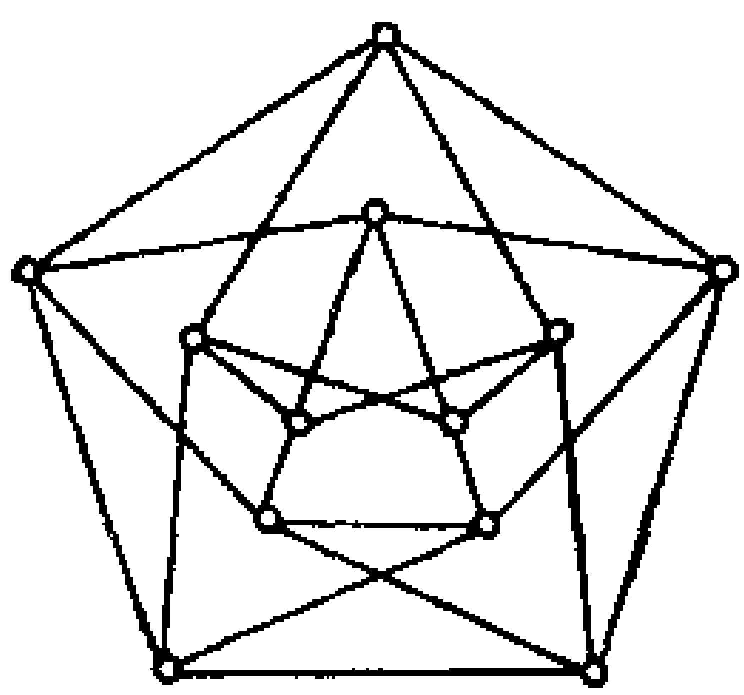


图 1.76

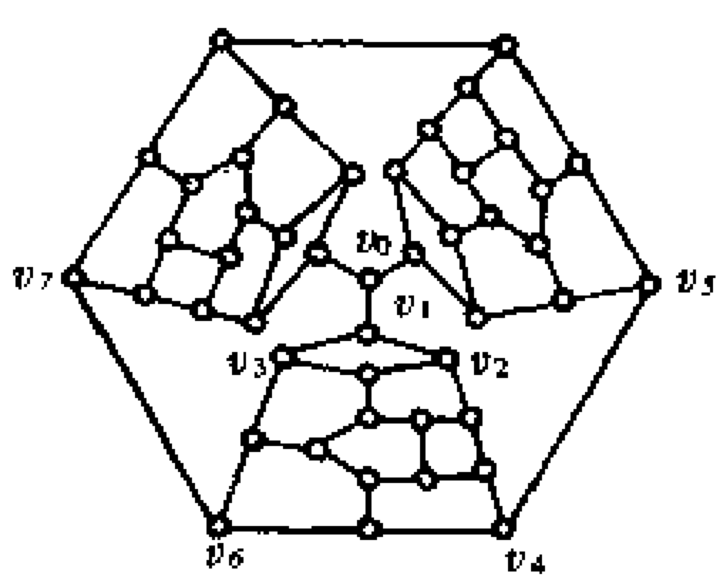


图 1.77

17. 证明:图 1.77 不是 Hamilton 图.

18. n 个顶的单图,它的边数至少为 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$,则它是 Hamilton 图.

1.12 色

把图的顶集、边集和平面图的面集用各种颜色着色,是一件技

术含量和理论含量极高的数学工作，其难度之大，应用之广在图论中堪称首位.

1.12.1 边色数

本章只讨论无环图.

定义 1 图 G 的一个 k 边着色是指 $E(G)$ 的一个划分 $E(G)=\bigcup_{i=1}^{k}E_i$，$E_i\cap E_j=\varnothing$，$i\neq j$，$E_i$ 中的边皆染上 i 色，$i=1,2,\cdots,k$. 若每个 $E_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 都是 G 中匹配，则称此种 k 边着色为正常 k 边着色；G 可以 k 边正常着色，但不能 $k-1$ 边正常着色时，称 k 是 G 的边色数，记成 $\chi'(G)=k$. 与顶 v 关联的边中有 i 色者，称 i 色在顶 v 处出现，在顶 v 处出现的颜色数记成 $c(v)$. □

例 1 求图 1.78 的边色数.

解 图 1.78 上已标志了用四种颜色正常边着色的一种方法：$E_1=\{v_1v_4,v_3v_5\}$，$E_2=\{v_1v_5,v_3v_4\}$，$E_3=\{v_1v_2\}$，$E_4=\{v_4v_5,v_2v_3\}$；但若欲用 3 种颜色进行正常边着色，则只能按图中圆圈中的颜色号码进行，这时 v_2v_3 边无法上色，故 $x'(G)=4$.

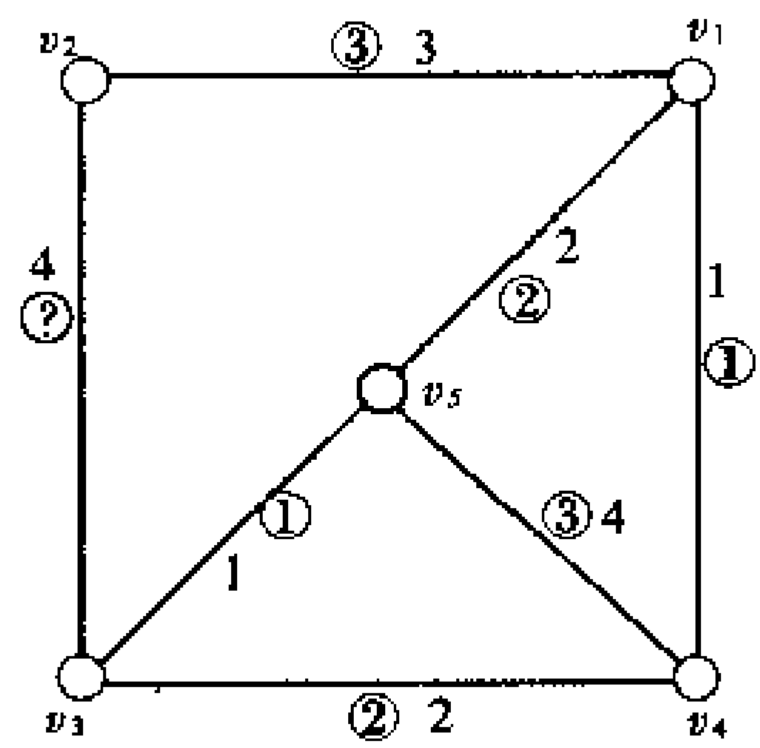


图 1.78

引理 1 G 是连通图，非奇圈，则存在 2 边着色，使所用的两种颜色在每个次数至少为 2 的顶处出现.

证 设 G 是 Euler 图，若 G 是偶圈，命题显然成立；若 G 不是偶圈，至少有一顶 v_0，$d(v_0)\geqslant 4$. 令 $v_0e_1v_1e_2\cdots e_\varepsilon v_0$ 是 G 的一条 Euler 回路，令

$$E_1=\{e_i\mid i\equiv 1(\mathrm{mod}2)\},E_2=\{e_i\mid i\equiv 0(\mathrm{mod}2)\},$$

于是把 E_1 上 1 色，E_2 上 2 色即可.

若 G 不是 Euler 图，添加一个新顶 v_0，把 v_0 与 G 中每个奇

次顶之间加一条新边，得的图 G^* 是 Euler 图，令 $v_0e_1v_1\cdots e_{\varepsilon^*}v_0$ 是 G^* 的一条 Euler 回路，其中 $\varepsilon^*=|E(G^*)|$. 仍如上在 G^* 中定义 E_1^* 与 E_2^*，则把 $E_1^*\cap E(G)$ 与 $E_2^*\cap E(G)$ 分别染上 1 色和 2 色即可，证毕.

定义 2 设 C 与 C' 是 G 的两种 k 边着色方式，相应的 $c(v)$ 与 $c'(v)$ 满足

$$\sum_{v\in V(G)} c'(v) > \sum_{v\in V(G)} c(v),$$

则称 C' 是对 C 的一种改善，不能再改善的 k 边着色称为最美 k 边着色. □

引理 2 $C=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_k$ 是 G 的最美 k 边着色，存在一个顶 u 及两种颜色 i,j，i 色不在 u 处出现，而 j 色在 u 处至少出现两次，则 $G[E_i\cup E_j]$ 中含 u 的连通片是一个奇圈.

证 设 H 是 $G[E_i\cup E_j]$ 中含 u 的连通片. 若 H 不是奇圈，由引理 1，H 有一个 2 边着色，所用两种颜色在 H 的次数至少为 2 的每顶处都出现. 我们用 i,j 两种颜色对 H 的边依引理 1 的办法重新着色. 因为在此新的 k 边着色 $\bigcup_{i=1}^{k}E'_i$ 中，i,j 两色在 u 处都出现，故 $c'(u)=c(u)+1$，而 $u\neq v$ 时，$c'(v)\geqslant c(v)$，于是

$$\sum_{u\in v(G)} c'(v) > \sum_{v\in V(G)} c(v),$$

此与 C 是 G 的最美 k 边着色矛盾，证毕.

定理 1 $\chi'(\text{二分图})=\triangle$.

证 设 G 是二分图，而 $\chi'(G)>\triangle$，设 $C=\bigcup_{i=1}^{\triangle}E_i$ 是 G 的一个最美△边着色，$u\in V(G)$，满足 $c(u)<d(u)$，显然 u 满足引理 2 的条件，因此 G 中有奇圈，与二分圈矛盾，故 $\chi'(G)\leqslant\triangle$，又 $\chi'\geqslant\triangle$，故 $\chi'(G)=\triangle$，证毕.

定理 2(Vizing, 1964) 若 G 是单图，则要么 $\chi'(G)=\triangle$，要么 $\chi'(G)=\triangle+1$.

证 G 是单图，$\chi'(G)\geqslant\triangle$，只欠证 $\chi'(G)\leqslant\triangle+1$(图 1.78，

$\chi'=\triangle+1$,二分图,$\chi'=\triangle$).

假设$\chi'(G)>\triangle+1$. 令 $C=\bigcup_{i=1}^{\triangle+1}E_i$ 是G的最美$\triangle+1$边着色,u是$c(u)<d(u)$的一个顶,则存在颜色i_0,i_1;i_0在u处不出现,而i_1在u处至少出现两次. 设uv_1是i_1色(见图 1.79). 因为$d(v_1)<\triangle+1$,所以i_2色在v_1处不出现,i_2色在u处出现,否则用i_2重新对uv_1着色,得到对C的改善与C是最美$\triangle+1$边着色矛盾. 故某边uv_2着色为i_2. 又$d(v_2)<\triangle+1$,某色i_3不在v_2处出现,i_3必在u处出现,不然用i_2对uv_1,用i_3对uv_2重新上色,会对C改善,这不可能. 故有某边uv_3着色i_3,继续这个过程,我们构作了一个顶序列$v_1,v_2,\cdots$和一个颜色序列$i_1,i_2,\cdots$,使得

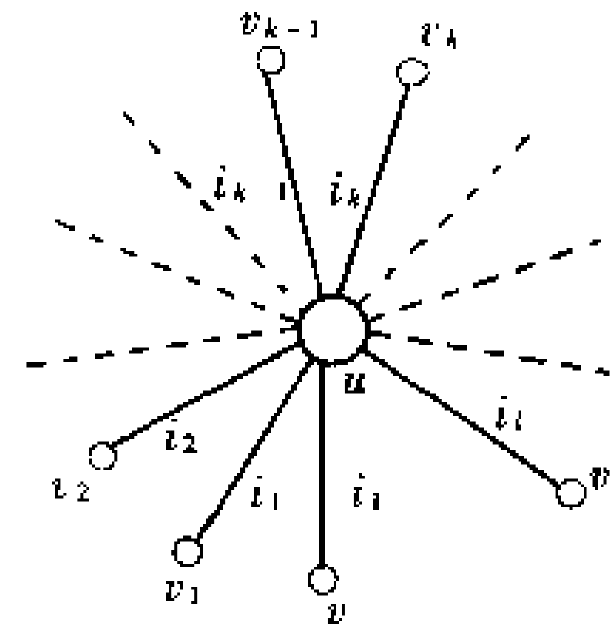


图 1.79

(1)uv_j着i_j色,(2)i_{j+1}不在v_j处出现. 由于u的次数有限,所以存在最小整数l,使得对某个$k<l$有:(3)$i_{l+1}=i_k$(见图 1.79).

我们用下述办法对G的边重新上色:对于$1\leqslant j\leqslant k-1$,用$i_{j+1}$重新对$uv_j$上色,得到一个新的$\triangle+1$边着色$C'=\bigcup_{i=1}^{\triangle+1}E'_i$(见图 1.80). 显然,对一切$v\in V(G)$有$c'(v)\geqslant c(v)$,且$C'$是一个最美$\triangle+1$边着色. 由引理 2,$G[E'_{i_0}\cup E'_{i_k}]$的含$u$的连通片$H'$是一个奇圈.

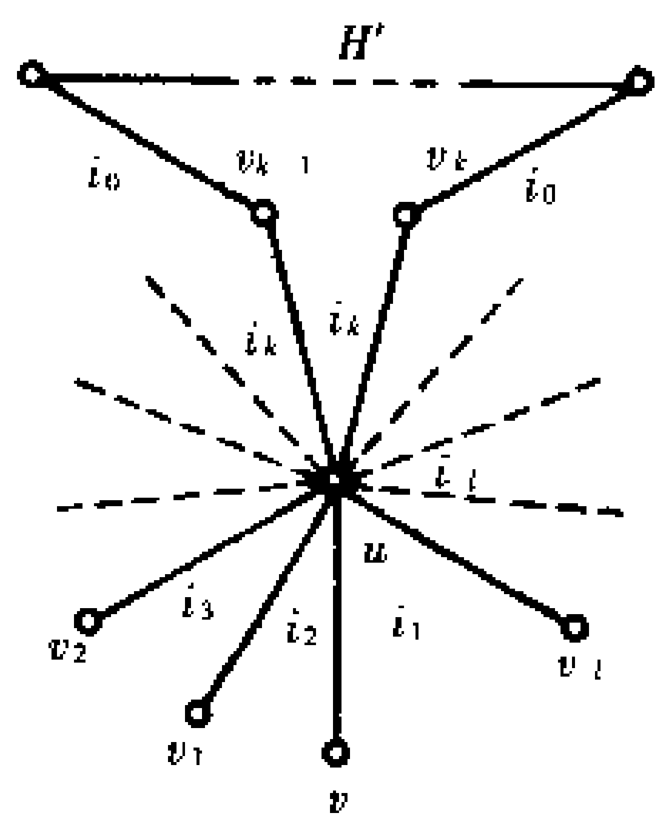


图 1.80

现在用$i_{j+1}(k\leqslant j\leqslant l-1)$重新对$uv_j$上色,在$uv_l$上的颜色是$i_k$,得

到$\Delta+1$边着色$C''=\bigcup_{i=1}^{\Delta+1}E''_i$，见图 1.81. 显然，对一切$v\in V(G)$，$c''(v)\geqslant c(v)$，且$G[E''_{i_0}\cup E''_{i_k}]$含$u$的连通片$H''$是一个奇圈. 但在$H'$中$v_k$的次数为2，在$H''$中$v_k$的次数是1，这不可能，证毕.

图论中，把$\chi'(G)=\Delta$的图称为第一类图，把$\chi'(G)=\Delta+1$的图称为第二类图. 可惜的是，至今仍无有效的方法区分(判别)任给定的图是第几类的图.

易知，二分图是第一类，而妖怪是第二类.

1.12.2 顶色数与面色数

定义3 图G的一个k顶着色是指$V(G)$的一个划分$(V_1, V_2,\cdots,V_k)$，$V_i(1\leqslant i\leqslant k)$中的顶皆着以$i$色. 若$V_i$中$(i=1,2,\cdots,k)$无邻顶，则称其为正常$k$顶着色. 若$G$可以正常$k$顶着色，但不能$k-1$顶正常着色，则称$k$为$G$的顶色数，简称色数，记成$\chi(G)=k$，且称$G$是$k$色图. 若$G$的任一真子图$H$，$\chi(H)<\chi(G)$，则称$G$是色临界图，$\chi(G)=k$时，称其为$k$色临界图.

例2 求7顶轮的色数.

解 因7顶轮有三角形(见图1.82)，所以$\chi(G)\geqslant 3$. 另一方面，若轮心着1色，轮周上2色与3色相间分布，则呈正常3顶着

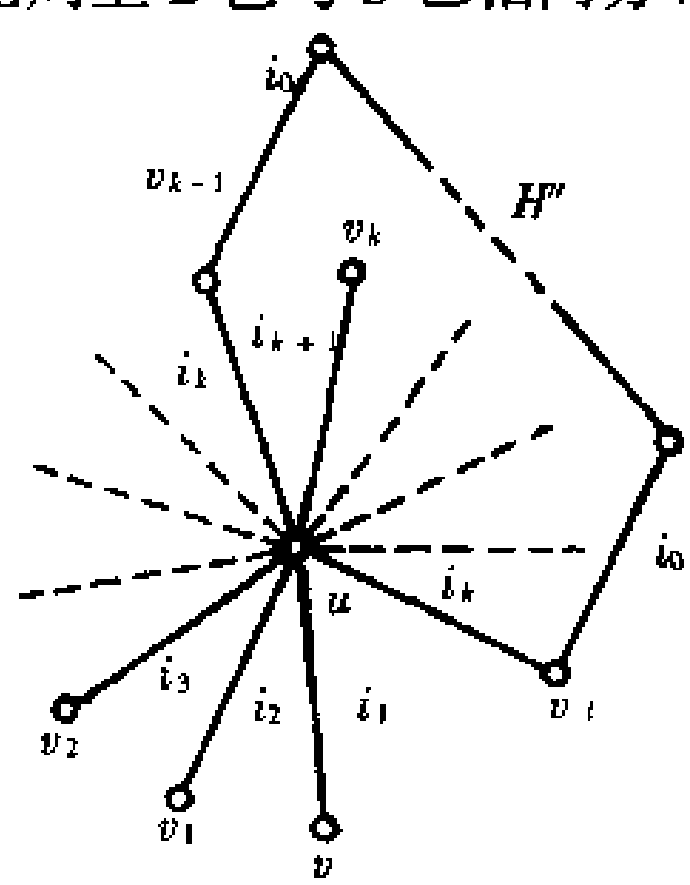


图 1.81

色，即$\chi(G)\leqslant 3$，于是χ(7项轮)$=3$.

定理3 $\chi(G)\leqslant\triangle+1$.

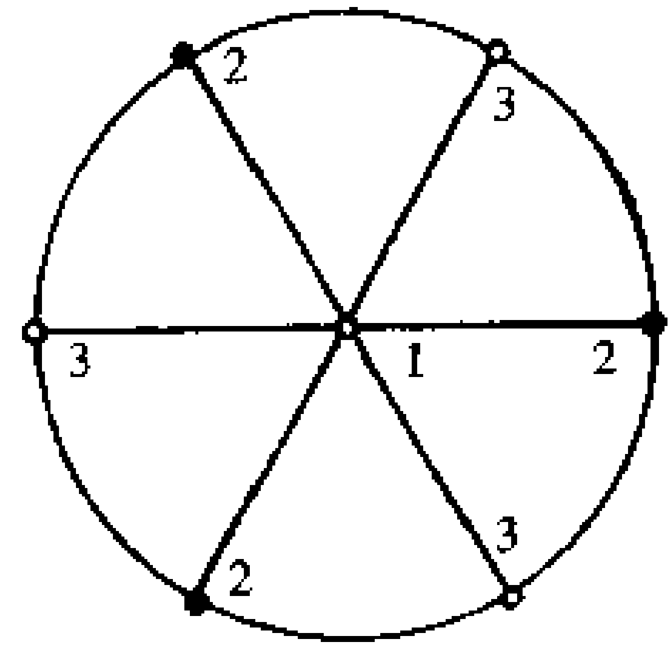


图1.82

证 任取一顶$v\in V(G)$，对v着以$\triangle+1$种颜色之一；取无色顶$u\in V(G)$，对u着以与其邻顶相异的一种颜色($\triangle+1$种色之一)，因$d(u)<\triangle$，u的邻顶至多占用了$\triangle$种颜色，$\triangle+1$种颜色中至少还有一种颜色留给u用.又$|V(G)|<\infty$，故如此进行有限次之后，可以完成G的正常顶着色，故$\chi(G)\leqslant\triangle+1$，证毕.

可以化成求色数的实际问题非常之多，下面拿出三个实例.

(1)考试安排问题：学校共开设n门功课，都要进行期末考试，不少学生不止选修一门课，不能把同一个学生选的两门课放在同一天考试，问期末考试最少几天完成？

化成图论模型则是：以功课为顶，仅当两门功课被同一个学生选修时，在该二顶间连一边，构成图G，$\chi(G)$即为所求.

(2)存储问题：有些货物，放在一起不安全(例如黄鼠狼和小鸡)，问至少准备几个库房？

化成图论模型则是：以货物为顶，仅当两种货物放在一起不安全时，在此二顶间连一边，得一图G，$\chi(G)$即为所求.

(3)频率分配问题(代号F* D-CCAP)：地面上若干无线电发射台，欲对每台分配一个发射频率，频率从小到大依次编号1,2,…，称为信道.为排除同信道干扰，要求使用同信道的两台距离必须大于指定的正数d，问至少要用几个信道？

化成图论模型则是：以$\dfrac{d}{2}$为半径，以每个发射台为中心作圆，仅当两圆有公共点时，在两圆心间连一边，以圆心为顶构成图G，$\chi(G)$即为所求.

定义 4 平面图 G 平面嵌入后，它的 k 面着色是指其面集合 F 的一个划分$(F_1,F_2,\cdots,F_k)$，F_i 中的面皆着以 i 色. 若 F_i 中的面两两无公共边，则称此 k 面着色为正常 k 面着色. 平面图的平面嵌入有 k 面正常着色，但不能进行 $k-1$ 面正常着色，则称 k 是 G 的面色数，记成$\chi^*(G)=k$. □

若 G^* 是 G 的对偶图，则有$\chi(G^*)=\chi^*(G)$.

4 色定理有两种表述方式：

(甲)对任何平面图 G，$\chi(G)\leqslant 4$.

(乙)对任何平面图 G，$\chi^*(G)\leqslant 4$.

(甲)与(乙)是等价的. 事实上，若 G 是平面图，且$\chi(G)\leqslant 4$；由于 G^* 也是平面图，所以$\chi(G^*)\leqslant 4$，又$\chi(G^*)=\chi^*(G)$，故$\chi^*(G)\leqslant 4$. 反之，若$\chi^*(G)\leqslant 4$，不妨设 G 是连通平面图，则$\chi(G)=\chi((G^*)^*)=\chi^*(G^*)$，而 G^* 是平面图，故$\chi^*(G^*)\leqslant 4$，即$\chi(G)\leqslant 4$.

定理 4(Heawood，1890)　χ(平面图)$\leqslant 5$.

证　对 $\upsilon(G)$进行数学归纳法证明.

$\upsilon\leqslant 5$，定理显然成立. 假设 $\upsilon\leqslant n-1$ 时定理已成立，再证 $\upsilon=n$ 时定理仍成立，先把 G 平面嵌入.

因 G 是平面图，$\exists\, v_0\in V(G)$，$d(v_0)\leqslant 5$.

(1)$d(v_0)\leqslant 4$，考虑 $G-v_0$，由归纳法假设，$\chi(G-v_0)\leqslant 5$，再把 v_0 着以与邻顶(不超过四个)相异的第五色，则知$\chi(G)\leqslant 5$.

(2)$d(v_0)=5$，设 $v_1,v_2,\cdots,v_5$ 是 v_0 邻顶，依逆时针序画在平面上，如图 1.83. 分别着以 a,b,c,d,e 五种颜色. 记 $G_0=G-v_0$，G_{ac}是G_0 中由 a,c 色之顶导出的子图. 在 G_{ac}中讨论如下：

(i)v_1 与 v_3 分处两个连通片，在含 v_1 的连通片中，a 与 c 两色互换，由归纳法假设，$\chi(G_0)\leqslant 5$；这时把 v_0 着以 a 色，则得知$\chi(G)\leqslant 5$.

(ii)若 v_1 与 v_3 在同一连通片中,则存在轨 $P(v_1,v_3)$,在 $P(v_1,v_3)$上 a,c 两色交替出现,在 G 中 $v_0v_1P(v_1,v_3)v_3v_0$ 是一个圈,因为已平面嵌入,v_2 与 v_4 分居于此圈内外.显然,在 G_0 中由 b,d 两色导出的子图G_{bd}中,v_2 与 v_4 分属两个连通片,不然,在 G_{bd} 中有轨 $P(v_2,v_4)$,它与 $P(v_1,v_3)$相交于一个公共顶 w,w 在$P(v_1,v_3)$上,应是 a 色或 c 色,w 在$P(v_2,v_4)$上,应是 b 色或d 色,这是不可能的.既然 v_2,v_4 在 G_{bd} 中分属两个连通片,把 v_2 所在的连通片中 b,d 两色互换,再把 v_0 着以 b 色,则得知$\chi(G)\leqslant 5$,证毕.

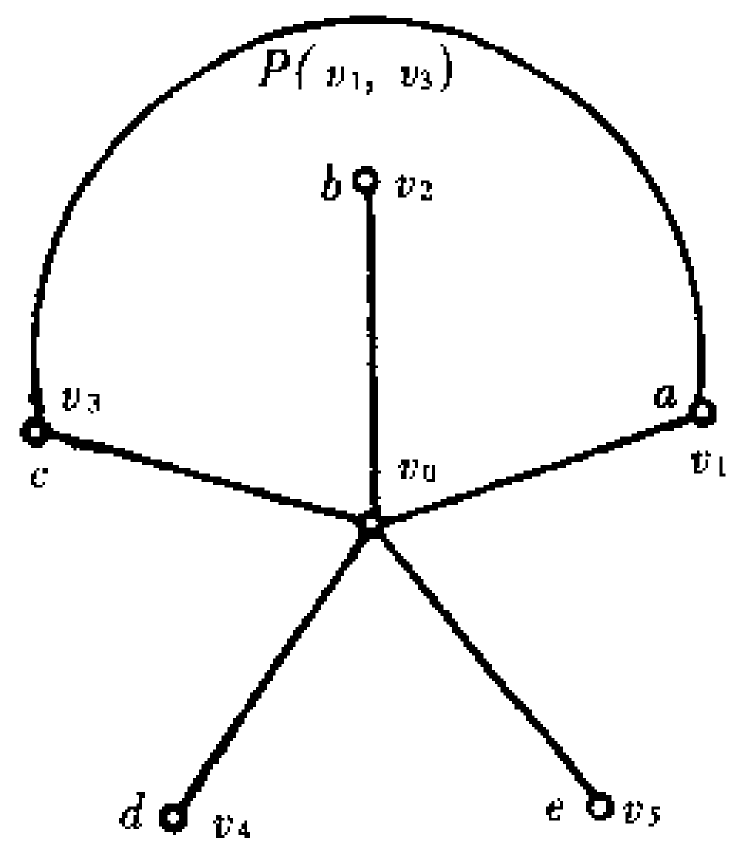


图 1.83

定理 4 的"颜色互换"技术是 Kemple 首创的,此技巧在着色问题中不止一次地运用.

例 3 平面上任作 n 条直线,把平面划分成若干区域,证明:只需两种颜色即可把全部区域上色,可使有公共边界的两区域异色.

证 对 n 进行数学归纳法证明.$n=1$ 时,命题显然成立.假设 $n\leqslant k$ 时已成立,考虑 $n=k+1$,这时从 $k+1$ 条直线中任意删除一条直线 L,由归纳法假设,对剩下的 k 条直线划分的区域,可用 a,b 两种颜色着色,且相邻区域异色.这时,再把 L 复位,且把 L 某一侧的a,b 两色互换,则得证命题对 $k+1=n$ 仍成立,证毕.

1.12.3 色多项式

令有 $k(k\geqslant 1)$种颜色,对给定的标志图进行正常顶着色,问共有多少种不同的着色方式?所谓两次着色方式不同,是指至少有一个顶,两次着色所用的颜色不同.用 $P(G,k)$表示图 G 的这种不同的着色方式的总数.对于给定的 G,$P(G,k)$是从 $\mathbf{N}$ 到$\{0,1,$

$2,\cdots\}$的映射.

由 $P(G,k)$的定义可知:

(1)$P(G,k)>0$,当且仅当$\chi(G)\leqslant k$.

(2)$P(G,k)=k^{\upsilon}$,当且仅当$\varepsilon(G)=0$.

(3)$P(G,k)=k(k-1)\cdots)(k-\upsilon+1)$,当且仅当 $G=K_{\upsilon}$.例如 $P(K_3,3)=3(3-1)(3-2)=6$,见图 1.84,顶处写的数字是颜色代号.

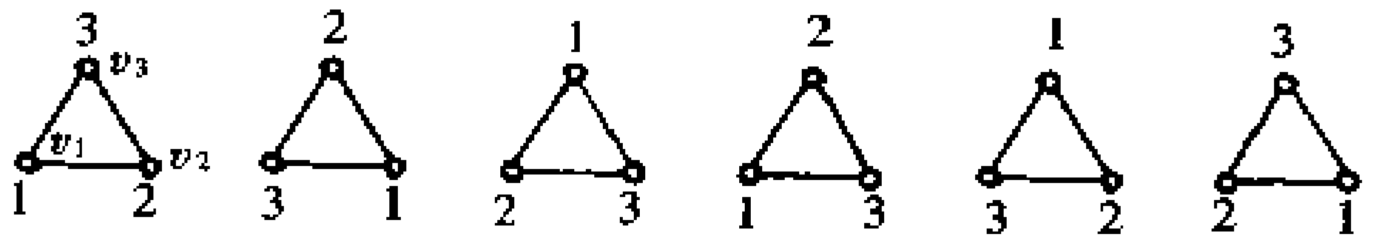


图 1.84

定理 5 G 是单图,$\forall e\in E(G)$,则

$$P(G,k)=P(G-e,k)-P(G\cdot e,k).$$

证 设 $e=uv$,考虑用 k 种颜色对$G-e$ 正常顶着色:

(1)当 u,v 同色时,上色方式数为 $P(G\cdot e,k)$;

(2)当 u,v 异色时,上色方式数 $P(G,k)$.

由(1)与(2)得

$$P(G-e,k)=P(G\cdot e,k)+P(G,k),$$

即

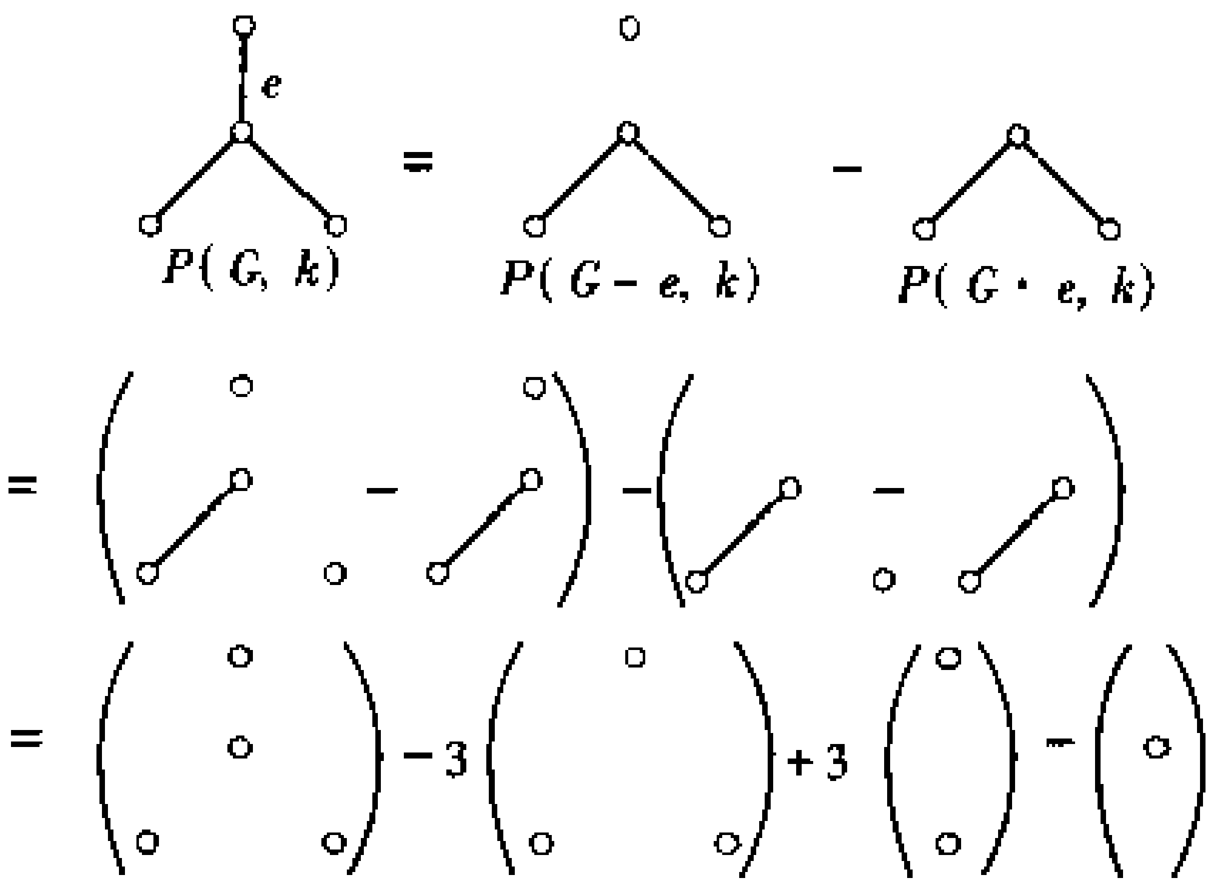
$$P(G,k)=P(G-e,k)-P(G\cdot e,k),$$

证毕.

例如四顶星用 k 种颜色进行正常顶着色的方式数为 $k(k-1)^3$,运算如下:

定理 6 $P(G,k)$是 k 的υ 次多项式,且(1)首项是 k^{υ};(2)第二项为 $-\varepsilon k^{\upsilon-1}$;(3)常数项为零;(4)系数皆整数,且正负交错出现.

证 对 ε 进行数学归纳法证明.不妨设 G 为单图,$G\cdot e$ 中有重边时,只保留重边中的一条边.$\varepsilon=0$ 时,$P(G,k)=k^{\upsilon}$,定理成立.假设 $\varepsilon\leqslant m-1$ 时,定理已成立,考虑 $\varepsilon=m$ 的情形,由归纳法



$$= k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k = k(k-1)^3.$$

假设

$$P(G-e,k)=k^{\upsilon}-(\varepsilon-1)k^{\upsilon-1}+\sum_{i=1}^{\upsilon-2}(-1)^{\upsilon-i}a_ik^i,$$

$$P(G\cdot e,k)=k^{\upsilon-1}-\varepsilon' k^{\upsilon-2}+\sum_{i=1}^{\upsilon-3}(-1)^{\upsilon-i+1}b_ik^i,$$

其中 ε' 是 $G\cdot e$ 的边数. a_i, b_i 是非负整数,由定理 5 得

$$P(G,k)=P(G-e,k)-P(G\cdot e,k)$$

$$=k^{\upsilon}-\varepsilon k^{\upsilon-1}+(\varepsilon'+a_{\upsilon-2})k^{\upsilon-2}+\sum_{i=1}^{\upsilon-3}[(-1)^{\upsilon-i}a_i+(-1)^{\upsilon-i}b_i]k^i$$

$$=k^{\upsilon}-\varepsilon k^{\upsilon-1}+(\varepsilon'+a_{\upsilon-2})k^{\upsilon-2}+\sum_{i=1}^{\upsilon-3}(a_i+b_i)k^i,$$

证毕.

定理 6 告诉我们,$P(G,k)$ 是多项式,图论中称其为色多项式. 色多项式是 1912 年 Birkhoff 冲击 4CC 时引入的,4CC 可写成:

G 是平面图,则 $P(G,4)>0$.

如今 4CC 已被证实为真,所以如果已知图 G 的色多项式为 P

$(G,k)=P_1(k)(k-k_0)$，$k_0\geqslant 4$，则可断定 G 非平面图，其中 $P_1(k)$是一个 k 的 $\upsilon-1$ 次多项式；平面图的色多项式不会有大于 3 的根.

若 $G_1,G_2,\cdots,G_\omega$ 是 G 的连通片，则有

$$P(G,k)=\prod_{i=1}^{\omega}P(G_i,k).$$

色多项式的缺点之一是它不能与图一一对应. 两个图有相同的色多项式时，两图未必同构，这从下面的定理可以看出.

定理 7 G 是树的充要条件是 $P(G,k)=k(k-1)^{\upsilon-1}$.

证 若 $P(G,k)=k(k-1)^{\upsilon-1}$，这时色多项式中有 1 次项，由 $P(G,k)=\prod_{i=1}^{\omega}P(G_i,k)$ 知 $\omega=1$，即 G 是连通图；又 $k(k-1)^{\upsilon-1}$ 的 $\upsilon-1$ 次项系数是 $-(\upsilon-1)$，即 $\varepsilon=\upsilon-1$，故 G 是树.

若 G 是树，用关于 υ 的数学归纳法来证 $P(G,k)=k(k-1)^{\upsilon-1}$. 事实上，$\upsilon=1$ 时，G 是一个顶的树，所以 $P(G,k)=k$，$\upsilon=2$ 时，$P(G,k)=k(k-1)$，定理成立. 假设 $\upsilon\leqslant n-1$ 时，$P(G,k)=k(k-1)^{\upsilon-1}$已成立，考虑 $\upsilon=n$ 时的情形，设 v 是叶，取 $T'=G-v$，由归纳法假设，$P(T',k)=k(k-1)^{n-2}$. 然而，对 T'的每一正常k 顶着色，v 有$k-1$ 种选择，故

$$\begin{aligned}P(G,k)&=P(T',k)(k-1)\\&=k(k-1)^{n-2}(k-1)\\&=k(k-1)^{n-1},\end{aligned}$$

证毕.

关于色多项式，还有不少问题引人注意.

(1)有相同色多项式的图，如果不同构，它们有何共同点？

例如有共同色多项式 $k(k-1)^{\upsilon-1}$的图都是树，它们是一族无圈连通图.

(2)如何判定一个多项式是否色多项式？

例如 $k^4-3k^3+3k^2$ 满足定理 6 的结论，但它并不是色多项

式，事实上，若它是图 G 的色多项式，则 G 连通时，$\varepsilon=3$，而 $\upsilon=4$，故是树，由定理 7，它的色多项式应为 $k(k-1)^{\upsilon-1}=k(k-1)^3\neq k^4-3k^3+3k^2$；若 G 不连通，由于 $\varepsilon=3,\upsilon=4$，G 只能是 $G=K_3\cup K_1$，K_1 即一个孤立顶，这时 $P(G,k)=k(k-1)(k-2)\cdot k\neq k^4-3k^3+3k^2$.

(3)Read 猜想：$P(G,k)$ 中系数绝对值先是严格单调上升，继而严格单调下降.

至今无人反驳亦无人证明 Read 猜想.

习题七

1. χ'(Petersen 图)$=4$.

2. 怎样求二分图的正常 $\triangle$ 边着色？

3. G 是二分图，$\delta(G)>0$，则有一个 δ 边着色，在 G 的任一顶处均有 δ 个颜色出现.

4. $\chi(K_{2n-1})=\chi'(K_{2n})=2n-1$.

5. G 是正则图，υ 是奇数，$\varepsilon\neq0$，则 $\chi'(G)=\triangle+1$.

6. G 是无环单图，$\upsilon=2n+1,\varepsilon>n\triangle$，则 $\chi'=\triangle+1$.

7. 图 G 中任意两个正常 k 边着色对边集的色划分一致，则称 G 是唯一正常 k 边着色图；证明：唯一 3 边正常着色 3 次正则图是 Hamiltan 图.

8. G 是无环图，则存在 $\triangle$ 正则图，使 G 为其子图.

9. 单图 G 与 H 之积是指下面的图：其顶集为 $V(G)\times V(H)$，(u,v) 与 (u',v') 相邻的充要条件是 $u=u',vv'\in E(H)$ 或 $v=v',uu'\in E(G)$. 试证明：

(1)$\chi'(G\times K_2)=\triangle(G\times K_2)$.

(2)H 是顶点不少于 2 的图，且 $\chi'(H)=\triangle(H)$，则 $\chi'(G\times H)=\triangle(G\times H)$.

10. 写出在单图上$\triangle+1$正常顶着色的算法.

11. $\delta(G)>1$, G 是单图,则存在 $\delta-1$ 边着色,使 G 的每顶处出现 $\delta-1$ 种颜色.

12. G 是单图,则$\chi(G)\geqslant\frac{\upsilon^2}{\upsilon^2-2\varepsilon}$.

13. G 中任二奇圈皆有公共顶,则$\chi\leqslant5$.

14. G 的次数列为 $d_1,d_2,\cdots,d_\upsilon$,且 $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_\upsilon$,则 $\chi\leqslant\max_i\min\{d_i+1,i\}$.

15. $\varepsilon>0$,则$\chi\leqslant\{(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\}$.

16. $\chi(G)+\chi(G^c)\leqslant\upsilon+1$.

17. 仅有的1色临界图是 K_1;仅有的2色临界图是 K_2;仅有的3色临界图是 k 阶圈,其中 k 是不小于3的奇数.

18. 求图1.85中两个图的色多项式.

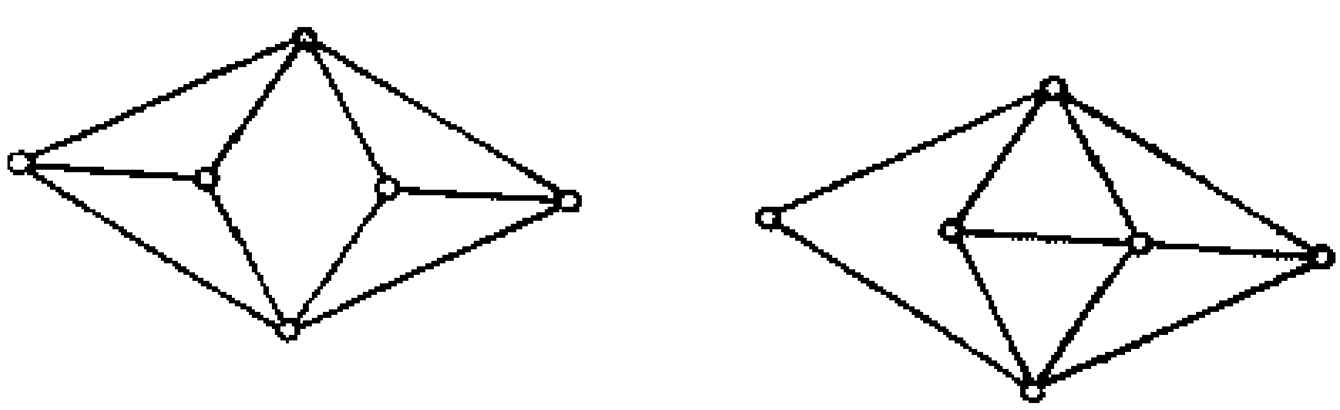


图 1.85

19. 试证 $P(C_n,k)=(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$,其中 C_n 是 n 阶圈.

20. 试证 $P(G,k)=k(k-2)^n+(-1)^nk(k-2)$,其中 G 是 $n+1$ 个顶的轮.

21. $G\cap H$ 是完全图,其中 G 与 H 是单图,则

$$P(G\cup H,k)\cdot P(G\cap H,k)=P(G,k)\cdot P(H,k).$$

22. $P(G,k)=0$ 的实根不大于 υ.

23. χ(n 维立方体)$=$? χ'(n 维立方体)$=$?

24. 图 G 的色多项式为$P(G,k)=(k-5)P_1(k)$,其中 $P_1(k)$是 k 的$\upsilon-1$ 次多项式,问 G 是否平面图? 为什么?

25. 证明：若图 G 满足下列条件之一，则 G 是第二类的图：

(1) ν 是奇数，且 $\sum_{v\in V(G)}[\triangle - d(v)] < \triangle$.

(2) ν 是奇数，G 是正则图.

(3) G 是含割顶的正则图.

(4) G 是从 ν 为奇数的正则图中删去不多于 $\frac{\triangle}{2}-1$ 条边得到的图.

(5) G 是从 ν 为偶数的正则图中的一条边被剖分得到的图.

1.13 支配集、独立集和 Ramsey 数

1.13.1 支配集与独立集

定义 1 $D\subseteq V(G)$ 称为图 G 的支配集，若任何顶点 $u\in V(G)$，要么 $u\in D$，要么 u 与 D 内一顶相邻. 一个支配集称为极小支配集，若它的任何真子集皆非支配集. D_0 是一个支配集，但已无支配集 D_1，使得 $|D_1|<|D_0|$，则称 D_0 是最小支配集，记 $|D_0|=\gamma(G)$，$\gamma(G)$ 称为图 G 的支配数. □

例如只有一个非叶顶的树称为星，星的非叶顶称为星心，星心组成星的最小支配集，γ(星)$=1$.

定理 1 G 中无零次顶，则存在一个支配集 D，使得 $\bar{D}=V(G)-D$ 也是支配集.

证 不妨设 G 连通. 于是 G 有生成树 T，任取定 $v_0\in V(G)$，令

$$D=\{v\mid v\in V(G), d_T(v_0,v)\equiv 0(\mathrm{mod}2)\},$$

$$\bar{D}=\{v\mid v\in V(G), d_T(v_0,v)\equiv 1(\mathrm{mod}2)\}.$$

则 $\bar{D}=V(G)-D$，且显然 D 与 $\bar{D}$ 皆 G 的支配集，证毕.

定理 2 G 中无零次顶，D_1 是 G 的一个极小支配集，则 $\bar{D}_1=V(G)-D_1$ 也是一个支配集.

证 若 $v_0\in D_1$，而 $\bar{D}_1$ 中没有使 $v_0u\in E(G)$ 的顶 u，则 D_1

$-v_0$ 仍为支配集,与 D_1 的极小性相违,故 $\bar{D}_1$ 也是支配集.证毕.

由定理 2 知,对无孤立顶的图,存在两个无公共顶的极小支配集.

定义 2 $I\subseteq V(G)$,且 I 中任二项不邻,则称 I 是图 G 的一个独立集;$\forall u\in V(G)-I$,$I\cup\{u\}$不是独立集,则称 I 是极大独立集;G 中无独立集 I_1,使得 $|I_1|>|I|$,则称 I 是 G 的最大独立集,这时记 $\beta(G)=|I|$,$\beta(G)$称为 G 的独立数.□

正常 k 顶着色时的顶划分 $V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_k$ 之中每个 V_i 皆独立集,$i=1,2,\cdots,k$.

定理 3 一个独立集是极大独立集,当且仅当它是支配集.

证 若 I 是独立集,且是极大独立集,则不存在 $v\in V(G)-I$,使得对任何 $u\in I$,$uv\notin E(G)$,所以 I 是支配集.

反之,若 I 是独立集,又是支配集,则任取 $V(G)-I$ 中一顶 v,$I\cup\{v\}$不是独立集,故 I 是极大独立集,证毕.

定理 4 I 是独立集,当且仅当 $V-I$ 是覆盖集.

证 I 是独立集,等价于没有两端皆在 I 中之边,此又等价于 G 的每一边至少一端在 $V(G)-I$ 中,即 $V(G)-I$ 是覆盖集,证毕.

推论 1 K 是极小覆盖集,当且仅当 $V(G)-K$ 是极大独立集.

推论 2 $\alpha(G)+\beta(G)=\nu$.

定理 5 极大独立集必为极小支配集.

证 不妨设 $\epsilon(G)\neq 0$.设 I 是极大独立集,由定理 3,I 是支配集,又 $\forall v\in I$,v 与 $I-\{v\}$中的顶不相邻,可见 I 是极小支配集,证毕.

1.13.2 $\alpha(G)$,$\beta(G)$,$\gamma(G)$的计算

求 $\alpha(G)$,$\beta(G)$,$\gamma(G)$目前尚无有效算法,我们下面给出的计算方法只对顶数较少的图有用.

1)逻辑运算及其性质

设 X,Y,Z 是三条指令,规定:

"要么执行 X,要么执行 Y"记成 $X+Y$;

"X 与 Y 同时执行"记成 XY.

其运算规则有四:

(1)交换律:$X+Y=Y+X,XY=YX$.

(2)结合律:

$$(X+Y)+Z=X+(Y+Z),(XY)Z=X(YZ).$$

(3)分配律:

$$X(Y+Z)=XY+XZ,(Y+Z)X=YX+ZX.$$

(4)吸收律:$X+X=X,XX=X,X+XY=X$.

上述定律可由定义直接验明;吸收律用法最灵活.

2)求所有极小支配集的公式

$$\Psi(v_1,v_2,\cdots,v_\nu)=\prod_{i=1}^{\nu}(v_i+\sum_{u\in N(v_i)}u),$$

把此公式右端按逻辑运算展开成积之和,每项给出一个极小支配集,所有项则给出一切极小支配集,之中最小者的顶数即 $\gamma(G)$.

例 1 求图 1.86 中一切极小支配集及 $\gamma(G)$.

解 $\Psi(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6)=(v_1+v_2+v_3+v_4)(v_2+v_1+v_4)(v_3+v_1+v_4)(v_4+v_1+v_2+v_3+v_5+v_6)(v_5+v_4+v_6)(v_6+v_4+v_5)$

$=(1+2+3+4)(2+1+4)(3+1+4)(4+1+2+3+5+6)(5+4+6)(6+5+4)$

$=15+16+4+235+236$,

故知$\{v_1,v_5\},\{v_4\},\{v_1,v_6\},\{v_2,v_3,v_5\},\{v_2,v_3,v_6\}$,是所有的极小支配集,$\gamma(G)=1$.

3)求所有极小覆盖集的公式

$$\Phi(v_1,v_2,\cdots,v_\nu)=\prod_{i=1}^{\nu}\left(v_i+\prod_{u\in N(v_i)}u\right),$$

把此公式的右端展开成逻辑积之和,每项给出一个极小覆盖

集,之中最小者顶数为 $\alpha(G)$.

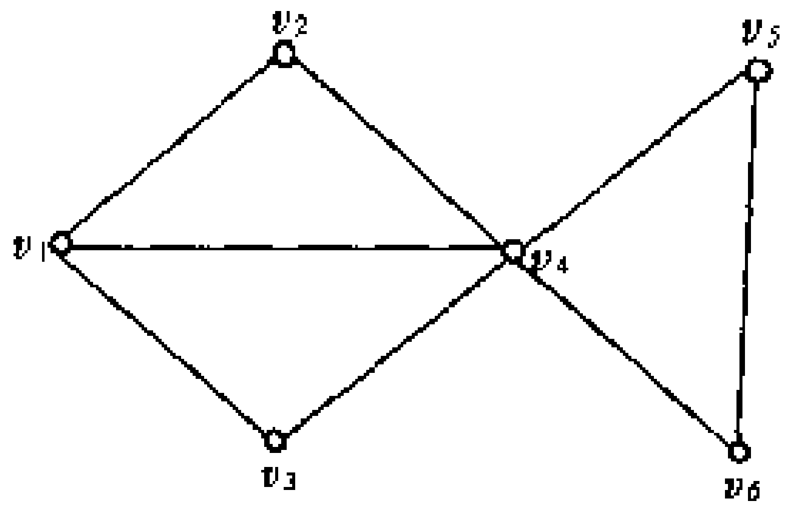


图 1.86

例 2 求图 1.87 中的一切极小覆盖集和 $\alpha(G)$.

解 $\Phi(v_1, v_2, \cdots, v_6)$

$=(1+246)(2+136)(3+245)(4+135)(5+346)(6+125)$

$=2456+1356+1346+2346+1245+1235.$

故知一切极小覆盖集为

$\{v_2, v_4, v_5, v_6\}, \{v_1, v_3, v_5, v_6\}, \{v_1, v_3, v_4, v_6\},$

$\{v_2, v_3, v_4, v_6\}, \{v_1, v_2, v_4, v_5\}, \{v_1, v_2, v_3, v_5\},$

$\alpha(G)=4.$

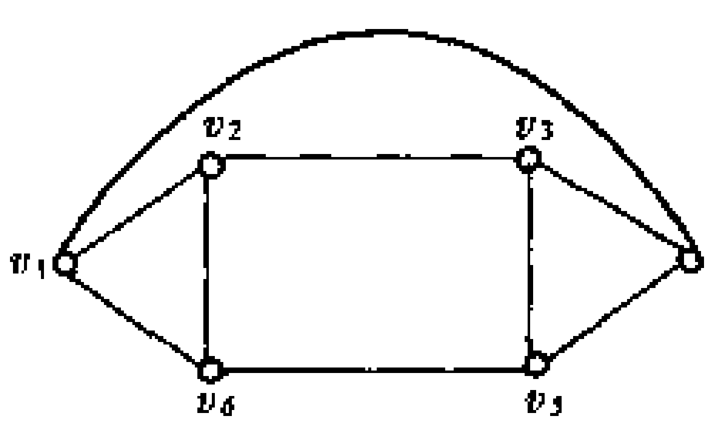


图 1.87

例 3 求图 1.87 中的一切极大独立集和 $\beta(G)$.

解 由极大独立集与极小覆盖集的互补性得一切极大独立集为

$V-\{v_2, v_4, v_5, v_6\}=\{v_1, v_3\},$

$V-\{v_1, v_3, v_5, v_6\}=\{v_2, v_4\},$

$V-\{v_1, v_3, v_4, v_6\}=\{v_2, v_5\},$

$V-\{v_2, v_3, v_4, v_6\}=\{v_1, v_5\},$

$V-\{v_1, v_2, v_4, v_5\}=\{v_2, v_6\},$

$V-\{v_1, v_2, v_3, v_5\}=\{v_4, v_6\},$

$\beta(G)=2.$

例 4　高斯五皇后问题

国际象棋比赛中我方最少几个"后"？位于何处，才能吃掉对方任何位置上的棋子？

解　以棋盘六十四个方格为 64 个顶，同行的两格之间，同列的两格之间以及成 45°角（两对直线方向上）的斜行上两格之间连上边，构成一个皇后图 G，可以求得 $\gamma(G)=5$，图 1.88 五个"●"格组成最小支配集，即我最少有 5 个后，放在"●"格中即可.

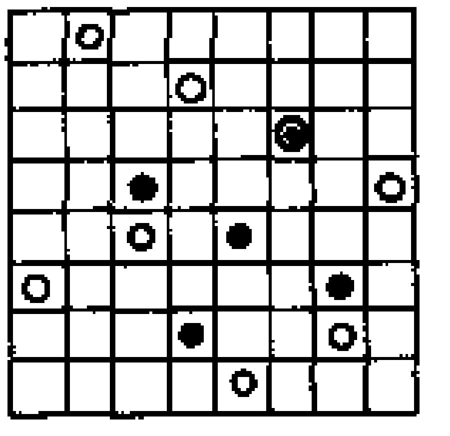


图 1.88

图 1.88 中的 8 个"○"格是皇后图的最大独立集，由定理 5，这 8 个"○"格是一个极小支配集，把我方 8 个皇后放在"○"格中，可吃掉对方任一格上的棋子.

例 5　高斯八皇后问题

国际象棋盘上，双方共有 8 个"后"，无其它棋子，能否出现谁也吃不掉谁的后的局面？

解　在皇后图 G 上考虑最大独立集. G 的最大独立集显然不会超过 8 个顶，图 1.89 中给出的后"●"的布局恰为 8 个后，且形成独立集，可见独立数 $\beta(G)=8$. 图 1.89(a)(b)是高斯 8 后的两种解.(a)图中后的分布用序列(72631485)来表示，每个分量代表后在该竖列中的高度，例如 7 表示后在第一列高为 7，按此代码，

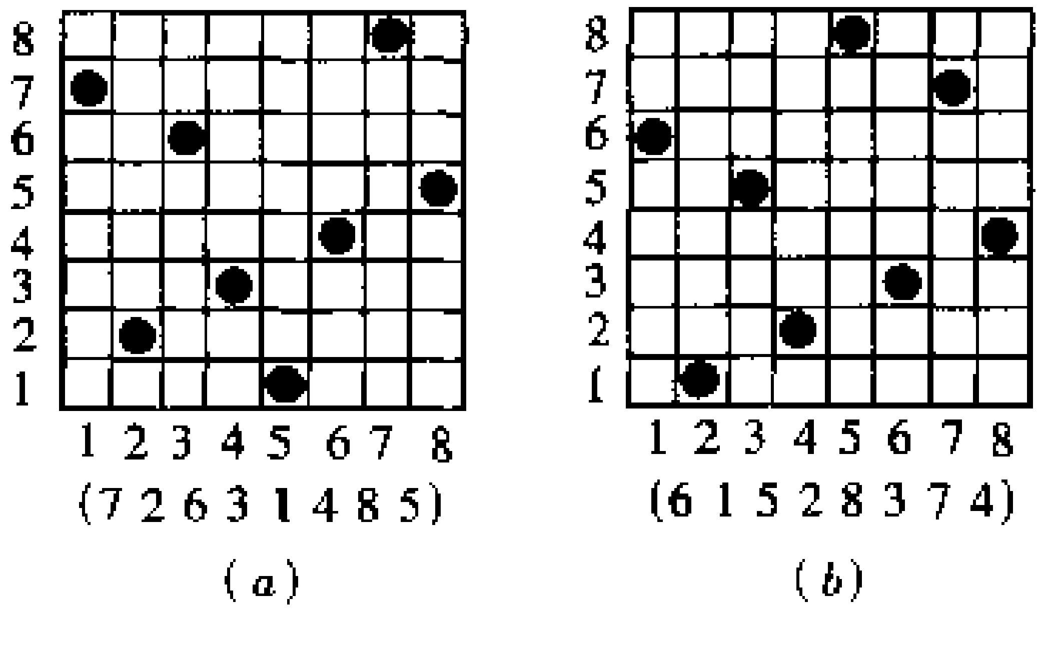


图 1.89

(b)图的后分布为(61528374).形成最大独立集的分布有 12 个,它们是:

(72631485) (61528374) (58417263)

(35841726) (46152837) (57263148)

(16837425) (57263184) (48157263)

(51468273) (42751863) (35281746)

上面 12 个序列中,每个对应一种 8 后分布,满足高斯 8 后的要求.

把上面除(35281746)外的 11 种分布,每个分布图按逆时针每转动 90°得一个 8 后分布,且满足高斯的要求;上述序列每种可转出四个分布,这四个分布按向右下方走向的对角线翻转一下,又得四个合要求的分布,如此共得 88 个后分布图.至于(35281746),旋转 180°后复原,所以它只能产生 4 个分布,总共 88+4=92 种 8 后分布,满足高斯之要求.

1.13.3 Ramsey 数

定义 3 单图 G 的团是 $V(G)$的一个子集 S,使得 $G[S]$是完全图.对$\forall k,l\in\mathbf{N}$,若存在最小自然数 $r(k,l)$,使得 $r(k,r)$个顶的图中含 k 顶团或l 顶独立集,则称 $r(k,l)$为 Ramsey 数.□

例如 $r(1,l)=r(k,1)=1,r(2,l)=l,r(k,2)=k$.

$r(k,l)$是存在唯一的,但确定 $r(k,l)$则是数学中最难的问题之一.

定理 6 $k,l\in\mathbf{N},k\geqslant2,l\geqslant2$,则

$$r(k,l)\leqslant r(k,l-1)+r(k-1,l),$$

若 $r(k,l-1)$与 $r(k-1,l)$皆偶数,则上面的不等式是严格不等式.

证 令 G 是$r(k,l-1)+r(k-1,l)$个顶的图,$v\in V(G)$,分两种情形讨论:

(1)v 与至少$r(k,l-1)$个顶的集合 S 不相邻.

(2)v 与至少$r(k-1,l)$个顶的集合 T 相邻.

由于与 v 相邻的顶数加上与 v 不相邻的顶数等于 $r(k,l-1)+r(k-1,l)-1$，所以要么(1)要么(2)必然成立(v 与 S 不相邻是指 v 与 S 中每个顶皆不邻；v 与 T 相邻是指 v 与 T 中每顶相邻).

在情形(1)，$G[S]$ 中有 k 顶团或 $l-1$ 顶独立集，故 $G[S\cup\{v\}]$ 中有 k 顶团或 l 顶独立集；相似地，在情形(2)，$G[T\cup\{v\}]$ 中有 k 顶团或 l 顶独立集. 由于(1)与(2)必出现其中一种情形，故 G 中含 k 顶团或 l 顶独立集，所以成立

$$r(k,l)\leqslant r(k-1,l)+r(k,l-1).$$

若 $r(k-1,l)$ 与 $r(k,l-1)$ 皆偶数，且 G 是顶数为 $r(k-1,l)+r(k,l-1)-1$ 的图，因而 G 的顶数是奇数，必有一顶 v 是偶次的；v 不会共与 $r(k-1,l)-1$ 个顶相邻，故(1)或(2)成立. 于是 G 中含 k 顶团或 l 顶独立集，所以

$$r(k,l)\leqslant r(k,l-1)+r(k-1,l)-1,$$

即

$$r(k,l)<r(k,l-1)+r(k-1,l),$$

证毕.

定义 4 $r(k,l)-1$ 个顶的既无 k 顶团亦无 l 顶独立集的图称为 (k,l) - Ramsey 图. □

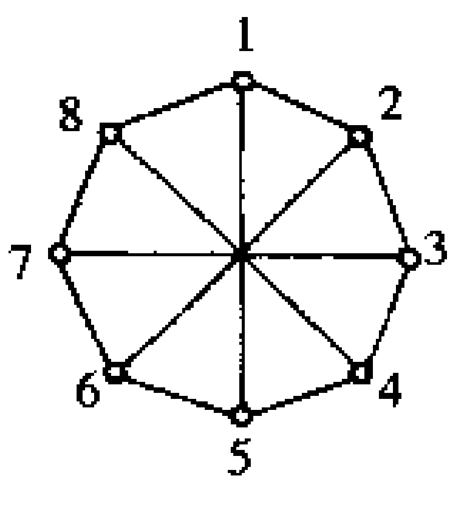


图 1.90

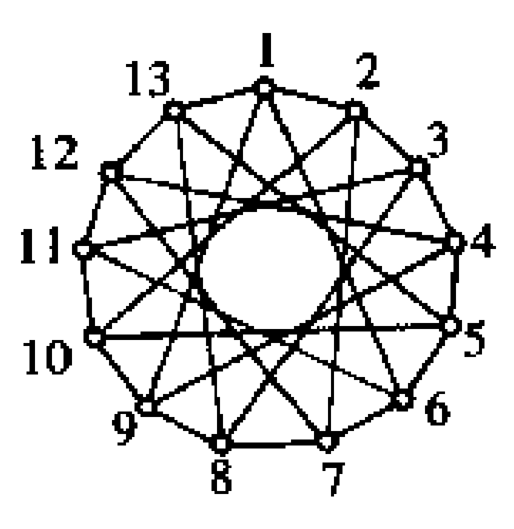


图 1.91

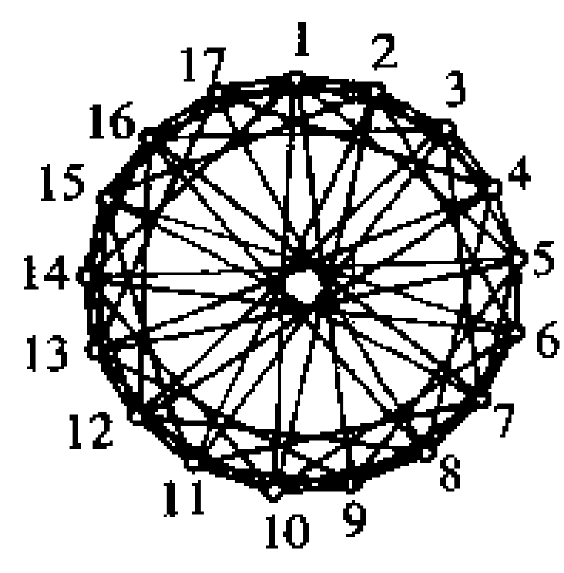


图 1.92

五边形是(3,3) - Ramsey 图.

图 1.90 是(3,4) - Ramsey 图.

图 1.91 是(3,5) - Ramsey 图.

图 1.92 是(4,4) - Ramsey 图.

图 1.93 是(4,5) - Ramsey 图.

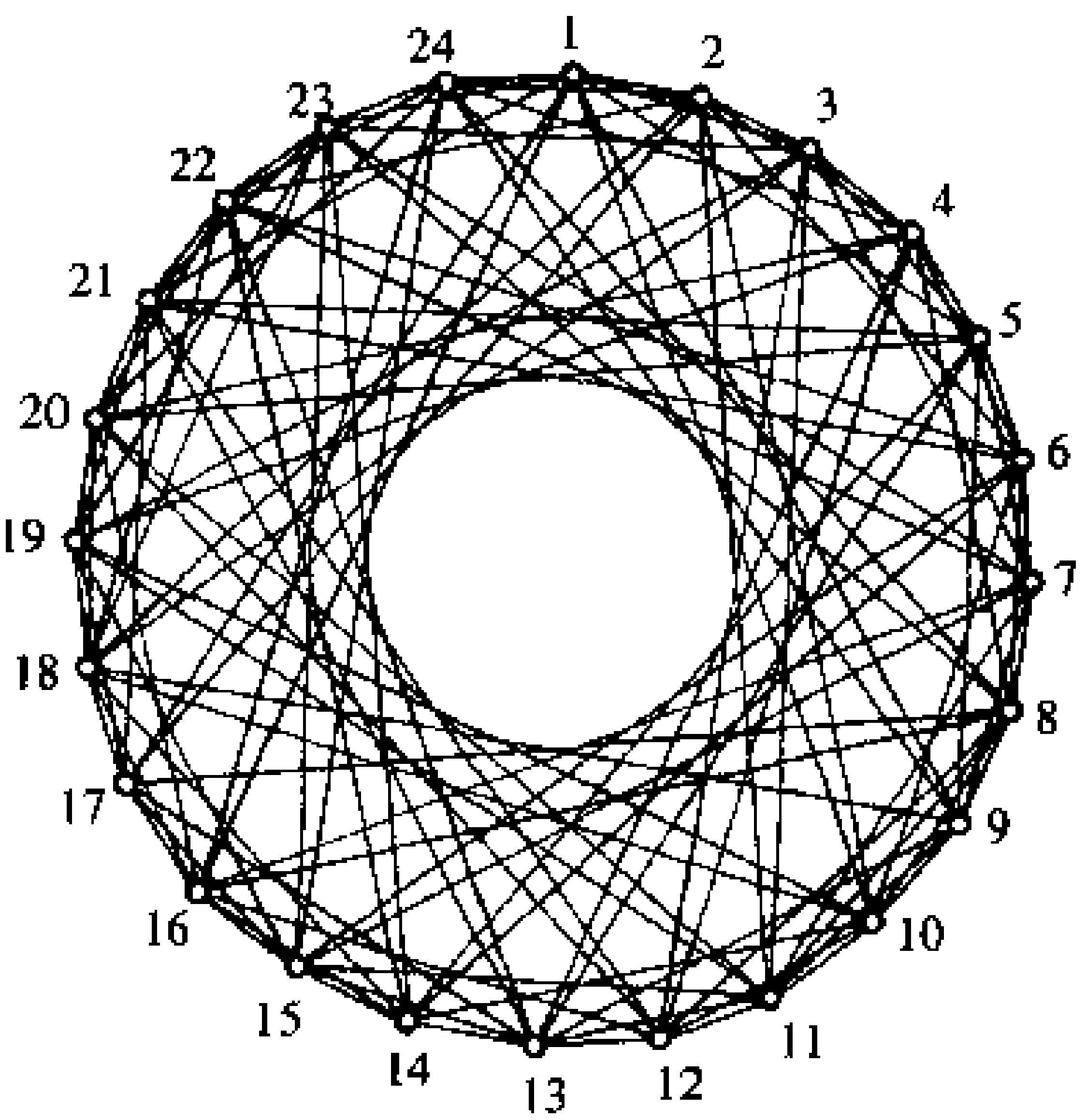


图 1.93

利用一些顶数较少的 Ramsey 图和定理 6 可以确定一些 Ramsey 数.

(1)由于五边形是(3,3) - Ramsey,则 $r(3,3)\geqslant 6$;由定理 6,

$$r(3,3)\leqslant r(3,2)+r(2,3)=6,\text{所以 } r(3,3)=6.$$

(2)由于图 1.90 是(3,4) - Ramsey 图,所以 $r(3,4)\geqslant 9$;由定理 6,

$$r(3,4)\leqslant r(2,4)+r(3,3)-1=4+6-1=9,$$

所以 $r(3,4)=9$.

(3)由于图 1.91 是(3,5) - Ramsey 图,所以 $r(3,5)\geqslant 14$,由定理 5,

$$r(3,5)\leqslant r(2,5)+r(3,4)=5+9=14,$$

所以 $r(3,5)=14$.

(4)由于图 1.92 是(4,4) - Ramsey 图,所以 $r(4,4)\geqslant 18$;由定理 5,

$$r(4,4)\leqslant r(3,4)+r(4,3)=9+9=18,$$

所以 $r(4,4)=18$.

由于 $r(k,l)=r(l,k)$,所以 $r(4,3)=9$, $r(5,3)=14$.

至今人类算得的 Ramsey 数见表 1.

非平凡的 Ramsey 数只得到了九个,即表中圈里的那 9 个数.对 $k\leqslant 10$, $l\leqslant 10$ 的 Ramsey 数,还有 27 个未确定出来,其中每个值的确定都是十分艰巨的任务!

拉姆赛问题至少有三个方面的原因,使得它成为数学当中最引人入胜的课题之一,一是它有相识不相识这种生动直观的社交活动背景,二是它有美丽的拉姆赛图,三是它对数学家具有挑战性的难度.

用着色的语言来叙述,$r(k,l)$就是满足如下条件的最小整数 n,使得 K_n 中任一种 2 边着色 $E(K_n)=E_1\cup E_2$, $E_1\cap E_2=\varnothing$, E_1 着 1 色,E_2 着 2 色,则必出现同色 k 顶团或同色 l 顶团.

Ramsey 理论中似乎含有一种极为深刻的哲理,体现的思想不仅仅属于数学,甚至不仅仅属于自然科学.我们用两种颜色胡乱地对 K_n 的边涂上颜色,上色的过程中究竟哪条边上何种颜色,完全是无规的,结果呢? 只要 n 不小于 $r(k,k)$,则必出现同色的团 K_k,在上述盲目上色之中,绝对没有蓄意去为染出同色 K_k 而努力,在这一理论中,无序无规的活动产生有序有规的后果,无序的行为也有某种规律性! 拉姆赛本人既是杰出的数学家,又是深邃睿智的哲学家,只可惜他英年早逝,不然,他也许会告诉我们更多富于哲理的数学奥秘.

定理 7 $r(k,l)\leqslant\binom{k+l-2}{k-1}$.

证 对 $k+l$ 用数学归纳法.由于 $r(1,l)=r(k,1)=1$, $r(k,$

$r(k,l)$ k \ l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36	?
4	1	4	9	18	25	?	?	?	?	?
5	1	5	14	25	?	?	?	?	?	?
6	1	6	18			?	?	?	?	?
7	1	7	23				?	?	?	?
8	1	8	28					?	?	?
9	1	9	36						?	?
10	1	10								?

表 1

$2)=k$，$r(2,l)=l$，所以对 $k+l\leqslant 5$，定理成立.

假设对一切满足 $5\leqslant k+l<m+n$ 的正整数 l 与 k，定理已成立($m,n\in\mathbf{N}$)，由定理 6，

$$
\begin{aligned}
r(m,n) &\leqslant r(m,n-1)+r(m-1,n)\\
&\leqslant \binom{m+n-3}{m-1}+\binom{m+n-3}{m-2}\\
&=\binom{m+n-2}{m-1},
\end{aligned}
$$

证毕.

定理 8(Erdös,1947)　$r(k,k)\geqslant 2^{\frac{k}{2}}$　$(k>1)$.

证　因 $r(2,2)=2$，对于 $k=2$，定理成立. 下面考虑 $k\geqslant 3$. 令 $\mathcal{G}_n$ 表示 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 为顶集的图集合，$\mathcal{G}_n^{\,k}$ 表示 $\mathcal{G}_n$ 中有 k 顶团的那些图组成的集合，显然

$$|\mathscr{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}, \tag{1}$$

这是因为$\binom{n}{2}$条边组成的边集之每一子集合确定一个$\mathscr{G}_n$中的图，而$\binom{n}{2}$个元素的集之子集个数是$2^{\binom{n}{2}}$. 相似地，$\mathscr{G}_n$中有某个指定的k顶团的图的数目为$2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$. 又因存在$\binom{n}{k}$个不同的$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$的$k$元素子集，所以

$$|\mathscr{G}_n{}^k| \leqslant \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}. \tag{2}$$

由(1)与(2)得

$$\frac{|\mathscr{G}_n{}^k|}{|\mathscr{G}_n|} \leqslant \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} < \frac{n^k 2^{-\binom{k}{2}}}{k!}, \tag{3}$$

设$n < 2^{\frac{k}{2}}$，由(3)得

$$\frac{|\mathscr{G}_n{}^k|}{|\mathscr{G}_n|} < \frac{2^{\frac{k^2}{2}} 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} < \frac{1}{2}, (k \geqslant 3)$$

因此$\mathscr{G}_n{}^k$中的图的个数比$\mathscr{G}_n$中图的个数之半还少. 又$\mathscr{G}_n = \{G \mid G^c \in \mathscr{G}_n\}$，且$S$是图$G$的团的充要条件是$S$是$G^c$的独立集，故有$k$顶独立集的图在$\mathscr{G}_n$中亦不过半. 故在$\mathscr{G}_n$中有某个图，这既无$k$顶团，亦无$k$顶独立集，所以有$r(k, k) \geqslant 2^{\frac{k}{2}}$，证毕.

推论　$m = \min\{k, l\}$，则$r(k, l) \geqslant 2^{\frac{m}{2}}$.

Erdös 给的下界与真实值之间可能相去甚远！例如$k=4$时，定理 8 给出$r(4,4) \geqslant 2^2 = 4$，而$r(4,4) = 18$，相差 14，误差 78%.

1.13.4 多元 Ramsey 数和 Schur 定理

定义 5 对任意给定的 m 个自然数组成的数列 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，$r(k_1,k_2,\cdots,k_m)$是满足下列条件的最小整数 n，当对 K_n 的边任意进行 m 边着色($E_1,E_2,\cdots,E_m$)时，存在某个 i，K_n 中出现 i 色团 K_{k_i}，$1\leqslant i\leqslant m$，$m\geqslant 2$，则称 $r(k_1,k_2,\cdots,k_m)$是 m 元 Ramsey 数.□

与 $r(k,l)$相似地，有估计式

(1) $r(k_1,k_2,\cdots,k_m)\leqslant r(k_1-1,k_2,\cdots,k_m)+r(k_1,k_2-1,\cdots,k_m)+\cdots+r(k_1,k_2,\cdots,k_m-1)-m+2$.

(2) $r(k_1+1,k_2+1,\cdots,k_m+1)\leqslant\dfrac{(k_1+k_2+\cdots k_m)!}{k_1!\ k_2!\ \cdots k_m!}$.

定理 9(Schur, 1916) 设$(S_1,S_2,\cdots,S_n)$是集合$\{1,2,\cdots,r_n\}$的任一划分，其中 $r_n=r\underbrace{(3,3,\cdots,3)}_{n个3}$，则对某个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，$S_i$ 中有三个数 x,y,z，满足 $x+y=z$.

证 K_{r_n}，K_{r_n}之顶集为$\{1,2,\cdots,r_n\}$，用 $1,2,\cdots,n$ 这 n 种颜色对 K_{r_n} 进行边着色，当且仅当$|u-v|\in S_i$ 时，边 uv 着以 i 色；由 r_n 的定义，K_{r_n} 中有单色三角形，即存在三个顶 a,b,c，ab,ac,bc 这三边有同色 i. 无损一般性，设 $a>b>c$，令 $x=a-b$，$y=b-c$，$z=a-c$，则 $x,y,z\in S_i$，且 $x+y=z$，证毕.

例 6 平面上有六个点，任三点皆为一个不等边三角形的顶点，则这些三角形中有一个，其最短边是另一个三角形的最长边.

证 把每个三角形的最短边皆染成红色，剩下的边染成白色. 由于 $r_2=6$，所以必出现同色三角形；又每个三角形都有最短边，所以每个三角形上都有红边，故上述同色三角形是红色的，它的最长边也为红色，同时，此红边又是某一三角形的最短边，证毕.

习题八

1. 求 Petersen 图的所有极小支配集和支配数.

2. 求 Petersen 图所有极小覆盖集和覆盖数.

3. 求 Petersen 图所有极大独立集和独立数.

4. G 为二分图的充要条件是对 G 的任意子图 H,独立数 $\beta(H)\geqslant\frac{1}{2}\nu(H)$.

5. 一个图 G 称为 β - 临界的,若 $\forall e\in E(G)$, $\beta(G-e)>\beta(G)$,证明:β - 临界图无割顶.

6. $r(k,l)=r(l,k)$.

7. 有 3 人相识或 4 人不相识的人群最少几人?

8. 求 γ(二十面体).

9. 求 α(k 维立方体).

10. $\forall k\in\mathbf{N}$,存在一个图 G,G 上的一个支配集中含 k 个极小支配集,试加证明.

11. 证明或反驳:每个覆盖集中必含最小覆盖集.

12. 国际象棋(8×8 棋盘)的"马图","象图","车图","后图"的独立数、支配数和覆盖数各是多少?

13. 证明:图 1.90 是(3,4) - Ramsey 图.

14. 证明:图 1.91 是(3,5) - Ramsey 图.

15. 证明:图 1.92 是(4,4) - Ramsey 图.

16. 证明:(1) $r_n\leqslant n(r_{n-1}-1)+2$;(2) $r_n\leqslant[n!\ e]+1$;(3) $r_3\leqslant 17$.

17. s_n 是满足下列条件的最小整数:把 $\{1,2,\cdots,s_n\}$ 划分成 n 个子集,总存在一个子集,其中有 $x+y=z$ 的解;则 $s_1=2$, $s_2=5$, $s_3=14$.

18. $s_n\geqslant 3s_{n-1}-1$.

19. $s_n\geqslant\frac{1}{2}(3^n+1)$.

20. $s_n\geqslant\frac{1}{2}(27(3)^{n-3}+1)$.

21. 一个国际社团,由六个国家的 1976 人组成,对每个人任编

一号码，号码从 1 编到 1976，则一定有一人，其号码是其某同胞号码的 2 倍或两同胞号码之和，试加证明．且问：

(1)把 1976 改成 1958，命题还成立吗？

(2)若只有 364 名人士，可以有一种编号方法，使上述同胞号码关系不出现吗？

(3)把 6 国改成 $n(n\geqslant 6)$ 国，问至少多少位人士参加，才能发生命题中所述的同胞号码关系？至多多少人参加，才可设法避免那种同胞号码关系？

1.14 有向图

1.14.1 有向图的连通性

定义 1 把有向图各边方向去掉，所得的无向图称为该有向图的底图；有向图 G 的底图连通时，称此有向图 G 是弱连通有向图；对于有向图 G 的顶 u,v，若存在有向轨 $p(u,v)$，则称 u 可达 v；$\forall u,v\in V(G)$，不但 u 可达 v，而且 v 可达 u 时，称 G 是强连通有向图；若 $\forall u,v\in V(G)$，u 可达 v 或 v 可达 u 时，称 G 是单连通有向图．□

定理 1 G 是强连通有向图的充要条件是 G 的一切顶在一个有向回路上．

证 设 G 是强连通有向图，$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_\nu\}$，则存在有向轨 $P_1(v_1,v_2),P_2(v_2,v_3)\cdots,P_{\nu-1}(v_{\nu-1},v_\nu),P_\nu(v_\nu,v_1)$，于是 $\bigcup\limits_{i=1}^{\nu}P_i$ 为含一切顶的有向回路．

反之，若 G 的一切顶皆在一个有向回路上，则 $\forall u,v\in V(G)$，存在有向轨 $P_1(u,v)$ 与 $P_2(v,u)$，所以 G 强连通，证毕．

定理 2 有向图 G 为单连通有向图的充要条件是 G 中存在有向生成道路．

证 充分性不足道，下证必要性．

已知 G 是单连通有向图，则 $\forall V_1\subseteq V(G)$，总存在 $v_1\in V_1$，对任何 $v\in V_1$，使得 v_1 可达 v，不然的话，必有一个最小的无此性质的顶子集 $U=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$，在 $U-\{v_k\}$ 中存在一个顶 v，对任意的 $u\in U-\{v_k\}$，v 不可达 u. 由此知，U 中只能是 v 不能达 v_k，同时 v_k 不可达 v，这与 G 是单连通有向图矛盾，证毕.

定理 3 无向图 G 可定向成强连通有向图的充要条件是 G 是无桥连通图.

证 若无向图 G 可定向成强连通图，而 G 中有桥 $e=uv$，则 e 定向后，u 与 v 两顶不能彼此可达，与强连通定义相违，所以 G 中无桥.

反之，若 G 是无桥连通图，G 不是树，G 上有圈 G_1，若 G_1 是 G 的生成子图，则把 G_1 上的边定向，使 G_1 成为有向圈，而不在 G_1 上的边可任意定向，即可使 G 定向成强连通子图. 若 G_1 不是 G 的生成子图，存在 $v_1\notin V(G_1)$，又存在 $v_2\in V(G_1)$，使得 $v_1v_2\in E(G)$. 由于 G 中无桥，故 $d(v_1)>1$，于是在 $G-v_1v_2$ 中，存在一轨 $P(v_1,u)$，$u\in V(G_1)$. 把边 v_1v_2 定向成从 v_1 指向 v_2，把 $P(v_1,u)$ 上的边定向成使 $P(v_1,u)$ 从 u 指向 v_1，考虑有向图 $G_2=G_1\cup P(u,v_1)\cup P(v_1,v_2)$，其中 $P(v_1,v_2)=v_1v_2$，于是 G_2 的一切顶在有向回路上，由定理 1，G_2 是强连通有向图. 令 G_2 扮上述 G_1 的角色，重复上述推理，可得比 G_2 的顶更多的强连通图 G_3，逐次增添强连通图 $G_1,G_2,\cdots,G_k$ 的顶数，最后会得到一个强连通图 G_n，G_n 是 G 的生成子图. 把不在 G_n 中的 G 的那些边任意定向，则把 G 定向成了强连通图，证毕.

1.14.2 有向轨与竞赛图

有向图上有向轨的长度与其底图上的轨的长度一般没有多大关系，例如图 1.94 中的底图有长 16 的无向轨，但做为有向图它最长只有长 2 的有向轨，我们发现它的色数是 3. 一般地，色数与有向轨之间有下面的定理.

定理 4 以 G 为底图的有向图 G 中存在长 $\chi(G)-1$ 的有向轨.

证 设E'是使有向图$G'=G-E'$(仍以G表示以G为底图的有向图)不含有向圈的最小边子集,设G'中最长的有向轨长k.把颜色$1,2,\cdots,k+1$分配给G'的顶,当以v为起点的G'内有向轨最大长度是$i-1$时,对v着以i色.用V_i表示i色顶的集合,下证$(V_1,V_2,\cdots,V_{k+1})$是G的正常$k+1$顶着色.

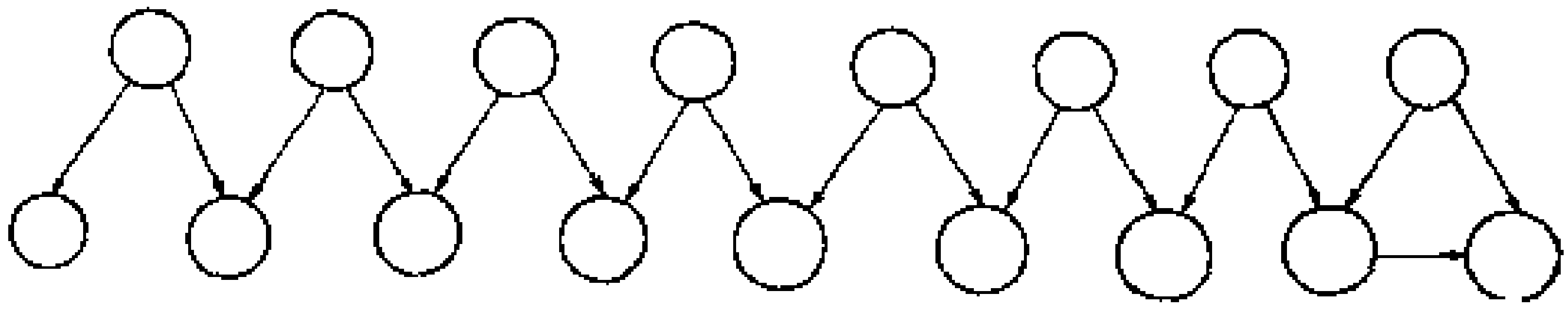


图 1.94

首先看到,G'中任一有向轨起点与终点异色.事实上,若$P(u,v)$是G'的一条有向轨,设$u\in V_i$,则有有向轨$Q=vv_2v_3\cdots v_i\subseteq G'$;又$G'$中无有向圈,则$P(u,v)\cup Q$是起点为$u$,长至少为$i$的有向轨,于是$u\notin V_i$.

再证G的任一边头尾异色.设$uv\in E(G)$,若$uv\in E(G')$,则uv是G'的有向轨,u与v异色;若$uv\notin E(G')$,即$uv\in E'$,由E'的最小性,$G'+uv$含有向圈C.$C-uv$是G'的一条有向轨,故u与v亦异色.

至此得证$(V_1,V_2,\cdots,V_{k+1})$是G的正常$k+1$顶着色,故$\chi(G)\leqslant k+1$,$k\geqslant\chi(G)-1$,所以G有长$\chi(G)-1$的有向轨,证毕.

定义 2 完全图每边定向后得到的有向图称为竞赛图,竞赛图中若一顶通过至多长2的有向轨可以到达任何其它顶时,此顶称为王.□

推论 1 竞赛图K_v中存在有向 Hamiltm 轨(含G一切顶的有向轨).

证 $\chi(K_v)=v$,由定理4,竞赛图K_v中含长$v-1$的有向轨,此种轨即竞赛图中的有向 Hamilton 轨,证毕.

定理 5 G是无环有向图,则其底图中有一独立集S,使得V

$(G)-S$ 中每个顶可通过长至多是 2 的有向轨由 S 内的顶达到.

证 对 $|V(G)|=\upsilon$ 进行数学归纳法证明.

$\upsilon=1$ 时,定理自然成立.假设顶数比 υ 小的有向图,定理已成立,下面讨论顶数为 υ 的有向图 G. $\forall v\in V(G)$,令 $G'=G-(\{v\}\cup N^+(v))$,其中 $N^+(v)$ 表示以 v 为尾的边的头组成的集合.由归纳法假设(不妨设 $V(G')\neq\emptyset$),存在 G' 的一个独立集 S',G' 中不在 S' 里的顶可由 S' 中的顶经至多长 2 的有向轨达到;若 $uv\in E(G)$,且 $u\in S'$,那么 $N^+(v)$ 的每个顶可由 u 通过至多长 2 的有向轨达到,这时,定理成立.若对任何 $u\in S'$,$uv\notin E(G)$,则 $S=S'\cup\{v\}$ 满足定理要求,这里 $u\notin S'$,证毕.

推论 2 竞赛图中有王.

证 K_υ 的独立集由一个顶组成,由定理 5 知存在 K_υ 的某个顶是王,证毕.

注意,王未必唯一,例如图 1.95 中有三个王 v_1,v_2,v_3.

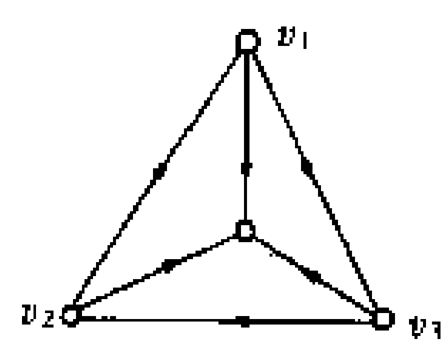


图 1.95

在竞赛图中若 uv 是一条有向边,则称 u 胜 v,u 得 1 分,v 得零分.若 u 胜 v 或 u 胜 w,w 胜 v,则称 u 优于 v.王点即优于其它一切顶之点.

定理 6 竞赛图中得分最多者为王.

证 设 u 是得分最多的顶;若 u 得 $\upsilon-1$ 分,(υ 是全图顶数),则 u 优于其它一切顶,u 是王.若 u 得分少于 $\upsilon-1$,设它胜过 $v_1,v_2,\cdots,v_k$,而败给了 $v_{k+1},v_{k+2},\cdots,v_{\upsilon-1}$,这时,若 v_{k+1} 胜了 $v_1,v_2,\cdots,v_k$,则 v_{k+1} 比 u 多胜一次,与 u 得分最多矛盾,所以存在 v_j,$1\leqslant j\leqslant k$,v_j 胜过 v_{k+1},于是出现 u 胜 v_j,v_j 胜 v_{k+1} 的局面,即 u 优于 v_{k+1},同理可证 u 优于 $v_{k+2},\cdots,v_{\upsilon-1}$ 即 u 为王,证毕.

注意,王未必得分最多,例如图 1.96 中,u_2 得 3 分,它得分最多,是王;但 v_1 也是王,却只得 2 分.

定理 7 竞赛图中 u 是唯一王的充要条件是 u 得 $\upsilon-1$ 分.

证 设 u 得分 $\upsilon-1$，由定理 6，u 是王．若还有一个王 v，则应该是存在一边 vu 或存在有向轨 vwu，总之 u 是某有向边之头，即 u 至少败过一次，与 u 得分 $\upsilon-1$ 相违．可见这时王是唯一的．

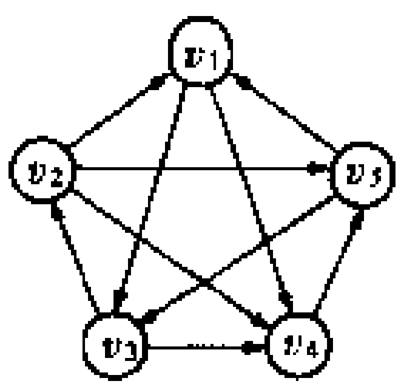


图 1.96

反之，若 u 是唯一的王，若 u 得分不超过 $\upsilon-2$，则存在有向边以 u 为头，以所有这种以 u 为头的边之尾导出一个子竞赛图 G'，由推论 2，G' 中有王 v；显然 v 也是竞赛图 K_υ 之王，与 K_υ 的王唯一矛盾，故 u 得分 $\upsilon-1$，证毕．

1.14.3 有向圈与竞赛图

定义 3 称无环且无方向相同端点亦相同的所谓重边的有向图为严格有向图；G 是有向图，$S,T\subset V(G)$，$S\cap T=\varnothing$，则 (S,T) 表示尾在 S 头在 T 中的边之集合；$\delta^-=\min\limits_{v\in V(G)}\{d^-(v)\}$，$\delta^+=\min\limits_{v\in V(G)}\{d^+(v)\}$；有向图 G 中含一切顶的有向圈称为有向 Hamilton 圈，含有向 Hamilton 圈的有向图称为有向 Hamilton 图．□

定理 8 $\upsilon\geqslant3$ 的强连通竞赛图的每一顶都含于某有向 k 阶圈上，$k=3,4,5,\cdots\cdots,\upsilon$．

证 设 G 是强连通竞赛图，$\forall u\in V(G)$，取 $S=N^+(u)$，$T=N^-(u)$，其中 $N^+(u)$ 是以 u 为尾的边的头组成的集合，$N^-(u)$ 是以 u 为头的边的尾组成的集合．我们来证明 u 在 G 的三阶圈上．事实上，由于 G 是强连通竞赛图，S 与 T 皆非空，且 $(S,T)\neq\varnothing$，故有边 vw，$v\in S$，$w\in T$，于是 u 在三角形 $uvwu$ 上，即在三阶圈上，见图 1.97．

下面用数学归纳法证明．假设 u 在某些长为 $3,4,\cdots,n$ 的有向圈上，考虑 u 是否在某个长 $n+1$ 的有向圈上．设 $C=v_0v_1v_2\cdots v_n$，其中 $v_0=v_n=u$．若存在 $v\in V(G)-V(C)$，v 是尾在 C 上的一边的头，又是头在 C 上的一边的尾，那么 C 上有顶 v_i,v_{i+1}，使得 $v_iv,vv_{i+1}\in E(G)$，于是 u 在 $n+1$ 阶圈 $v_0v_1\cdots v_ivv_{i+1}v_{i+2}$

$\cdots v_n$ 上.否则,用 S 表示 $V(G)-V(C)$ 中与 C 连接的边的头集,T 表示这些边的尾集,见图 1.98.由于 G 是强连有向图.$S\neq\varnothing$,$T\neq\varnothing$,$(S,T)\neq\varnothing$,存在 $v\in S$,$w\in T$.使得 $vw\in E(G)$,故 u 在 $n+1$ 阶圈 $v_0vwv_2v_3\cdots v_n$ 上,证毕.

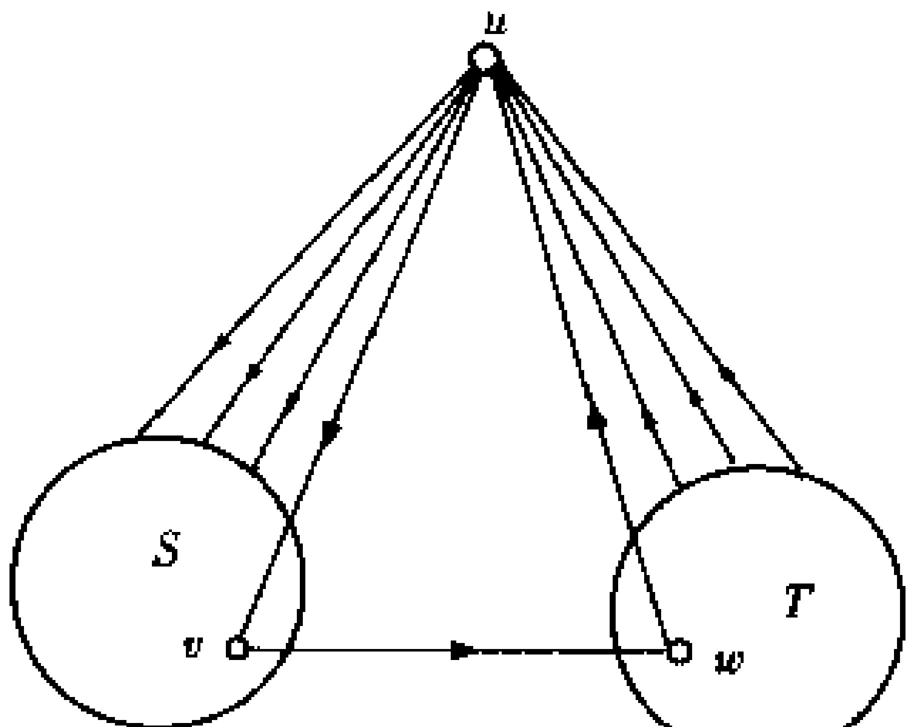


图 1.97

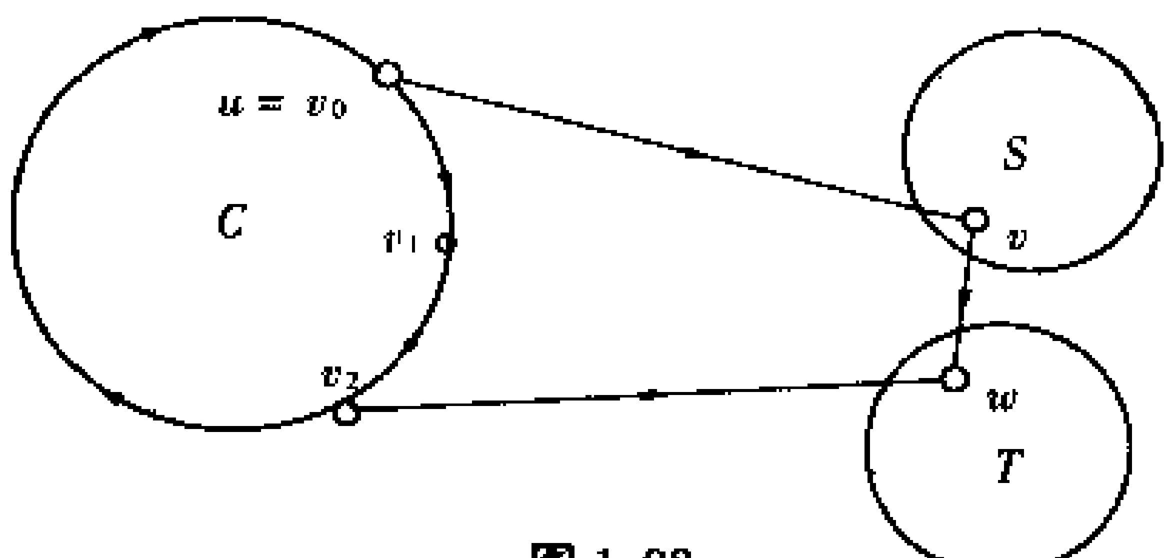


图 1.98

推论 3　G 是强连通竞赛图的充要条件是竞赛图 G 是有向 Hamilton 图.

引理 1　G 是严格有向图,则 G 有长不小于 $\max\{\delta^-,\delta^+\}$ 的有向轨.

证　不妨设 $\max\{\delta^-,\delta^+\}=\delta^+$,不然考虑 G 的反向图,即把 G 的各边定向反过来得到的有向图 G',在 G 与 G' 中对应的有向

轨长一致. 设 $P(u_0,v_0)$是 G 中最长的有向轨,若 P 的长度小于 δ^+,由于 G 是严格有向图,必有尾为 v_0 而头不在 P 上的边,从而 P 可延长,与 P 之最长性矛盾,所以 $P(u_0,v_0)$的长不小于 $\delta^+=\max\{\delta^-,\delta^+\}$,证毕.

引理 2 G 是严格有向图,且 $\max\{\delta^-,\delta^+\}=k>0$,则 G 中有长度不小于 $k+1$ 的有向圈.

证 不妨设 $\max\{\delta^-,\delta^+\}=\delta^+$,由定理 1,$G$ 中有一条最长有向轨 $P(u_0,v_0)$,其长度不小于 $k>0$. 由于 G 是严格有向图,从而应有 $d^+(v_0)$条以 v_0 为尾的边,这些边的头两两相异,又 $d^+(v)\geqslant k$,由 $P(u_0,v_0)$的最长性,这些以 v_0 为尾的边之头皆在 $P(u_0,v_0)$上,故 G 中含长度不小于 $k+1$ 的有向圈,证毕.

定理 9 G 是严格有向图,且 $\min\{\delta^-,\delta^+\}\geqslant\frac{\upsilon}{2}>1$,则 G 是有向 Hamilton 图.

证 设 G 是满足定理条件但不含 Hamilton 圈的有向图,G 中最长圈之长为 l,$C=v_1v_2\cdots v_lv_1$ 是 G 中长 l 的一个有向圈. 由引理 2,G 中有长不小于$\frac{\upsilon}{2}+1$ 的有向圈,故 $l>\frac{\upsilon}{2}$. 令 $P(u,v)$是 $G-V(C)$中最长有向轨,其长为 m,显然

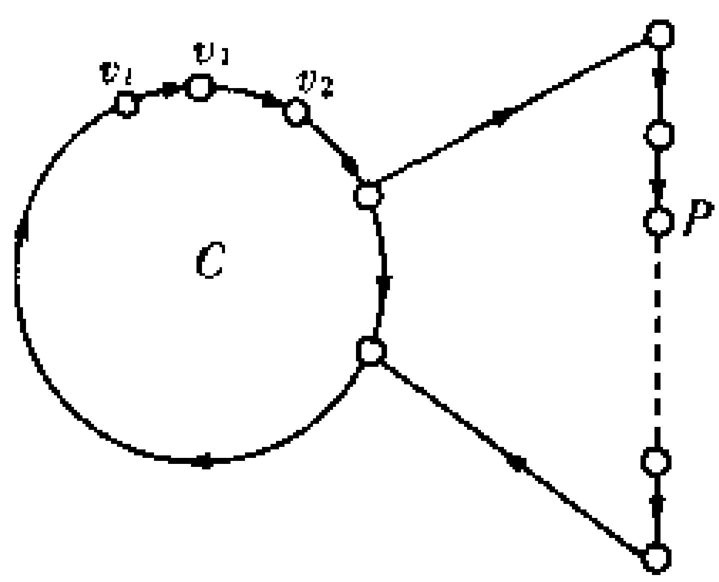


图 1.99

$$\upsilon\geqslant l+m+1,$$

见图 1.99. 又因 $l>\frac{\upsilon}{2}$,故有

$$m<\frac{\upsilon}{2}. \tag{1}$$

令

$$S=\{i\mid v_{i-1}u\in E(G)\},\ T=\{i\mid wv_i\in E(G)\}.$$

首先证明 $S\cap T=\varnothing$. 事实上,令 C_{jk}是 C 上起于 v_j 止于 v_k 的部

分，若某个 i 在$S\cap T$之内，则 G 中就含有长 $l+m+1$ 的有向圈 $C_{i,i-1}v_{i-1}uP(u,v)vv_i$，与 C 是G 的最长圈相违. 故知

$$S\cap T=\varnothing. \tag{2}$$

因 $P(u,v)$是 $G-V(C)$中的最长有向轨，故

$$N^-(u)\subseteq V(P)\cup V(C).$$

但在 C 上以 u 为头的边之条数为$|S|$，且 $d_p^-(u)\leqslant m$，故有

$$|S|\geqslant\frac{v}{2}-m. \tag{3}$$

相似地有

$$|T|\geqslant\frac{v}{2}-m. \tag{4}$$

由(1)知 $S\neq\varnothing,T\neq\varnothing$，由(3)与(4)及 $v\geqslant l+m+1$ 得

$$|S|+|T|\geqslant l-m+1. \tag{5}$$

由(2)得

$$|S\cup T|\geqslant l-m+1. \tag{6}$$

又 $S\neq\varnothing,T\neq\varnothing,S\cap T=\varnothing$，故存在自然数 i,k，使得 $i\in S,i+k\in T$，且

$$i+j\notin S\cup T, 1\leqslant i<k. \tag{7}$$

上面运算是在 mod$l$ 意义下进行的. 由(6)与(7)知 $k\leqslant m$，故 $C_{i+k,i-1}v_{i-1}uP(u,v)vv_{i+k}$是有向圈，其长为 $l+m+1-k$，比 C 还长，这不可能，证毕.

1.14.4　有向 Euler 图

与无向图中 Euler 图的有关内容相似地可以给出有向图中 Euler 图的定义和理论.

定义 4　含有向图中每条边的有向行迹叫做有向 Euler 行迹，闭的有向 Euler 行迹叫做有向 Euler 回路，含有向 Euler 回路的有向图称为有向 Euler 图. □

定理 10　G 是弱连通有向图，则下述三个命题等价：

(1) G 是有向 Euler 图.

(2) $\forall v\in(G), d^-(v)=d^+(v)$.

(3) $G=\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$，其中 C_i 是有向圈，且 $E(C_i)\cap E(C_j)=\varnothing$，$1\leqslant i<j\leqslant n$，$n$ 为某自然数.

定理 11 G 是弱连通有向图，且

$$d^-(v)=\begin{cases} d^+(v), v\in V(G)-\{u_1,u_2\}, \\ d^+(v)-1, v=u_1, \\ d^+(v)+1, v=u_2, \end{cases}$$

则 G 中有以 u_1 为起点以 u_2 为终点的有向 Euler 行迹.

下面讨论如何运用有向 Euler 图的理论设计计算机的关键部件有效磁鼓.

一个磁鼓，相当于把一个曲面划分成 2^n 个部分，每一部分由导体或由绝缘体制成. 图 1.100 中磁鼓接触器的位置按顺时针读读出 010，顺时转动一格得 101，再转动一格得 010，这就坏了，这个状态与开始的状态无法区别！

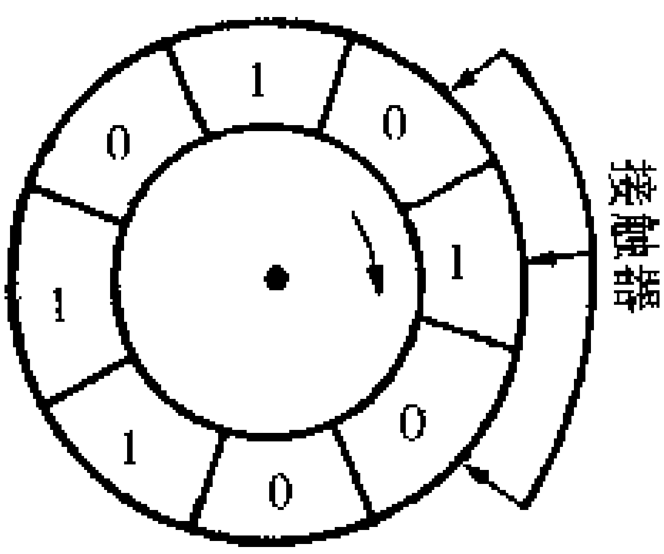


图 1.100

一般地，设计一个磁鼓，把鼓面划分成 2^n 个格子，每个格子上分配一个数字 0 或 1，但要求满足"不重复，不遗漏"的条件.

(1) 不重复　即相继的 k 个接触器指针，随着鼓面的转动所读出的 2^n 个 k 位 0－1 码要两两相异，为此必须 $2^k\geqslant 2^n$.

(2) 不遗漏　即 2^k 个不同的 k 位 0－1 码每个都对应鼓的一个状态，为此 $2^k\leqslant 2^n$.

由(1)与(2)知必须 $k=n$.

$k=n$ 的不重复不遗漏的磁鼓叫做有效磁鼓，图 1.100 不是有效磁鼓.

对于任给的 $k=n$，如何设计一个有效磁鼓？作答如下：

构作有向图 G_n：

$$V(G_n)=\{p_1p_2\cdots p_{n-1}\mid p_i\in\{0,1\},1\leqslant i\leqslant n-1\};$$

$\forall v_1,v_2\in V(G)$, $v_1v_2\in E(G_n)\Leftrightarrow v_1=p_1p_2\cdots p_{n-1}$, $v_2=p_2p_3\cdots p_{n-1}p_n$, $p_i\in\{0,1\}$, $i=1,2,\cdots,n$. 这时记边 $v_1v_2=p_1p_2\cdots p_{n-1}p_n$.

容易看出，$\forall v\in V(G_n)$，有 $d^-(v)=d^+(v)=2$，事实上，若 $v=p_1p_2\cdots p_{n-1}$，则恰有两个边 a_1,a_2 以 v 为头，恰有两个边 a_3，a_4 以 v 为尾，

$$a_1=(0p_1p_2\cdots p_{n-2})v,\quad a_2=(1p_1p_2\cdots p_{n-2})v,$$
$$a_3=v(p_2p_3\cdots p_{n-1}0),\quad a_4=v(p_2p_3\cdots p_{n-1}1).$$

由定理 10，G_n 是有向 Euler 图，沿 G_n 的有向 Euler 回路每边取第一位数字，所以 0－1 数串顺次抄入 2^n 个格子便完成了有效磁鼓之设计，图 1.101，图 1.102 中画的是 $k=n=4$ 的有效磁鼓设计图.

作为有向图讨论的结尾，介绍方向对偶性.

方向对偶原则：每个关于有向图的定理，存在一个对偶的定理，它是由前者的每个概念代之以反向的概念得出的. □

以下面两例说明之.

定理 α 有向图的底图中无圈，则存在 $v\in V(G)$，使得 $d^+(v)=0$.

定理 α 是真的，事实上，若 $P(u,v)$是无圈底图对应的有向图 G 中的最长有向轨，则 $P(u,v)$之终点 v 满足 $d^+(v)=0$，不然，存在以 v 为尾的有向边，此边之头只能在 $P(u,v)$上，于是与底图无圈矛盾.

定理 α′ 有向图的底图无圈，则存在 $v\in V(G)$，使得 $d^-(v)=0$.

定理 α'是定理 2 的对偶定理，亦成立.

定理 β 一个弱连通有向图 G 是一个外向树的充要条件是

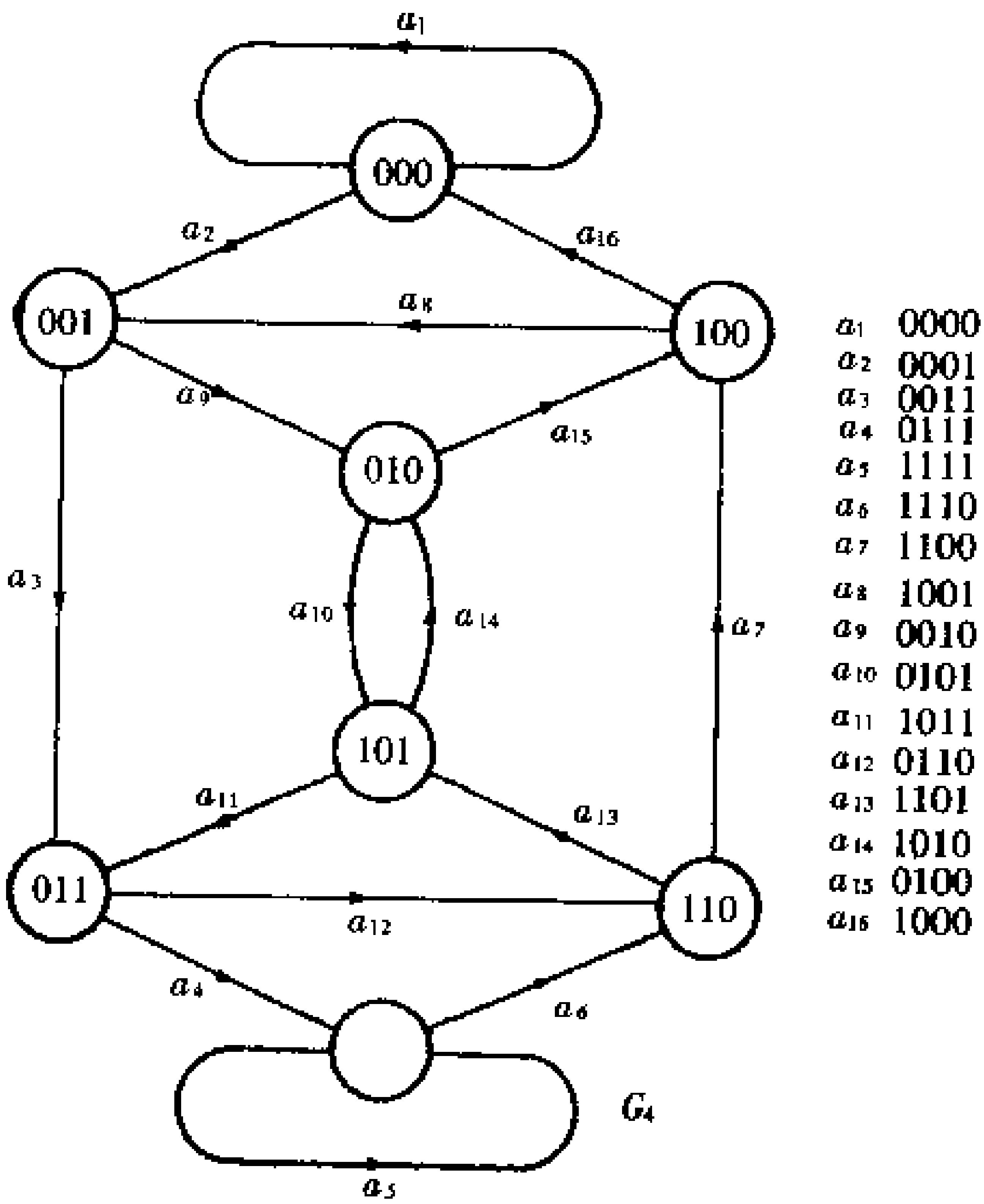

a_1
000
a_2
a_{16}
001
a_8
100
a_9
a_{15}
010
a_3
a_{10}
a_{14}
a_7
101
a_{11}
a_{13}
011
a_{12}
110
a_4
a_6
G_4
a_5
a_1 0000
a_2 0001
a_3 0011
a_4 0111
a_5 1111
a_6 1110
a_7 1100
a_8 1001
a_9 0010
a_{10} 0101
a_{11} 1011
a_{12} 0110
a_{13} 1101
a_{14} 1010
a_{15} 0100
a_{16} 1000

图 1.101

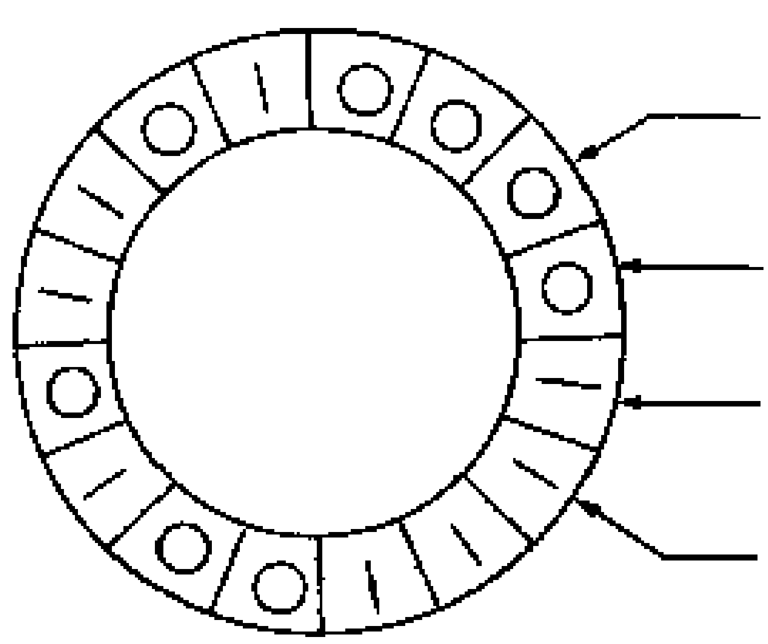


图 1.102

恰有一顶 $v_0 \in V(G)$，使得 $d^-(v_0)=0$，$\forall v \in V(G)-\{v_0\}$，$d^-(v)=1$.

定理 β 显然是成立的，其对偶定理为

定理 β'　一个弱连通有向图 G 是一个内向树的充要条件是恰有一顶 $v_0 \in V(G)$，使得 $d^+(v_0)=0$，$\forall v \in V(G)-\{v_0\}$，$d^+(v)=1$.

习题九

1. 单图 G 有几种定向方式？

2. G 是有向图，则 $\sum\limits_{v \in V(G)} d^+(v) = \sum\limits_{v \in V(G)} d^-(v) = \varepsilon$.

3. 有向图 G 中无有向圈，则 $\delta^-(G)=\delta^+(G)=0$.

4. G 是强连通有向图的充要条件是其底图连通且底图的每个块在有向图 G 中是强连通子图.

5. 有向图 G 之逆是 G 的每边反向定向得到的图 G'，证明：

(1) $(G')'=G$，(2) $d^+_{G'}(v)=d^-_G(v)$，(3) G' 中 u 可达 v 的充要条件是在 G 中 v 可达 u.

6. 竞赛图若不是强连通有向图，只要改变一条边的方向，则可变成强连通有向图.

7. 无向图 G 有一种定向方式，使得每条有向轨不长于 $\Delta(G)$.

8. G 是满足下列条件的有向图：

(1) $d^+(x)-d^-(x)=d^-(y)-d^+(y)=l$，

(2) $d^+(v)=d^-(v)$，$v \in V(G)-\{x,y\}$，

则 G 中有 l 条无公共边且以 x 为起点以 y 为终点的有向轨.

9. G 是顶数大于 1 的有向图，对 $V(G)$ 的每个非空真子集 S，均有 $|(S,\bar{S})| \geq k$，其中 $\bar{S}=V(G)-S$，则称 G 是 k 边连通有向图，证明：G 是强连通有向图的充要条件是它是 1 边连通有向图.

10. 百种昆虫，每两种之中必有一种能咬死另一种，证明：可以将这百种昆虫每种取一个虫子，排成一路纵队，使得每个虫子都能咬死紧跟其后的那个虫子。

11. n 名棋手比赛，没有平局，也没有 v_1 胜 v_2，v_2 胜 v_3，…，v_n 胜 v_1 的现象，则在循环赛中必有一人在所有比赛中全胜，也必有一人在所有比赛中全负.

12. $n(n\geqslant 3)$名棋手比赛，无平局，亦无一人全胜，则循环赛中必出现甲胜乙，乙胜丙，丙又胜甲的现象.

13. 试设计 $n=k=5$ 的有效磁鼓.

14. 在 Petersen 图上设计单向行驶路线.

1.15 网络流

1.15.1 Ford－Fulkerson 最大流算法

把商品从产地运往市场，在交通网上每个路段运输能力给定的条件下，设计一个运输方案，使得运输最快. 这个实际问题的数学模型如下：

G 是有向加权图，指定两个项 s 和 t，分别称为源和汇. 边 e 上的权 $c(e)$ 称为 e 的容量，设 G 是严格有向图，则称其为网络.

映射 $f:E(G)\to \mathbf{R}$，满足

$(C_1)\ \forall e\in E(G), 0\leqslant f(e)\leqslant c(e)$；

$(C_2)\ \forall v\in V(G)-\{s,t\}$，

$$0=\sum_{e\in\alpha(v)}-\sum_{e\in\beta(v)}f(e)\,,\tag{1}$$

其中 $\alpha(v)$ 是以 v 为头的边集. $\beta(v)$ 是以 v 为尾的边集，则称 f 是流函数，称

$$F=\sum_{e\in\alpha(t)}f(e)-\sum_{e\in\beta(t)}f(e)\tag{2}$$

为 f 的流量.

目标是定义一个流函数 f，使得 $F=\max$.

设 $S\subset V(G)$，$s\in S\neq\emptyset$，$t\in V(G)-S=\bar{S}\neq\emptyset$，则称 $(S,\bar{S})$ 是网络的一个截，称

$$C(S)-\sum_{e\in(S,\bar{S})}c(e)$$

为截量.

引理 1 对每个 $S\subset V(G)$，$s\in S$，$t\in\bar{S}$ 时

$$F=\sum_{e\in(S,\bar{S})}f(e)-\sum_{e\in(\bar{S},S)}f(e).$$

证 把(2)及关于 $v\in\bar{S}-\{t\}$ 的一切(1)式相加，左端得 F，考虑 $e=xy$，因为 $v\in\bar{S}-\{t\}$，所以不考虑 x,y 皆在 S 中的情形.

(ⅰ) $x,y\in\bar{S}$，关于 y 的(1)型方程中出现正的 $f(e)$，关于 x 的(1)型方程中出现负的 $f(e)$，正负抵消.

(ⅱ) $x\in S$，$y\in\bar{S}$，则右端只出现 $f(e)$ 的正项，这时 $e=xy\in(S,\bar{S})$.

(ⅲ)若 $x\in\bar{S}$，$y\in S$，则右端只出现 $f(e)$ 的负项，这时 $e=xy\in(\bar{S},S)$.

由(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)知引理 1 成立，证毕.

引理 1 的实际含义的明显的，$\sum\limits_{e\in(S,\bar{S})}f(e)$ 是从 S 流入 $\bar{S}$ 的总量，$\sum\limits_{e\in(\bar{S},S)}f(e)$ 是从 $\bar{S}$ 倒流入 S 的总量，F 表示净流入 t 的量，所以引理 1 理应成立.

引理 2 对任取的流函数 f 和 $\forall S\subset V(G)$，皆有

$$F\leqslant C(S). \tag{3}$$

证 由引理 1，

$$F=\sum_{e\in(S,\bar{S})}f(e)-\sum_{e\in(\bar{S},S)}f(e),$$

由(C1)，$0\leqslant f(e)\leqslant c(e)$，故得

$$F\leqslant\sum_{e\in(S,\bar{S})}c(e)=C(S),$$

证毕.

推论 1 若 $F=C(S)$，则相应的流函数是最大流(指 F 最

大),$(S,\bar{S})$是最小截(指 $C(S)$最小).

为简洁地表达 Ford－Fulkerson 算法(下称 $2F$ 算法),约定:

(ⅰ)若 $e=uv$,u 已有标志,而 v 尚未标志,且 $c(e)>f(e)$,则称通过边 e 可以向前标志顶 v,且规定$\triangle(e)=c(e)-f(e)$,得到标志边 e.

(ⅱ)若 $e=vu$,u 已有标志,v 尚未标志,且 $f(e)>0$,则称通过边 e 可以向后标志顶 v,且规定$\triangle(e)=f(e)$,得到标志边 e.

$2F$ 算法(Ford,Fulkerson,1962):

(1)对每边 e,取 $f(e)=0$.

(2)标志顶 s,其它顶未标志.

(3)选可向前标志或可向后标志的顶 v,若无此种顶可选,止,现流函数即为最大流;若有此种顶可选,则得新的标志顶 v 及标志边e;若 $v=t$,转(4),否则转(3).

(4)设已得标志轨(此轨是无向的)$se_1v_1e_2v_2\cdots e_lt$,从 t 始沿此轨逆行,令

$$\triangle=\min_{1\leqslant i\leqslant l}\triangle(e_i),$$

若 e_i 前进边,即在有向图中 $e_i=v_{i-1}v_i(s=v_0,t=v_l)$,则

$$f(e_i)\leftarrow f(e_i)+\triangle.$$

若 e_i 是后退边,即 $e_i=v_iv_{i-1}$,则

$$f(e_i)\leftarrow f(e_i)-\triangle.$$

(5)转(2).□

在上述 $2F$ 算法中,f 始终满足($C1$)与($C2$).

若 $c(e)$是整数,初始流为零,则经 $2F$ 的每次调整,流量至少增加 1,而流量的上界为 $\sum_{e\in E(G)}c(e)$,故 $2F$ 算法有限步调整之后必停止.

定理 1 $2F$ 算法止时得到的流函数 f 是最大流,其流量等于最小截的容量.

证 设 $2F$ 止时,S 是最后一轮从 s 开始而不能达到 t 的标志

过程中可得到标志的顶之集合，于是

$$f(e)=\begin{cases}c(e),e\in(S,\bar{S});\\0,e\in(\bar{S},S),\end{cases}$$

不然可得到新的不属于 S 的标志顶，这已不可能. 由引理 1，

$$F=\sum_{e\in(S,\bar{S})}f(e)-\sum_{e\in(\bar{S},S)}f(e)=\sum_{e\in(S,\bar{S})}c(e)=C(S),$$

由推论 1，f 是最大流，$(S,\bar{S})$ 是最小截，且最大流量等于最小截容量，证毕.

定理 1 称为"双最定理"，它是网络理论中的核心定理之一，在离散数学之中，它有许多精彩应用.

1.15.2 Dinic 最大流算法

2F 算法有缺点，例如图 1.103 所示的网络，用 2F 算法求得最大流时，若通过 $sabt$ 和 $sbat$ 交替地充当增载轨（2F 无法排除这种可能），由 $f(e)\equiv 0$ 开始增载，需要进行 $2M$ 次增载才得出最大流，于是 2F 的计算复杂度不仅与网络之规模有关，而且还与（原则上是任意的）边上之权有关！

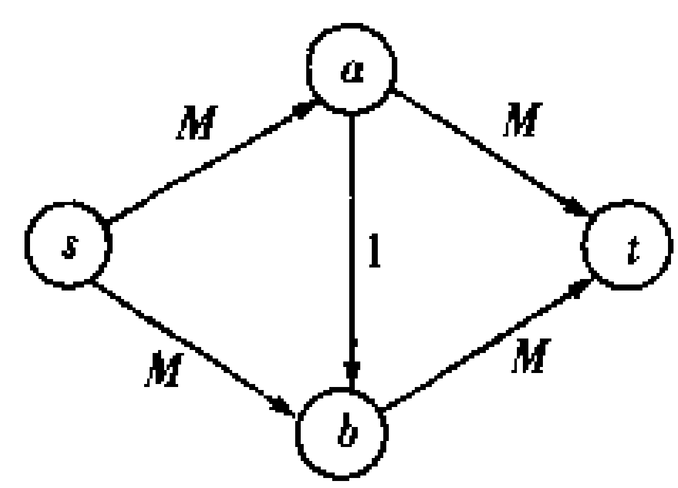


图 1.103

下面介绍的 Dinic1970 年提出的求最大流的有效算法，克服了 2F 的这种缺点.

下面把 $e=uv$，且 $0<f(e)<c(e)$ 或 $e=vu$，$f(e)>0$ 的边叫做从 u 到 v 的有用边.

首先建立层状网络.

分层算法：

(1) $V_0\leftarrow\{s\}$，$i\leftarrow 0$.

(2) $T\leftarrow\{v\mid v\notin V_j,j\leqslant i$，且存在从 V_i 某顶到 v 的有用边$\}$.

(3) 若 $T=\varnothing$，止，网络上的流即为最大流.

(4) 若 $t\in T$，则 $l\leftarrow i+1$，$V_l\leftarrow\{t\}$，止.

(5)令 $V_{i+1} \leftarrow T$,增大 i,转(2).

上述分层算法的时间复杂度为 $O(|E|)$.

$V_i(0 \leqslant i \leqslant l)$叫做第 i 层,仅相邻两层之间有边,是从层次小的层中之顶到层次大的层之顶的有用边.得到的这个网络叫做关于流函数 f 的层状网络.

定理 2 若分层算法止于(3),则 f 是最大流.

证 令 $S = \bigcup_{k=0}^{i} V_k$,则$(S, \bar{S})$中的边 $e = uv$ 满足$f(e) = c(e)$,不然 e 是从 u 到 v 的有用边,这与 $T = \varnothing$ 矛盾.同理,在$(\bar{S}, S)$中的边 $e = vu$ 满足$f(e) = 0$.由引理 1,

$$F = \sum_{e \in (S, \bar{S})} f(e) - \sum_{e \in (\bar{S}, S)} f(e) = \sum_{e \in (S, \bar{S})} c(e) = C(S),$$

由推论 1,f 是最大流,证毕.

下面讨论如何利用层状网络改进流量.

设原网络中的流函数是 f,E_j 是层状网络中从 V_{j-1}到 V_j 的边集合,$\forall e = uv \in E_j$,规定

$$\bar{c}(e) = \begin{cases} c(e) - f(e), u \in V_{j-1}, v \in V_j; \\ f(e), v \in V_{j-1}, u \in V_j. \end{cases}$$

$\bar{c}$ 表示边 e 上可改进的流量之上界.

我们把层状网络的边权取成 $\bar{c}(e)$,采用零初始流 $\bar{f}(e) \equiv 0$,把层状网络上的边皆定向成从 V_{j-1}指向 V_j(有的边在原网络中的方向可能与此相反),E_j 表示从 V_{j-1}指向 V_j 的边集.

所谓层状网络上的极大流 $\bar{f}$ 是指对每条轨 $sv_1v_2 \cdots v_{l-1}t$ 上,至少有一边 e_j,使得 $\bar{f}(e_j) = c(e_j)$,其中 $v_j \in V_j$,$e_j \in E_j$.

值得注意的是,层状网络上的极大流未必是它的最大流,例如图 1.104 中,其最大流量是 2,而图中标出的极大流量是 1(边旁第 2 个数是流函数值).

如果我们能求得层状网络上一个极大流 $\bar{f}$,则可如下地把原网络上的流 f 改进成流量更大的流 f':

$$f'(e)=\begin{cases} f(e)+\bar{f}(e), e=uv\in E(G), u\in V_{j-1}, v\in V_j; \\ f(e)-\bar{f}(e), e=vu\in E(G), u\in V_{j-1}, v\in V_j; \\ f(e), \qquad \text{其它情形}. \end{cases}$$

容易得出，$f'(e)$在原网络中满足($C1$)与($C2$)，且 f' 的流量F'大于f 的流量F.

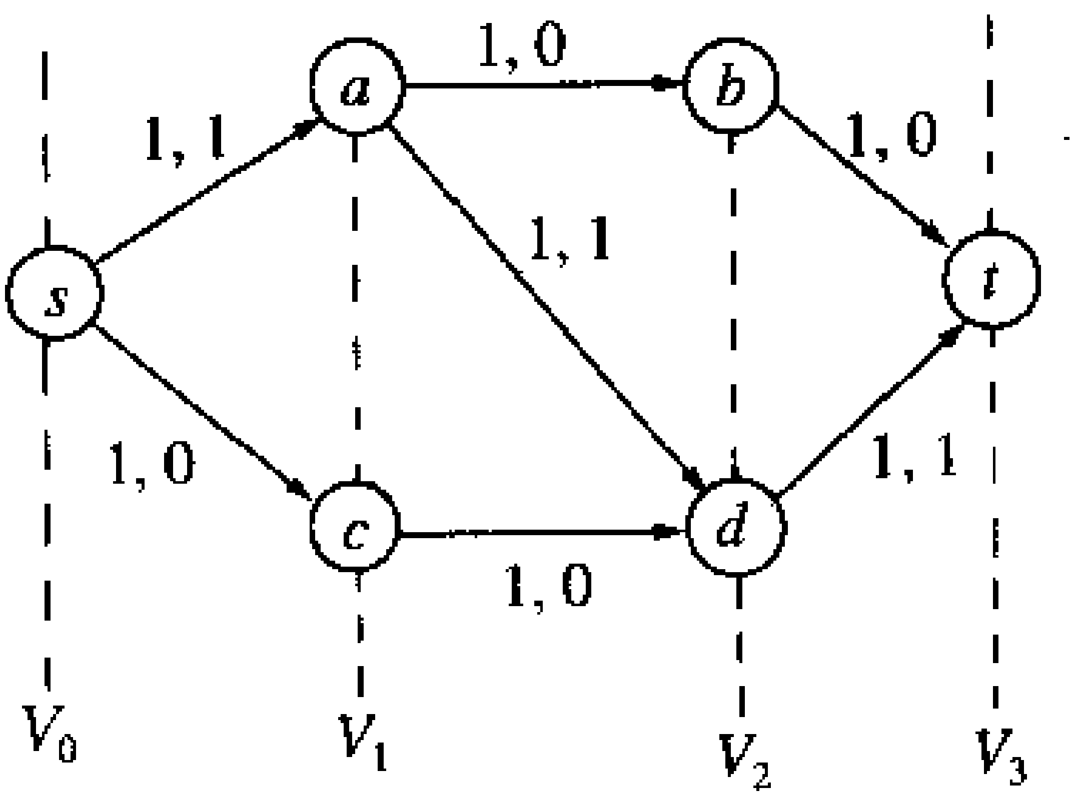


图 1.104

我们把由原网络的流 f 找到分层网络，再求得层状网络上的极大流 $\bar{f}$，并把原网络上的流改进成 f' 的一个过程叫做一个阶段. 层状网络最后一层的脚标 l 叫做层状网络的长度，用 l_k 表示第 k 阶段层状网络的长度.

层状网络 $\bar{N}$ 上极大流的算法：

(1)对 $\bar{N}$ 上每条边e，标志 e 未堵塞，$\bar{f}(e)\leftarrow 0$.

(2)$v\leftarrow s$, $S=\varnothing$.

(3)若无未堵塞的边 $e=vu$，u 在下一层，则(v 是堵死端)执行：

(ⅰ)若 $s=v$，止，$\bar{f}$ 即为极大流.

(ⅱ)从 S 中移出其顶部的边$e=uv$.

(ⅲ)标志 e 堵塞，$v\leftarrow u$.

(ⅳ)转(3).

(4)选一未堵塞的边 $e=vu$(u 在下一层)，把 e 放入S 中，$v\leftarrow u$，若 $v\neq t$，转(3).

(5)S 中的边构成一个可增载轨

$$se_1v_1e_2v_2\cdots v_{l-1}e_lt.$$

(ⅰ) $\Delta \leftarrow \min\limits_{1\leqslant i\leqslant l}\{\bar{c}(e_i)-\bar{f}(e_i)\}$.

(ⅱ)对每个 $1\leqslant i\leqslant l$, $\bar{f}(e_i)\leftarrow\bar{f}(e_i)+\Delta$. 当 $\bar{f}(e_i)=\bar{c}(e_i)$,标志 e_i 堵塞.

(ⅲ)转(2). □

上述求极大流的时间复杂度是 $O(|E|\cdot|V|)$.

下面我们将证明 l_k 是严格递增的,于是分层只能进行不超过 $|V|-1$ 次,即有限阶段之后,对所得之流函数已不能再分层,由分层算法(3),即得到最大流,而整个 Dinic 算法的时间复杂度为 $O(|V|^2\cdot|E|)$.

例 1 求图 1.105 中网络的最大流.

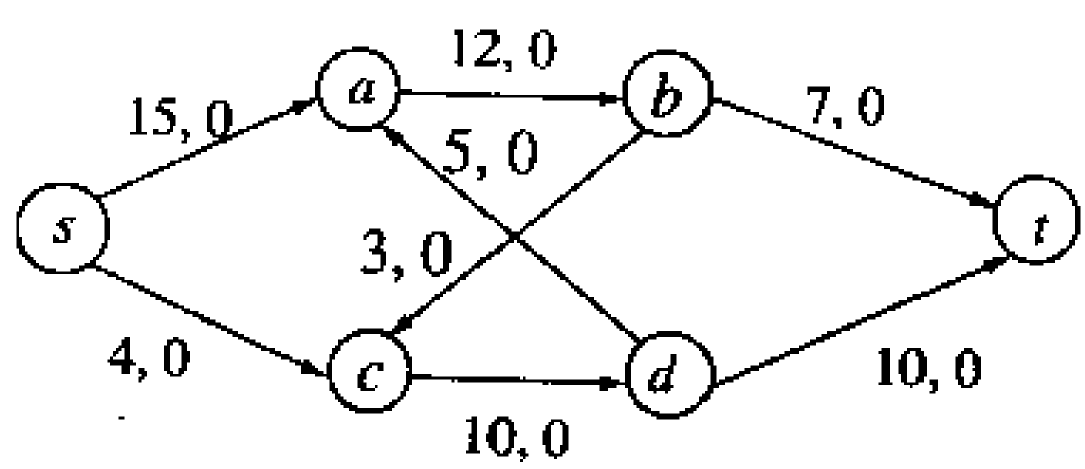


图 1.105

解 图上边旁第一个数是边容量,第二个数是流函数值.

第一阶段分层网络及其上极大流如图 1.106 所示. 改进后的流如图 1.107 所示.

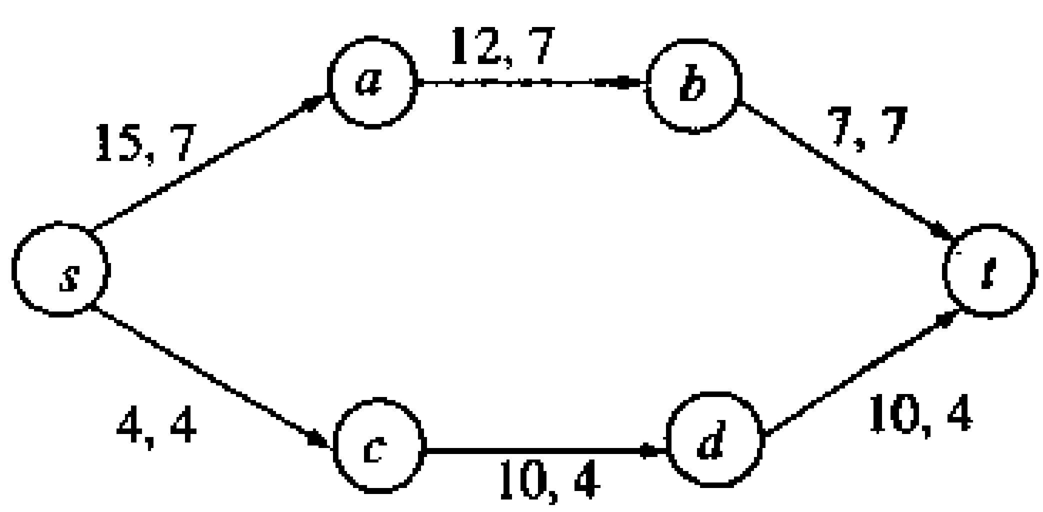


图 1.106

第二阶段用图 1.107 中的流函数来分层得层状网络及其极大

流如图 1.108 所示.

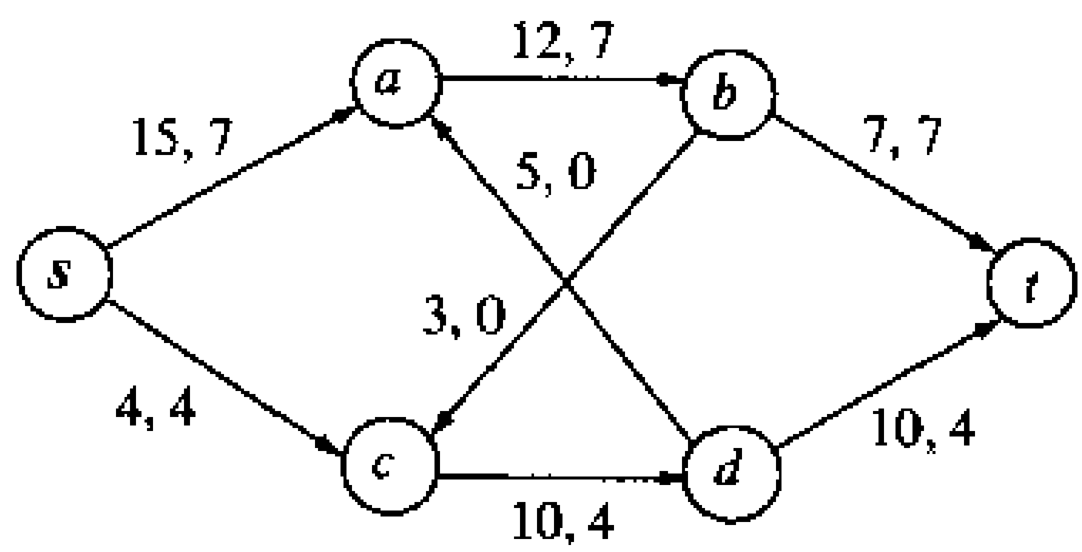


图 1.107

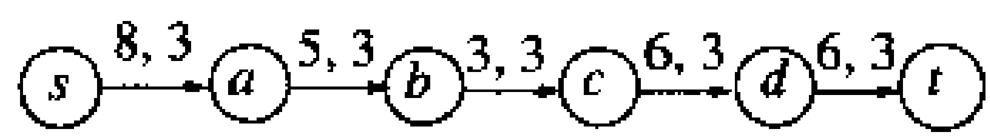


图 1.108

原网络上第二阶段得以改进的流如图 1.109 所示.

第三阶段用图 1.109 中的流函数分层时未到达 t 即中止于 b,于是图 1.109 中的流即为最大流,流量为 14.

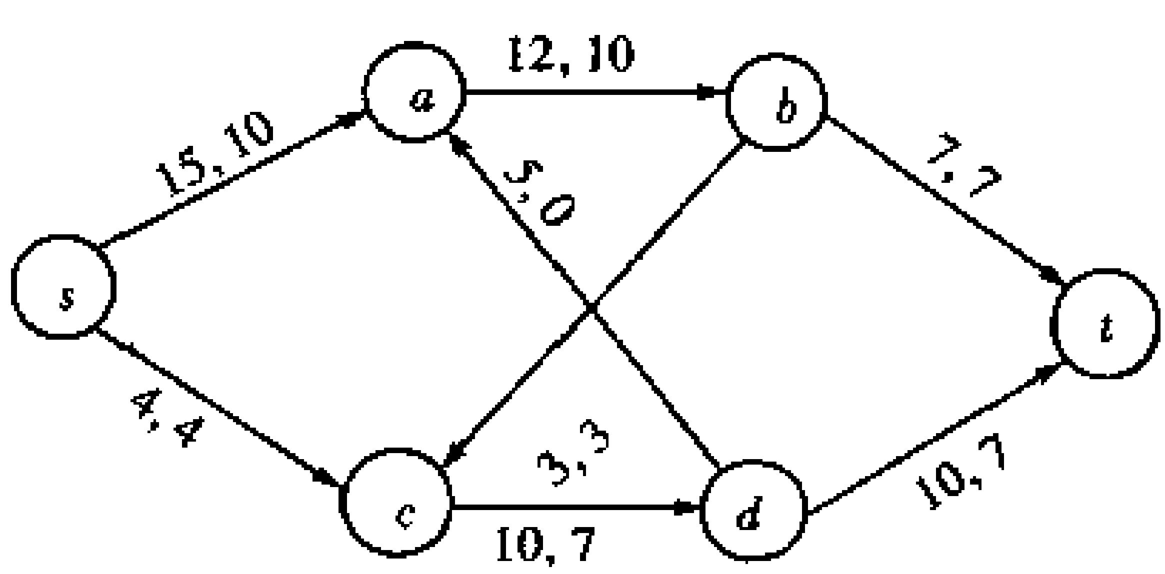


图 1.109

定理 3 Dinic 算法必能求得最大流.

证 只欠证第 $k+1$ 阶段不是最后阶段,则 $l_{k+1}>l_k$. 设在第 $k+1$ 阶段的层状网络中,有从 s 到 t 的长 l_{k+1} 的轨

$$P = se_1v_1e_2\cdots v_{l_{k+1}}e_{l_{k+1}}t.$$

(1)设 P 上的一切顶在第 k 阶段的层状网络上出现过,用 V_j

表示第k阶段网络上第j层中的顶集,若$v_a \in V_b$,则$a \geq b$.

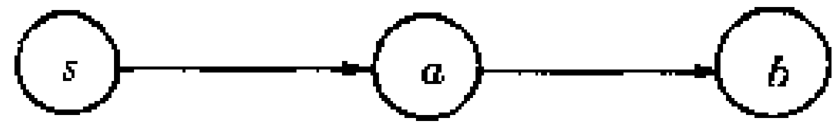


图 1.110

用关于a的归纳法证明之.

$a=0$时,$v_a=v_0=s$,$V_0=\{s\}$,命题"$v_a \in V_b$,则$a \geq b$"成立.假设$v_a \in V_b$,$v_{a+1} \in V_c$,若$c \leq b+1$,由归纳法假设,$v_a \in V_b$时,$a \geq b$,得知$a+1 \geq b+1$;今$c \leq b+1$,故$c \leq a+1$.若$c > b+1$,而今$v_{a+1} \in V_c$,又V_b,V_c不是邻层,这是不可能的,故只有$c \leq a+1$.

今$t=v_{l_{k+1}}$,$t \in V_{l_k}$,故有$l_{k+1} \geq l_k$.下证等号不能成立.若$l_{k+1}=l_k$,我们已假设P上的顶在k阶段的层状网络上出现过,轨上之边在$k+1$阶段的层状网络上用过,则在k阶段的层状网络上用过,且P整个在k阶段状网络上,此与k阶段上得出过极大流矛盾.

(2)设P上有的顶未在k阶段层状网络上出现,令$e_{a+1}=v_a v_{a+1}$是对某个b,$v_a \in V_b$,但v_{a+1}不在第k阶段层状网络上出现的第一条边,则e_{a+1}在第k阶段层状网络中未用过,e_{a+1}在第$k+1$阶段开始时有用,故在第k阶段开始时也有用.由分层算法(4),$V_{b+1}=\{t\}$,$b+1=l_k$,于是$a \geq b$,$a+1 \geq b+1=k_l$,又$v_{a+1} \neq t$,故$l_{k+1} > a+1$,所以$l_{k+1} > l_k$;证毕.

1.15.3 有上下界的网络中的流

设边容量之下界为$b(e) \geq 0$,上界为$c(e)$,这时流函数f应满足

(C1′) $b(e) \leq f(e) \leq c(e)$.

(C2′) $\sum\limits_{e \in \alpha(v)} f(e) - \sum\limits_{e \in \beta(v)} f(e) = 0, \forall v \in V(G) - \{s,t\}$.

目标仍是求最大流,对于边容量有上下界的网络,流函数可能

不存在，见图 1.111，边上第一个数是 $b(e)$，第二个数是 $c(e)$.

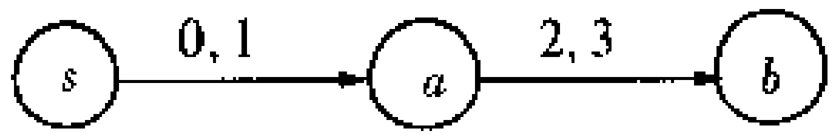


图 1.111

下面讨论边容有上下界的网络中存在满足(C1′)(C2′)的所谓可行流的充要条件.我们把有上下界的网络记成 $N(G(V,E),b(e),c(e))$，构作 N 的附加网络 $\bar{N}=\bar{N}(\bar{G}(\bar{V},\bar{E}),\bar{b}(e),\bar{c}(e))$ 如下：

(1) $\bar{V}=\{\bar{s},\bar{t}\}\cup V(G)$，$\bar{s},\bar{t}\notin V(G)$，$s,t$ 分别称为附加源和附加汇.

(2)对每个 $v\in V(G)$，加新边 $e=v\bar{t}$，令 $\bar{c}(e)=\sum\limits_{e\in\beta(v)}b(e)$，$\bar{c}(e)$ 是此边 e 之容量上界，下界取零.

(3)对每个 $v\in V(G)$，加新边 $e=\bar{s}v$，令 $\bar{c}(e)=\sum\limits_{e\in\alpha(v)}b(e)$，$\bar{c}(e)$ 是此边容量之上界，下界取零.

(4) E 中的每边 e 在 $\bar{E}$ 中仍保留，界要变：下界取零，上界为 $\bar{c}(e)=c(e)-b(e)$.

(5)再加新边 $e=st$，$e'=ts$，且令 e 与 e' 的下界为零，上界 $\bar{c}(e)=\bar{c}(e')=\infty$.

定理 4 $N(G(V,E),b(e),c(e))$存在可行流的充要条件是 $\bar{N}(\bar{G}(\bar{V},\bar{E}),\bar{b}(e),\bar{c}(e))$上的最大流使流出 $\bar{s}$ 的一切边皆满载.

证 设 $\bar{N}$ 中流函数 $\bar{f}$ 使得从 $\bar{s}$ 出发的边皆满载(即 $\bar{f}(e)=\bar{c}(e)$)，对 N 令

$$f(e)=\bar{f}(e)+b(e),e\in E(G),$$

下证 $f(e)$是 N 中可行流.

(ⅰ) $b(e)\leqslant f(e)\leqslant c(e)$.

事实上，$0\leqslant\bar{f}(e)\leqslant\bar{c}(e)=c(e)-b(e)$，$e\in E(G)$，所以 $f(e)$满足(C1′).

(ⅱ) $f(e)$满足(C2′).

令 $v\in V(G)-\{s,t\}$，而 $\sigma=\bar{s}v$，$\tau=v\bar{t}$ 是$\overline{N}$ 中边，由 $\overline{N}$ 中流 $\bar{f}$ 满足(C2)，故

$$\sum_{e\in\alpha(v)}\bar{f}(e)+\bar{f}(\sigma)=\sum_{e\in\beta(v)}\bar{f}(e)+\bar{f}(\tau),\tag{1}$$

又由定理条件

$$\bar{f}(\sigma)=\bar{c}(\sigma)=\sum_{e\in\alpha(v)}b(e).\tag{2}$$

$$\bar{f}(\tau)=\bar{c}(\tau)=\sum_{e\in\beta(v)}b(e).\tag{3}$$

由(1)(2)(3) 得

$$\sum_{e\in\alpha(v)}\bar{f}(e)+\sum_{e\in\alpha(v)}b(e)=\sum_{e\in\beta(v)}\bar{f}(e)+\sum_{e\in\beta(v)}b(e),$$

从而得

$$\sum_{e\in\alpha(v)}f(e)-\sum_{e\in\beta(v)}f(e)=0,$$

即 $f(e)$ 满足(C2′)，故 f 是N 的可行流.

反之，若 $f(e)$是 N 的可行流，令

$$\bar{f}(e)=\begin{cases}f(e)-b(e), e\in E(G);\\ \bar{c}(e), e\in\alpha(\bar{t})\text{或 } e\in\beta(\bar{s}),\end{cases}$$

显然 $\bar{f}(e)$是 $\overline{N}$ 上使得从$\bar{s}$ 发出的边皆满载的流，证毕.

例 2 求图 1.112 中网络 N 上的最大流，边上写的数第一个是 $b(e)$，第二个是 $c(e)$.

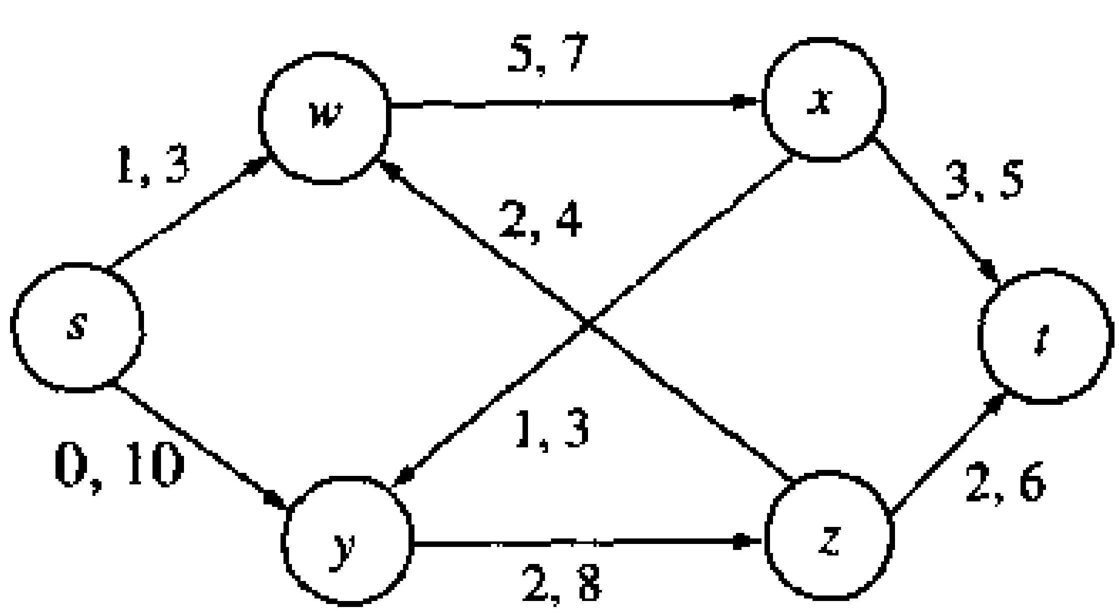


图 1.112

解 (1)作附加网络 $\bar{N}$ 如图 1.113,用 2F 或 Dinic 算法求得 $\bar{N}$ 上的最大流 $\bar{f}$. 图 1.113 中,边上第二个数是 $\bar{f}$. 由于出 $\bar{s}$ 的边皆满载,由定理 4,N 上有可行流.

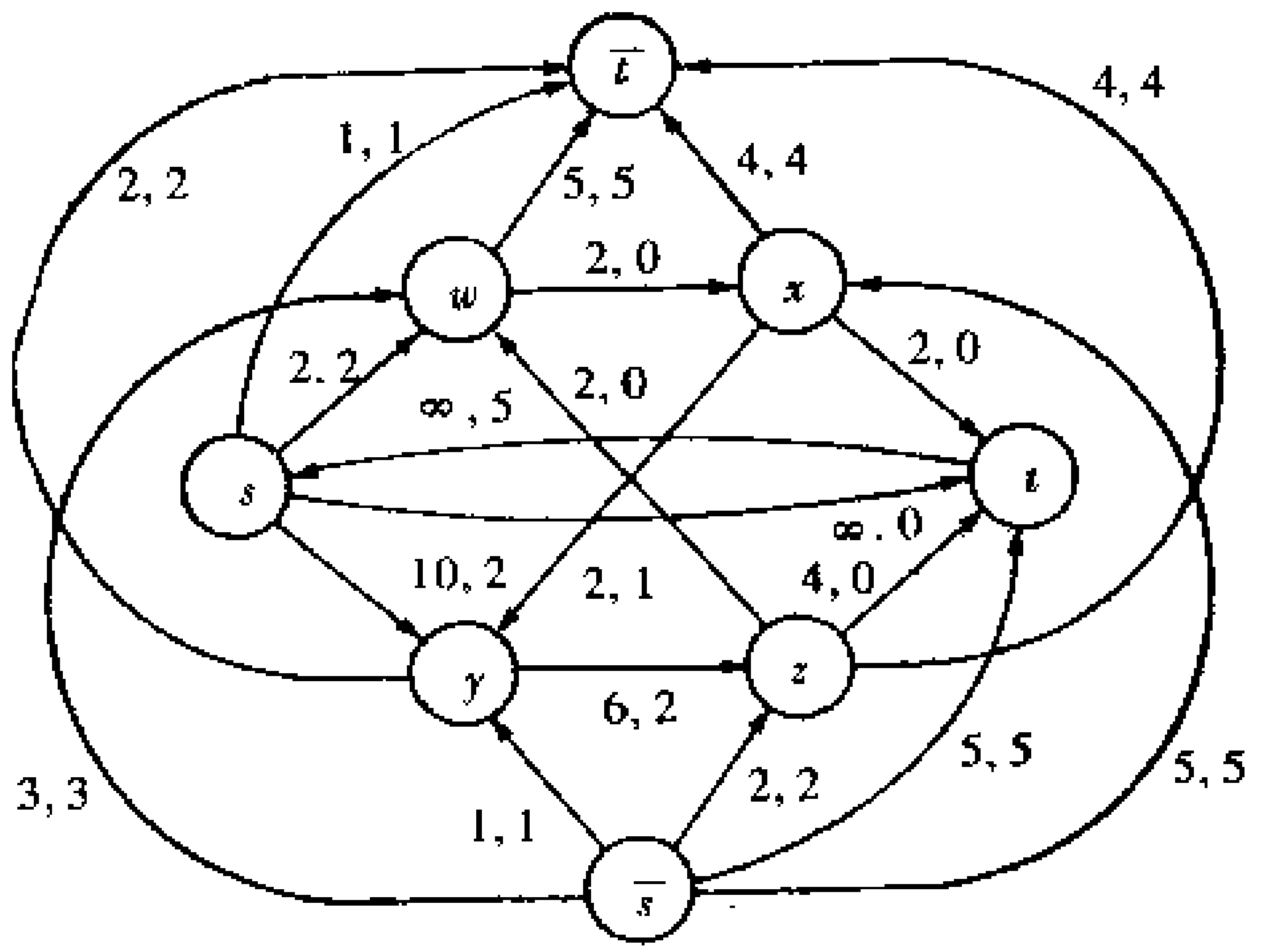


图 1.113

(2)把 $\bar{f}$ 化成N 上的可行流:$f=\bar{f}+b(e)$,见图 1.114,边上三个数依次为 b,c,f.

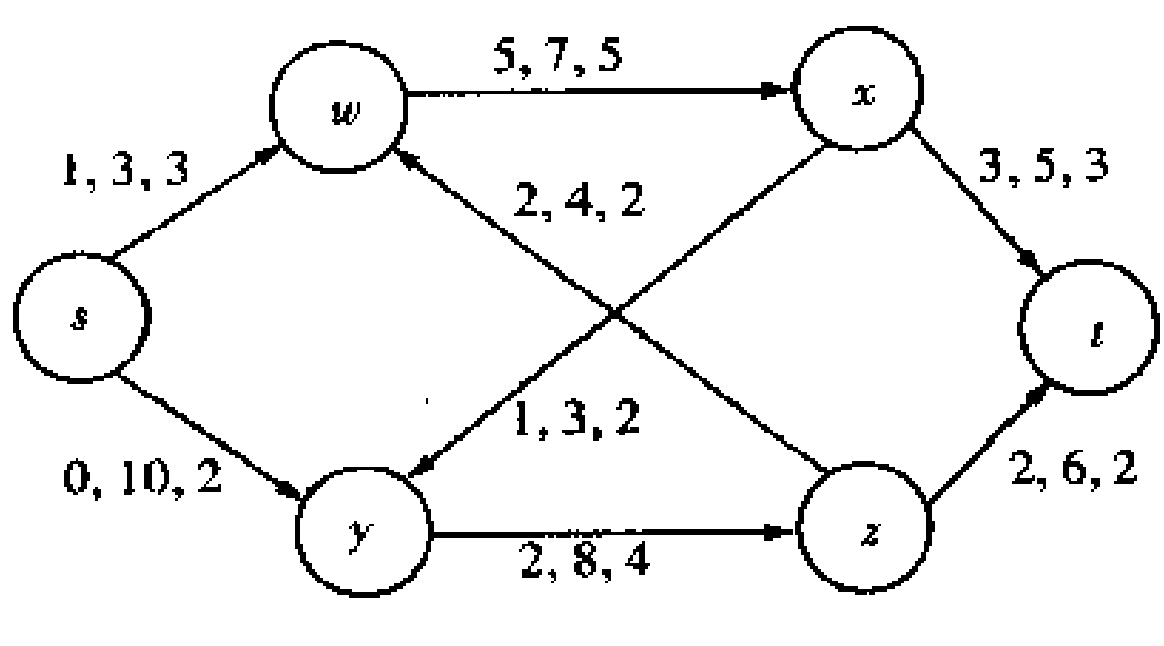


图 1.114

(3)把图 1.114 中的可行流(用 2F 或 Dinic)放大,得最大流如

图 1.115 所示，最大流量为 $F=10$.

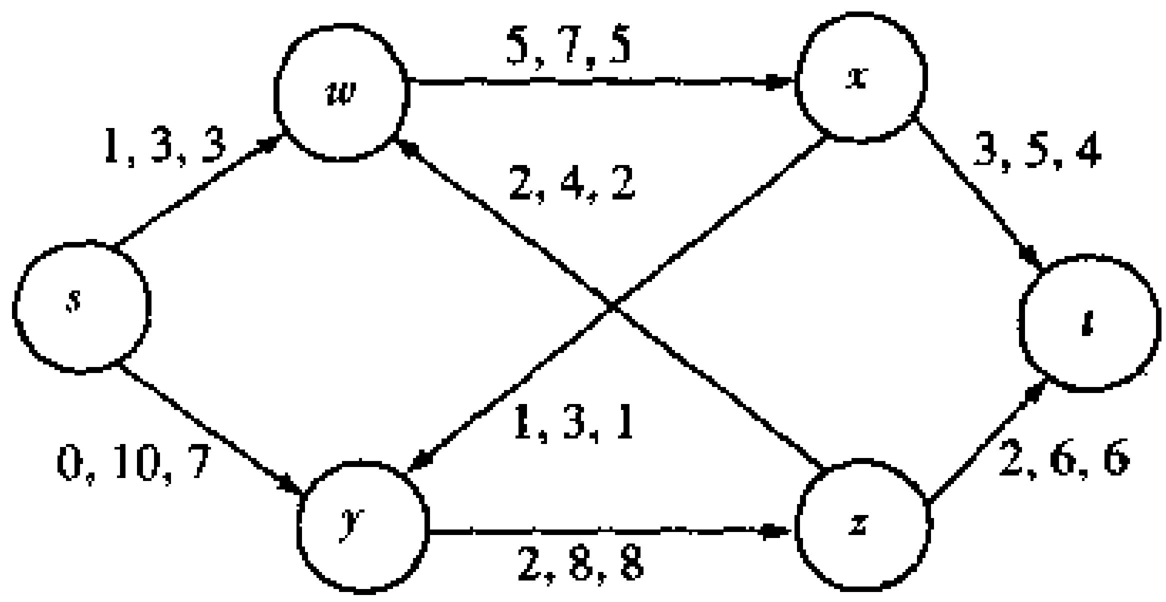


图 1.115

1.15.4 有供需约束的流

设 $N(G(V,E),c(e))$是一个网络，$c(e)$是边 e 的容量，又 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$是源集合，$m\geqslant 1$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$是汇集合，$n\geqslant 1$.

$$\sigma: X\to\{0,1,2,\cdots\},$$

$\sigma(x_i)$称为源 x_i 的供应量，$i=1,2,\cdots,m$.

$$\rho: Y\to\{0,1,2,\cdots\},$$

$\rho(y_j)$称为汇 y_j 的需求量，$j=1,2,\cdots,n$. 要求流函数 $f(e)$不仅满足$(C1)(C2)$，而且满足供求约束：

$$(C3)\ \sum_{e\in\beta(x_i)} f(e)-\sum_{e\in\alpha(x_i)} f(e)\leqslant\sigma(x_i),i=1,2,\cdots,m.$$

$$(C4)\ \sum_{e\in\alpha(y_j)} f(e)-\sum_{e\in\beta(y_j)} f(e)\geqslant\rho(y_j),j=1,2,\cdots,n.$$

把满足$(C1)(C2)(C3)(C4)$ 的流称为可行流. 若 $S\subseteq X$，若记 $\sigma(S)=\sum_{v\in S}\sigma(v)$；若 $S\subseteq Y$，则记 $\rho(S)=\sum_{v\in S}\rho(v)$. 下面给出可行流的充分必要条件.

定理 5 f 是有供需约束的可行流，当且仅当对一切 $S\subseteq V(G)$，

$$C(S)\geqslant\rho(Y\cap\bar{S})-\sigma(X\cap\bar{S}),$$

其中 $\bar{S}=V(G)-S$，X 是源集，Y 是汇集，$C(S)$是$(S,\bar{S})$的截量.

证 构作新网络 N'：

(ⅰ)增加两个新顶 x_0, y_0.

(ⅱ)加边 $x_0x_i, i=1,2,\cdots,m$，令 $c(x_0x_i)=\sigma(x_i)$.

(ⅲ)加边 $y_jy_0, j=1,2,\cdots,n$，令 $c(y_jy_0)=e(y_j)$.

(ⅳ)令 x_0, y_0 分别是 N'的源和汇.

容易证明，N 中有可行流的充要条件是 N'中有使$(Y,\{y_0\})$中每边皆满载的流.

今有 N'中的流使$(Y,\{y_0\})$中每边皆满载，则其流量 $\rho(Y)=C(Y)$，此流是 N'中的最大流，即说明 N 有可行流，当且仅当对 N'中的每个截$(S\cup\{x_0\},\bar{S}\cup\{y_0\})$成立不等式

$$C(S\cup\{x_0\})\geqslant\rho(Y),$$

等价于

$$C(S,\bar{S})+\rho(Y\cap S)+\sigma(X\cap\bar{S})\geqslant\rho(Y),$$

等价于

$$C(S,\bar{S})\geqslant\rho(Y)-\rho(Y\cap S)-\sigma(X\cap\bar{S}),$$

等价于

$$C(S,\bar{S})\geqslant\rho(Y\cap\bar{S})-\sigma(X\cap\bar{S}),$$

证毕.

从算法的角度而言，只要求得 N'的最大流 f，若 f 使$(Y,\{y_0\})$中每边皆满载，则 f 亦是N 中可行流.

1.15.5 PERT 问题

PERT 是 Program evalnation and review technique 的缩写，是运算学中的核心问题之一.

PERT 图是指如下的有向图 $G(V,E)$：

(ⅰ)$V(G)$中存在起始顶 s 和终止顶 t.

(ⅱ)G 中无有向回路.

(ⅲ)$\forall v\in V(G)-\{s,t\}$，$v$ 在由 s 到 t 的某有向轨上.

约定：

(1)PERT 图上每边代表一个过程.

(2)$\beta(s)$中的边代表的过程可以马上开始运作.

(3)$v\in V(G)$,$v\neq s$,当 $\alpha(v)$中的过程全结束时,$\beta(v)$中的过程方可开始.

问题 1 (关键轨道问题,代号 CPM(Critical path method))设 PERT 图每边 e 之权 $l(e)$表示该过程所需时间,问由 $\beta(s)$中过程开始的时刻到 $\alpha(t)$中过程全部完成,最短需要多长时间?

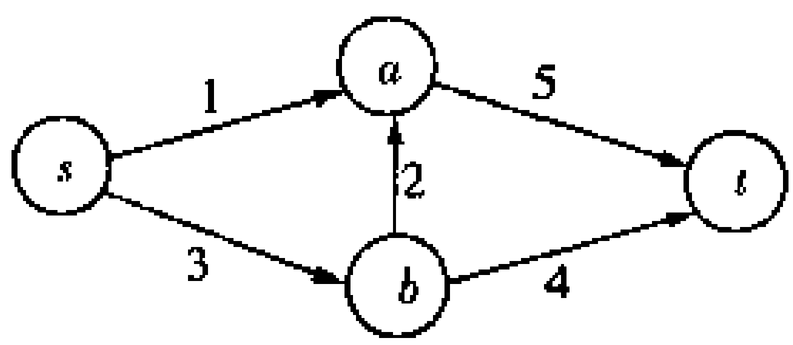


图 1.116

例如图 1.116 中,最短时间为 $3+2+5=10$.

CPM 算法:

(1)$\lambda(s)\leftarrow 0$,其它的顶未标志.

(2)找一个 $v\in V(G)$,v 未标志,且 $\alpha(v)$中一切边之尾已标志,令 $\lambda(v)\leftarrow\max\limits_{e=uv}\{\lambda(u)+l(e)\}$.

(3)若 $v=t$,止,$\lambda(t)$即所求最短时间;否则转(2).□

上述算法的时间复杂为 $O(|E|)$.

定理 6 CPM 算法止时,$\lambda(t)$即为问题 1 的解.

证 先证(2)中 v 的存在性.若这种 v 不存在,则对每个未标志之顶 v,皆可找到一边,以 v 为头,但此边以另一未标志之顶为尾,又顶数有限,则 G 中存在回路,这与 PERT 图相违.

下证 $\lambda(v)$是到完成 $\alpha(v)$中一切过程所用的最小时间.对标志次数进行归纳证明.第一次标志的是 s,命题自然成立.设第 k 次标志的是 v_k,$\lambda(v_k)$是 $\alpha(v_k)$中过程全部完成所用的最小时间;考虑第 $k+1$ 次标志的顶 v_{k+1},由(2)

$$\max_{e=uv_{k+1}}\{\lambda(u)+l(e)\}$$

是到 $\alpha(v_{k+1})$中过程全完成所用的时间之最小值,证毕.

容易看出,算法止时,由 t 向 s 经过"确定顶标的边"返回,即经

$$\lambda(v) \leftarrow \max_{e=uv}\{\lambda(u)+l(e)\}$$

中使 $\lambda(u)+l(e)=\lambda(v)$的边 e 返回，则得一条最长轨，这种轨称为关键轨道．欲缩短工期，必须把每条关键轨道上至少一条边之长缩短．这种关键轨道未必唯一．例如图 1.116 中，$sbat$ 是一条关键轨道．

问题 2　PERT 图中每一过程由一台机器（或人）来完成，问至少需要准备多少台机器，才能使得对任意给定的 $l(e)$，每一过程都不至于因为机器不足而延误？

为解决问题 2，我们考虑以 s 为源以 t 为汇的 PERT 图上的一个网络，边容量下界皆为 1，上界皆为∞．

一个边子集中无在同一条有向轨的两条边时，称其为并流边集．

由于 PERT 中每边皆在由 s 到 t 的有向轨上，以及 $b(e)=1$，$c(e)=\infty$，所以此网上有可行流，存在从 s 到 t 的最小流（即流量最小的流函数）．

定理 7　以 s 为源以 t 为汇，$b(e)=1$，$c(e)=\infty$的 PERT 图上的网络上的最小流量即为问题 2 的解．

证　我们以 t 为源，以 s 为汇，求 t 到 s 的最大流，它就是从 s 到 t 的最小流，当求由 t 到 s 的最大流时，2F 算法终止时被标志的那些顶之集合为 T，则 $t\in T$，$s\in \bar{T}$．于是$(T,\bar{T})=\varnothing$，不然，因为 $c(e)=\infty$，仍可由 T 中某顶向前标志，与 2F 标志终止矛盾．所以$(\bar{T},T)$是并流边集．

若$(\bar{T},T)$中有的边之权 $l(e)\gg 1$，$(\bar{T},T)$外的边之权 $l(e)$比$(\bar{T},T)$中最小权还小的多，所以会有$(\bar{T},T)$中边代表的过程同时进行的时刻，故机器数$\geqslant|(\bar{T}),T)|$．

设 F 是从 s 到 t 的最小流量，相应的流为 f，$f(e)\geqslant b(e)=1$ 对每边 $e\in E(G)$成立．F 个单位的总流量分解到从 s 到 t 的 F 条有向轨上，能使 $E(G)$中的每条边至少在这 F 条有向轨的一条上．我们把每台机器分配给上述 F 条有向轨中之一条轨上的所有

边，每个机器对分配的有向轨上从 s 到 t 依次完成各个过程，于是得知机器数$\leqslant F$，见图 1.117. 而 $F=|(\bar{T},T)|$，故得证问题 2 中的机器数至少是从 s 到 t 的最小流量 F，证毕.

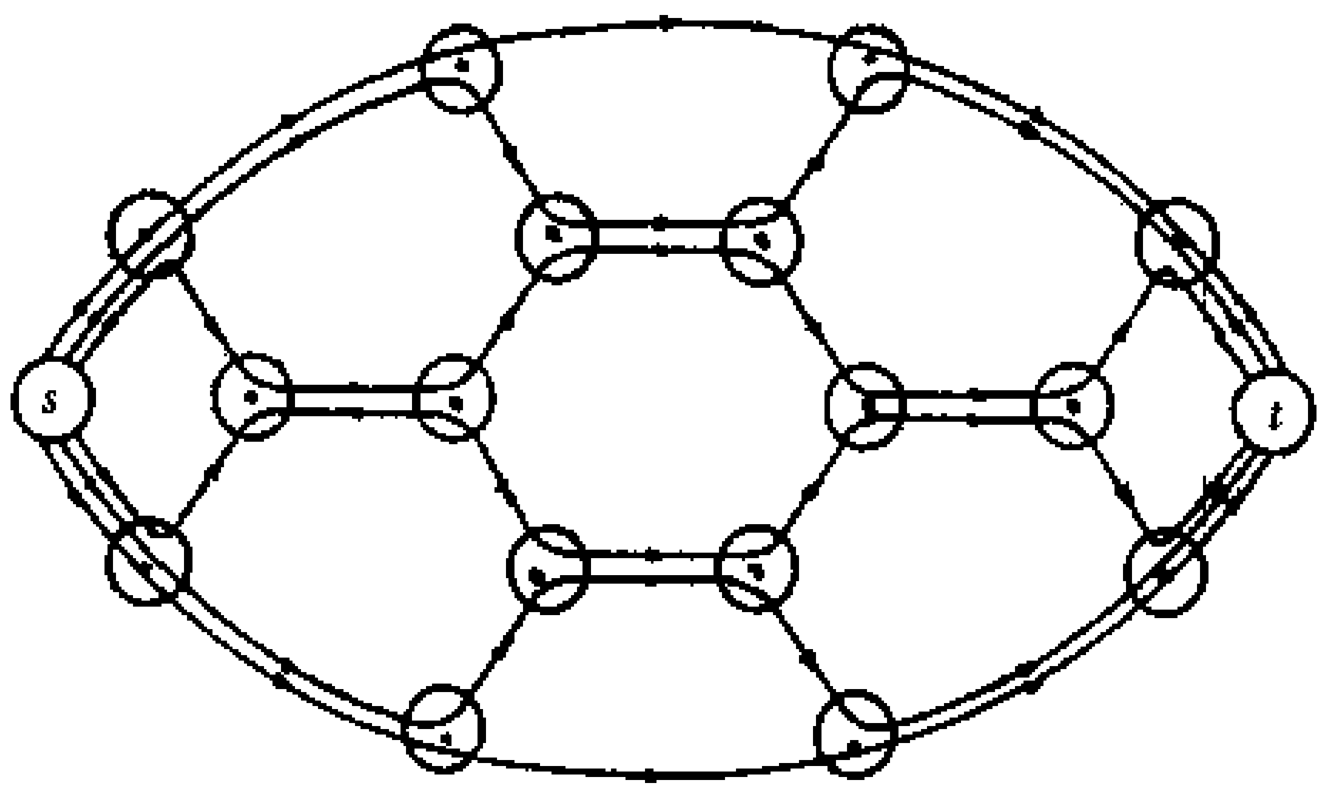


图 1.117

1.15.6 流与二分图

1）二分图的次数列判别

任意给定两个非负整数序列 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$，$q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$，是否存在二分图（单图）G，其顶划分是 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，使得 $d(x_i)=p_i$，$d(y_t)=q_i$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$？

若上述问题得到肯定的回答，则称(p,q)被二分图 G 实现. 其必要条件是

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j. \tag{1}$$

但(1)并非(p,q)可由二分图实现的充分条件，例如 $p_0=(5,4,4,2,1)$，$q_0=(5,4,4,2,1)$满足(1)，但没有二分图能实现(p_0,q_0).

定理 8 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$，$q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$是满足(1)的非负整数列，且 $q_1\geqslant q_2\geqslant\cdots\geqslant q_n$，则$(p,q)$可由二分图实现的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{m}\min\{p_i,k\}\geqslant\sum_{j=1}^{k}q_j,1\leqslant k\leqslant n. \tag{2}$$

证 令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$是 $K_{m,n}$的顶划分，把 $K_{m,n}$定向，每边皆从 X 指向 Y，得有向图 G. 把 G 的每边容量定为 1，X 为源集合，Y 为汇集合，x_i 的供应量为 p_i，y_j 的需求量为 q_j. 考虑此网络 N 上有供需约束的可行流问题.

对 G 的每个生成子图，对应地有一个 N 上的流，使此子图上每边皆满载，且此对应是一一的. 由(1)知(p,q)可由二分图实现的充要条件是 N 上有可行流.

下面证明 N 中有可行流的充要条件是(2)式成立.

对于 $S\subseteq V(G)$，令

$$I(S)=\{i\mid x_i\in S\},J(S)=\{j\mid y_j\in S\},$$

由定义

$$\left.\begin{aligned}
C(S)&=\sum_{e\in(S,\bar{S})}c(e)=|I(S)|\cdot|J(\bar{S})|,\\
\sigma(X\cap\bar{S})&=\sum_{i\in I(\bar{S})}p_i,\\
\rho(Y\cap\bar{S})&=\sum_{j\in J(\bar{S})}q_j,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

设 N 中有可行流，由定理 5

$$|I(S)|\cdot|J(\bar{S})|\geqslant\sum_{j\in J(\bar{S})}q_j-\sum_{i\in I(\bar{S})}p_i.$$

取 $S=\{x_i\mid p_i>k\}\cup\{y_j\mid j>k\}$，于是

$$\sum_{i\in I(S)}\min\{p_i,k\}\geqslant\sum_{j=1}^{k}q_j-\sum_{i\in I(\bar{S})}\min\{p_i,k\},$$

因此(2)成立.

反之，若(2)式成立，S 是 $V(G)$的任一子集，由(2)与(3)得

$$\begin{aligned}
C(S)&\geqslant\sum_{i\in I(S)}\min\{p_i,k\}\geqslant\sum_{j=1}^{k}q_j-\sum_{i\in I(\bar{S})}\min\{p_i,k\}\\
&\geqslant\rho(Y\cap\bar{S})-\sigma(X\cap\bar{S}),
\end{aligned}$$

其中 $k=|J(\bar{s})|$. 由定理 5，N 有可行流，证毕.

从算法的角度判断(p,q)可否由某二分图来实现，等价于定理 8 证明中的网络是否有可行流，这又等价于定理 5 证明中 N'上是否有使$(Y,\{y_0\})$中每边皆满载的最大流，至此，我们搞清楚了：先求 N'中的最大流，若它使$(Y,\{x_0\})$中边皆满载，则此流标志了一个(p,q)的实现过程，所需的二分图之边仅取流值为 1 的边.

2)二分图上的匹配与流

设$G(X,Y;E)$是一个二分图，构作网络 $N(G(\bar{V},\bar{E}),c(e))$：

$\bar{V}=\{s,t\}\cup V(G)$，s 为源，t 为汇；

$\bar{E}=\{sx\mid x\in X\}\cup\{yt\mid y\in Y\}\cup\{xy\mid xy\in E(G)\}$，

赋边容 $c(sx)=c(yt)=1,c(xy)=\infty$.

定理 9 二分图中最大匹配的边数等于网络 $N(G(\bar{V},\bar{E}),c(e))$中最大流量.

证 设 M 是最大匹配，对 M 中每边 xy，通过有向轨 $sxyt$ 从 s 流到 t 1 个单位. 显然，对 M 中的不同边，这种有向轨是独立的，即不与别的 s 到 t 的运量为 1 的轨有公共内顶，故最大流 $F\geqslant|M|$.

设 f 是 N 上的整值流函数，所有从 s 到 t 的有向轨皆形如 $sxyt$，若它从 s 到 t 运送一个流量，则不会再有边 xy'或 $x'y$ 能被用来通过流量. 故使得 $f(xy)=1$ 的边集构成 $G(X,Y;E)$中一个匹配，于是$|M|\geqslant F$. 从而$|M|=F$，证毕.

定理 9 指出求 N 上最大流，$f(xy)=1$ 的边即是 G 上最大匹配.

习题十

1. 若有向网络中不存在从 s 到 t 的有向轨，则从源 s 到汇 t 的最大流量和最小截量皆为零.

2. 求图 1.118 中的最大流，边旁写的是边容量.

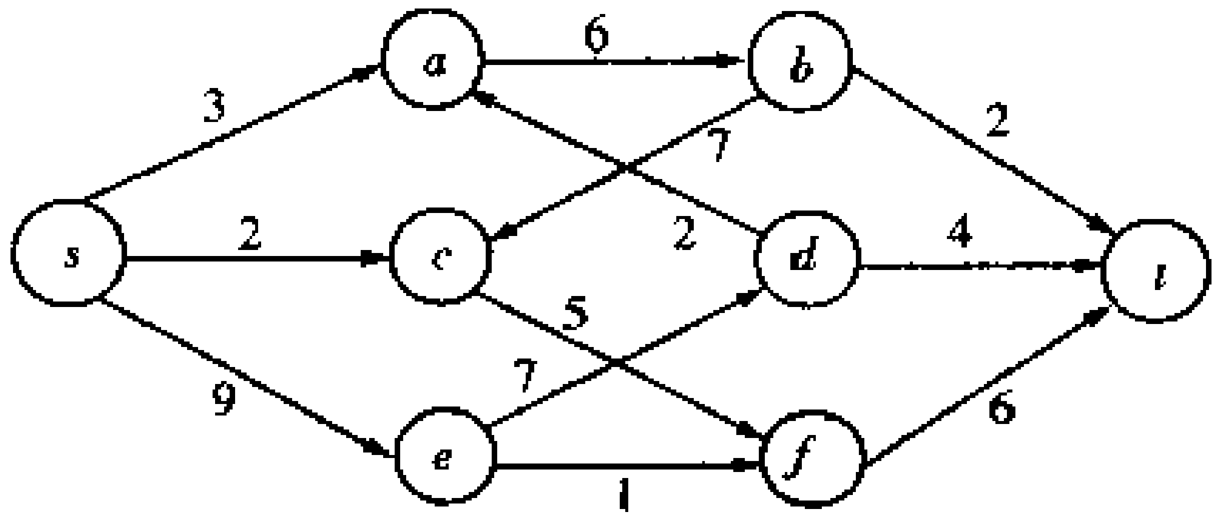


图 1.118

3. 图 1.119 的网络中，x_1, x_2, x_3 是同种商品的货源，供应量

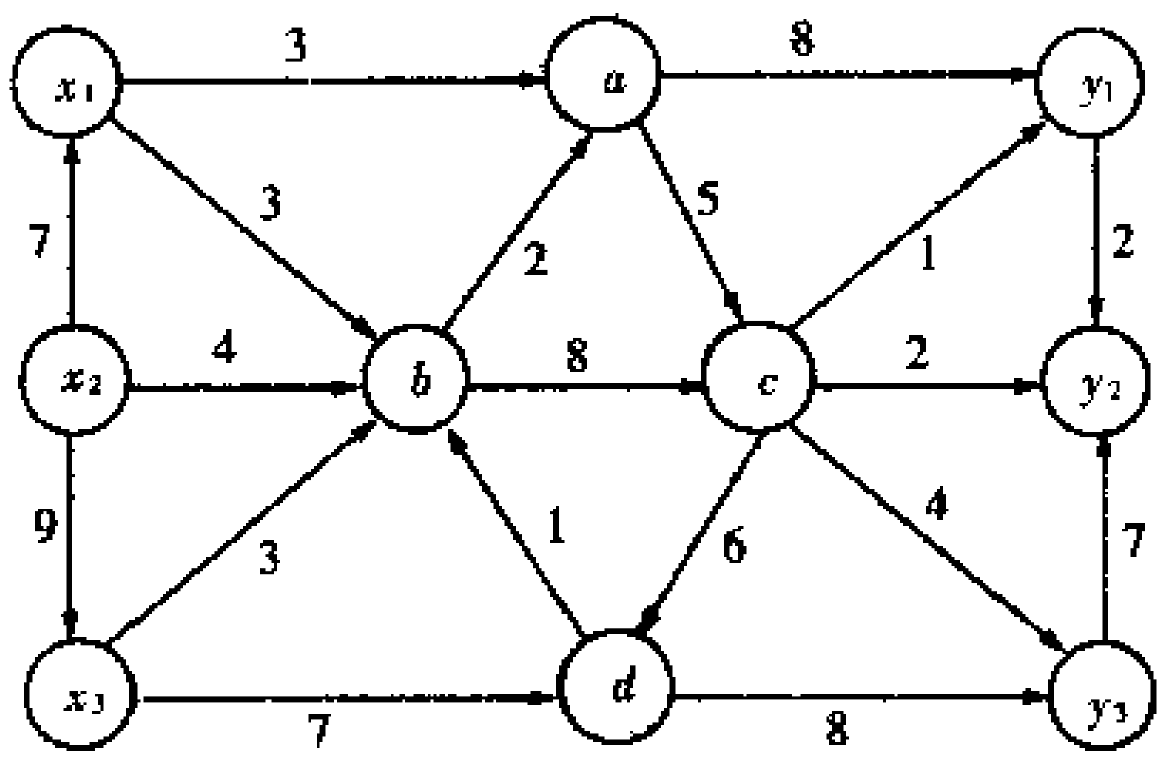


图 1.119

x_1 为 5，x_2 为 10，x_3为 5；y_1、y_2、y_3 是市场，需求量 y_1 是 5，y_2 是 10，y_3 是 5，是否所有的需求皆可同时被满足？

4. 图 1.120 中，除边有容量外，s 与 t 外的每一顶都有一个可以通过它的流量的上界，即顶容量，它写在顶名之下，求此网络的最大流.

5. (a)写一个如同 2F 算法的标志过程，但标志由 t 开始，到达 s 时即得一可增载轨.

(b)写出一个当此边容量增大时，最大流量也增大的边之定位方法.

(c) (b)中所述之边总存在吗?

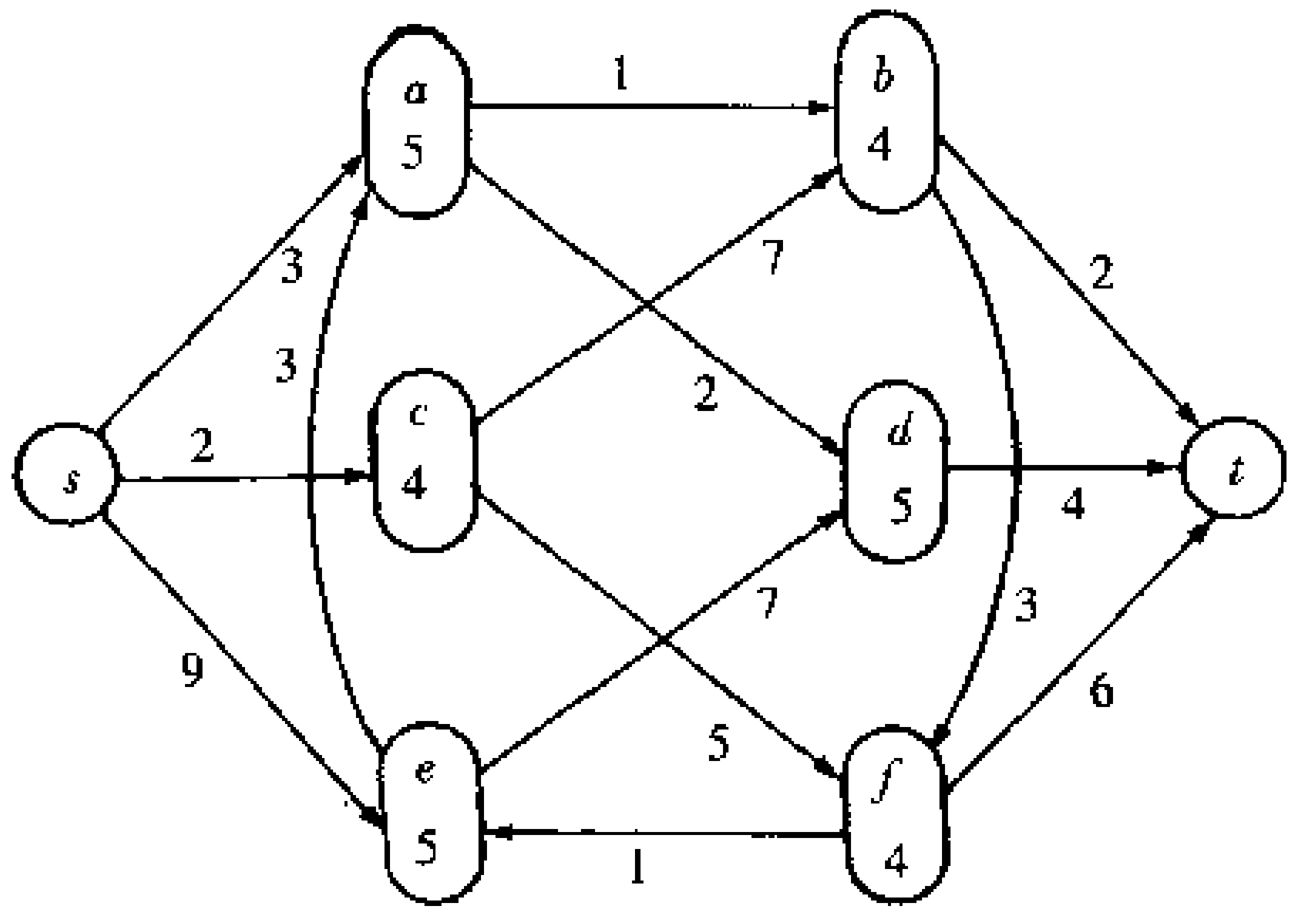


图 1.120

6. 证明:有供需约束的网络上有可行流的充要条件是:N'中有一个使$(Y,\{y_0\})$每边皆满载的流,其中 N'见定理 5 之证明所云.

7. 证明:在有正下界 $b(e)$但无上界($c(e)=\infty$)的网络中,存在可行流的充要条件是:对每边 e,要么 e 在一个有向回路上,要么 e 在由 s 到 t 的或由 t 到 s 的有向通路上.

8. 在第 2 题中,若边上写的是下界但无上界,求一个最小流.

9. 下面两个网络(图 1.121,1.122)中,哪个无可行流? 若存

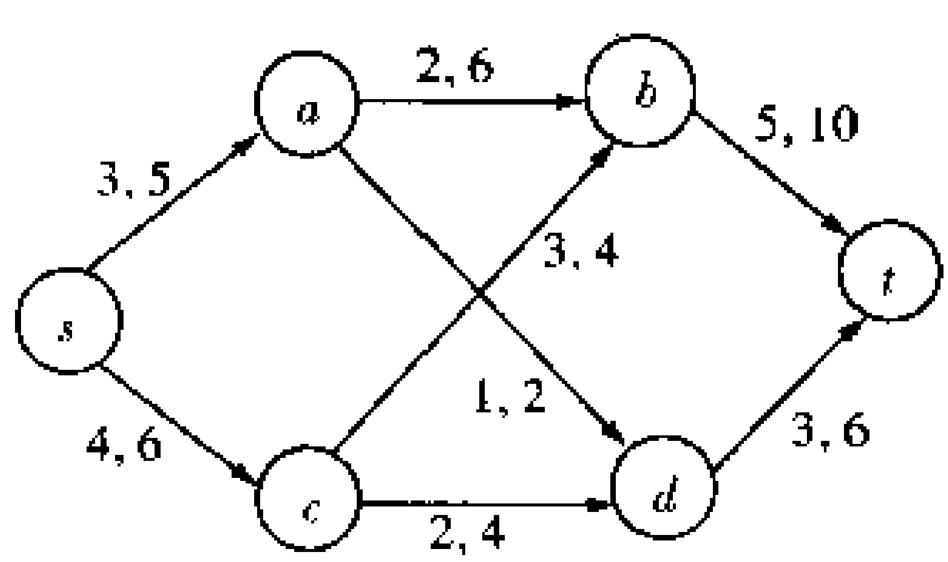


图 1.121

在可行流，求其最大流和最小流；若不存在可行流，找一个不含源和汇的顶子集，它要么要求"冒出"流，要么要求"漏掉"流．

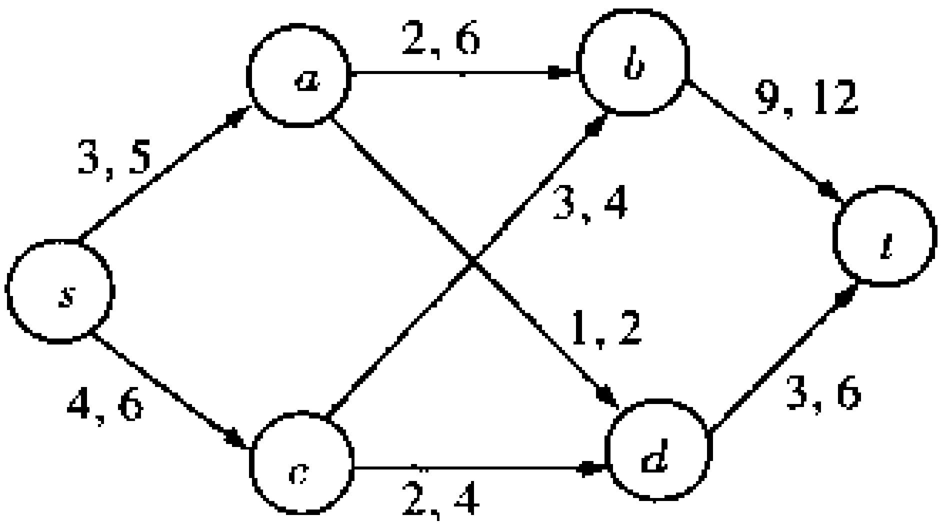


图 1.122

10．证明：有上下界的网络中无可行流的充要条件是：存在一个顶子集，不含源与汇，且它要求"冒出"或"漏掉"流．

11．证明：(p,q)不能被二分图实现，其中 $p=q=(5,4,4,2,1)$．

12．七种设备用五架飞机运往目的地，每种设备各有四台，五架飞机的容量分别是 8,8,5,4,4 台，问能否有一种装机方案，使同种设备不会有两台同在一架飞机上？若飞机容量分别是 7,7,6,4,4 时，又怎么样？

13．张王李赵四人小乐队中，张善于演奏小提琴、大提琴和吉它；王善于大提琴和钢琴；李善于小提琴和大提琴；赵只会弹吉它．四人同台演出，每人演奏一种乐器，试求所有可能的演奏方案．

14．设 M 是二分图 G 的一个匹配，则存在一个最大匹配 M'，使得被 M 许配的每个顶也被 M' 许配．

15．$S_1,S_2,\cdots,S_m$ 是有限集，$\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 叫做相异样品组(SDR)，若对每个 i，$1\leqslant i\leqslant m$，$e_i\in S_i$．

(a)若 SDR 存在，写出求 SDR 的算法．

(b)证明：SDR 存在的充要条件是：对任意 $k(1\leqslant k\leqslant m)$个集合之并至少含 k 个元素．

16．π_1 与 π_2 是 m 个元素的一个集合的划分，每个之中恰含 r 个两两不交的子集，欲求 r 个元素的一个子集，使得 π_1 与 π_2 的

每个子集都被表征.

(a)给一个有效算法,判断这样的 r 个样品的集合是否存在.

(b)与 Hall 定理相似地建立一个这种样品集合存在的充要条件.

17.用网络流技术证明关于匹配的 Hall 定理.

18.S 是人的集合,$|S|\geqslant 4$,每四人中总有一人与其余三人相识,则 S 中有一人,他与 S 中每人相识.

19.用网络流技术证明:有 n 男 n 女 $2n$ 个同学,每个人恰认识 k 个($1\leqslant k\leqslant n$)异性同学,则全体同学可组织一次舞会,使每对舞伴皆相识,而且可以组织 k 场舞会,使每个人皆与每个相识者跳一次舞.

20.在图 1.123 中 $\wedge$ 表示"AND 顶",$\vee$ 表示"OR 顶",正如 PERT 中一样,边表示过程,边权是过程用时,当所有(至少一个)进入的过程完成时,从一个 AND(OR)顶出发的过程才可开始,写出一个算法,求从开始(于 s 顶)到结束(于 t 顶)所用的最少时间;且把你的算法用于图 1.123;指出此算法的时间复杂度.

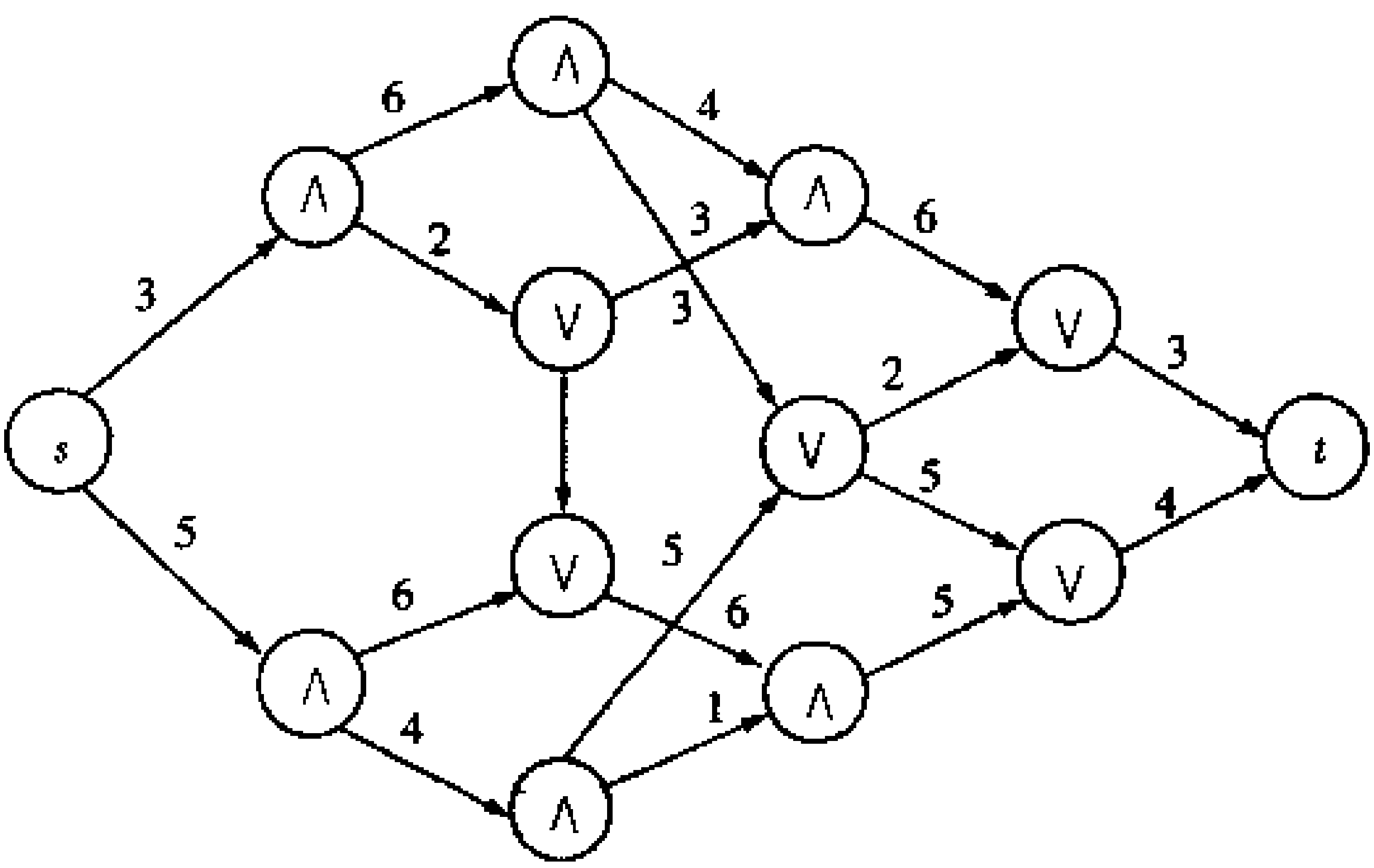


图 1.123

21.若在未必无有向回路的有向图上考虑上题,应如何修改你

的算法或指出无解?

1.16 连通度

1.16.1 无向图顶连通度

定义 1 设 $S\subset V(G)$, $\{a,b\}\subset V(G)-S$,若每条由 a 到 b 的轨至少有一顶在 S 中,则称 S 是无向图 G 中的 (a,b) 分离集;a,b 相邻时无 (a,b) 分离集.设 $\mathscr{S}$ 是 (a,b) 分离集集合,令

$$N(a,b)=\min_{S\in\mathscr{S}}|S|,$$

则 $N(a,b)$ 叫做 a 顶与 b 顶的分离数.

称从 a 到 b 的彼此无公共内顶的轨为独立轨.□

定理 1 a,b 是图 $G(V,E)$ 不相邻的顶,则 $N(a,b)$ 等于 a, b 间独立轨的条数 $p(a,b)$.

证 我们构作一个有向图 $G(\bar{V},\bar{E})$: $V(G)$ 中的每个顶 v 变成 $\bar{V}$ 中的两个顶 v', v'',且加有向边 $e_v=v'v''\in\bar{E}$;对于 $E(G)$ 中每条边 $e=uv$,在 E' 中有两条边 $e'=u''v'$, $e''=v''u'$ 与之对应,此外 $G(\bar{V},\bar{E})$ 中无其它的边与顶,见图 1.124,图中画的是 $G(V,E)$ 中的一条边 uv 变成 $G(\bar{V},\bar{E})$ 中的一个有向四阶圈 $C_4=u'u''v'v''u'$.如此在 $G(\bar{V},\bar{E})$ 上形成一个网络,以 a'' 为源,b' 为汇,对 e_v 型边容量为 1,其它边容量 ∞.下证 $p(a,b)$ 是 a'' 到 b' 的最大流量 F.

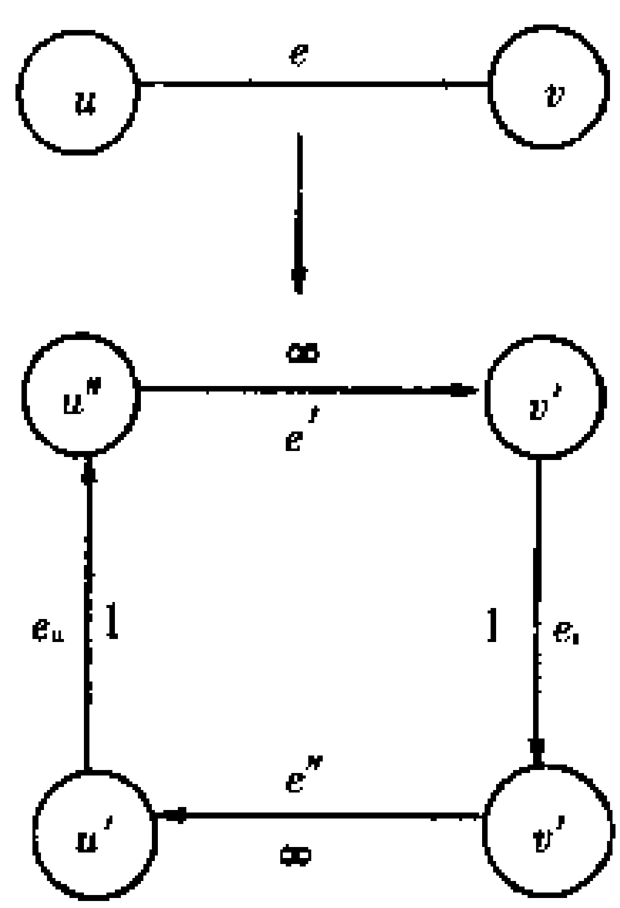


图 1.124

设无向图 $G(V,E)$ 中有 $p(a,b)$ 条从 a 到 b 的独立轨,每条这种轨形成 $G(\bar{V},\bar{E})$ 中的一条有向轨,在 $G(V,E)$ 中的轨

$$av_1v_2\cdots v_{l-1}b$$

在 $G(\bar{V},\bar{E})$ 中相应地有向轨是

$$a''v'_1v''_1v'_2v''_2\cdots v'_{l-1}v''_{l-1}b',$$

这些有向轨在 $G(\bar{V},\bar{E})$ 中两两无公共内顶，每条都可以用来从 a'' 到 b' 流过 1 个单位的流量，故 $F\geqslant p(a,b)$.

设 f 是一个最大流，其流量是 F，由于 $G(\bar{V},\bar{E})$ 的构造和边容量之分配知，这 F 个单位的流量分解到 F 条独立有向轨上去了，每条流过 1 个流量，所以 $F\leqslant p(a,b)$. 至此得 $F=p(a,b)$.

由双最定理，F 等于某截 $(S,\bar{S})$ 的截量，$a''\in S$，$b'\in\bar{S}$，所以 $C(S)=\sum\limits_{e\in(S,\bar{S})}c(e)=F<\infty$，即 $(S,\bar{S})$ 中的边皆 e_v 型. 而在 $G(\bar{V},\bar{E})$ 中，从 a'' 到 b' 的有向轨至少含 $(S,\bar{S})$ 中的一条边，故 $G(V,E)$ 中，每条由 a 到 b 的轨至少含一个顶 v，使 e_v 在 $(S,\bar{S})$ 中，于是

$$R=\{v\mid v\in V(G),e_v\in(S,\bar{S})\}$$

是无向图 $G(V,E)$ 中 (a,b) 分离集，且 $|R|=C(S)=F$. 从而 $N(a,b)\leqslant F$，另一方面，显然有 $N(a,b)\geqslant P(a,b)$，故 $N(a,b)=p(a,b)$，证毕.

定义 2

$$\kappa(G)=\begin{cases}|V(G)|-1, & G\text{ 是完全图};\\ \min\limits_{a,b\text{不邻}}N(a,b), & G\text{ 非完全图}\end{cases}$$

称为无向图 G 的顶连通度. $\kappa(G)\geqslant k$ 时，G 称为 k 连通图.

□

定理 2 $\kappa(G)=\min\limits_{a,b\in V(G)}p(a,b)$.

证 对于完全图，定理显然成立，下面考虑 G 不是完全图的情形. 先证明

$$\min_{\substack{a,b\in V(G)\\ a,b\text{ 不邻}}}p(a,b)=\min_{a,b\in V(G)}p(a,b).$$

设 $ab\in E(G)$，$e=ab$，且 $p(a,b)$ 是一切顶对间独立轨最大条数的最小值，令 $G'=G-e$，在 G' 中 a,b 间独立轨最大条数为 $p(a,$

$b)-1=p'(a,b)$. 由定理 1, G'中存在(a,b)分离集 R, 使得

$$p'(a,b)=|R|=p(a,b)-1.$$

若$|R|=|V(G)|-2$, 则 $p(a,b)=|V|-1$; 但当 $u,v\in V(G)$, u 与 v 不相邻时, $p(u,v)+2\leqslant|V(G)|$, $p(u,v)\leqslant|V|-2$, 这是不可能的, 故得$|R|<|V(G)|-2$. 于是存在 $v\in V(G)-(R\cup a,b)$, 不妨设 R 是(a,b)分离集(不然用(b,v)代替(a,v)), 于是 G 中$av\notin E(G)$, $R\cup\{b\}$也是(a,v)的分离集, 因而

$$p(a,v)\leqslant|R|+1=p(a,b),$$

故得

$$\min_{\substack{a,b\in V(G)\\ a,b\text{不邻}}} p(a,b)=\min_{a,b\in V(G)} p(a,b).$$

对于 G 不是完全图, $\kappa(G)=\min\limits_{\substack{a,b\in V(G)\\ a,b\text{不邻}}} N(a,b)$, 所以 $\kappa(G)=\min\limits_{a,b\in V(G)} p(a,b)$, 证毕.

定理 1 和定理 2 告知, 通过求最大流可以得到无向图的顶连通度. 这两个定理是图论中著名的所谓 Menger 定理, 它们有许多精彩的推论.

定义 3 若 G 是无向图, $x\in V(G)$, $U\subset V(G)$, $x\notin U$, 一端为 x, 另一端在 U 中的$|U|$条除 x 外无公共顶的轨形成的子图叫做 G 的一个$x-U$ 扇. □

推论 1 G 是k 连通图的充要条件是$|V(G)|\geqslant k+1$, 且 $\forall U\subset V(G)$, $|U|=k$, $x\in V(G)-U$, 则存在 G 的$x-U$ 扇.

证 设 G 是k 连通图, 显然$|V(G)|\geqslant k+1$, 加一新顶 y, 把 y 与U 中每项之间连一边, 得图 H, 对 H 应用定理 2, 知 x 与y 之间有 k 条独立轨, 故 G 中有$x-U$ 扇子. 反之, 设$|V(G)|\geqslant k+1$, 且有推论 1 中有述的扇子, 但 G 非k 连通图, 则 $\kappa(G)\leqslant k-1$, 于是存在 $x,y_1\in V(G)$, $S\subset V(G)$, $|S|=k-1$, 在 $G-S$ 中, x, y_1 不连通, 在 G 中无$x-(S\cup y_1)$扇, 矛盾, 证毕.

推论 2(Dirac) G 是k 连通图, $k\geqslant2$, 则任 k 个顶共圈.

证 对 k 进行归纳证明. $k=2$ 时,推论显然成立. 假设 $k=l\geqslant 2$ 时,推论 2 已成立,往证 $k=l+1$ 时,推论 2 仍成立.

事实上,图 G 是 $l+1$ 连通的,所以也是 l 连通的,由归纳法假设,任取的 $l+1$ 个顶中有 l 个共圈,记它们所在的圈是 C_l. 另一方面,由推论 1, $\forall x\in V(G)$, $\forall U\subset V(G)$, $x\notin U$, $|U|=l+1$,存在 $x-U$ 扇. 记上述 $l+1$ 个顶是 $v_1,v_2\cdots,v_{l+1}$, $\{v_1,v_2,\cdots,v_l\}\subseteq V(C_l)$,而 $|V(G)|\geqslant l+2$,我们取 $U=\{v_1,v_2,\cdots,v_l,w\}$, $x=v_{l+1}$,若 C_l 上只有 l 个顶,由扇子 $v_{l+1}-U$ 可知 $v_1,v_2\cdots,v_{l+1}$ 共圈: $v_1v_2\cdots v_l\cdots v_{l+1}\cdots v_1$.

若 C_l 上存在一个顶 $u\notin\{v_1,v_2\cdots v_l\}$,不妨设 $u\in\overset{\frown}{v_1v_2}$. 在扇子 $V_{l+1}-\{v_1,v_2,\cdots v_l,u\}$ 上, v_{l+1} 与 $\{v_1,v_2,\cdots,v_l,u\}$ 之间的 $l+1$ 条独立轨为 $p(u_{l+1},v_i)$, $(i=1,2,\cdots,l)$ 与 $p(v_{l+1},u)$. 它们与 C_l 的第一个交点(顶)分别是 $w_1,w_2,\cdots,w_l,w_{l+1}$,且 $w_i\neq w_j$ $(i\neq j)$, $1\leqslant i,j\leqslant l+1$. 由鸽笼原理,必有两个顶 w_i,w_j 落在同一段弧 $\overset{\frown}{v_mv_{m+1}}$ 上,脚标 m 满足 $1\leqslant m\leqslant l$(按 mod$l$ 计). 于是 $v_1,v_2,\cdots,v_{l+1}$ 共圈:

$$v_{l+1}\cdots w_iv_mv_{m+1}\cdots v_2v_1v_lv_{l-1}\cdots v_{m+1}w_j\cdots v_{l+1},$$

这里假设在 $\overset{\frown}{v_mv_{m+1}}$ 上 w_i 距 v_m 较近,且可能 $v_m=w_i$,或可能 $w_j=v_{m+1}$,证毕.

1.16.2 有向图的顶连通度

定义 4 G 是一个有向图, $S\subset V(G)$, $S\cap\{a,b\}=\varnothing$, $a,b\in V(G)$,从 a 到 b 的有向轨上至少有一个内顶属于 S,则称 S 是 G 的一个 (a,b) 分离集. 令 $\mathscr{S}$ 是 G 中 (a,b) 分离集集合,则称

$$N(a,b)=\min_{S\in\mathscr{S}}|S|$$

为 (a,b) 分离数. 称 $\kappa(G)$ 为 G 的顶连通度,这里

$$\kappa(G)=\begin{cases}|V|-1, & G\text{ 是双向完全图;}\\ \min\limits_{ab\notin E(G)}N(a,b), & G\text{ 非双向完全图.}\end{cases}$$

所谓双向完全图是指 $\forall a,b\in V(G)$, ab 与 $ba\in E(G)$.

$\kappa(G)>0$ 当且仅当 G 是强连通有向图。

我们把有向图 G 中每条边 $e=uv$ 变成一条有向轨 $u'u''v'v''$，得到新的有向图 $\overline{G}$. 在 $\overline{G}$ 上以 a''为源，以 b'为汇，边容量为 $c(u'u'')=c(v'v'')=1, c(u''v')=\infty$，构成一个网络 $\overline{N}$. 于是与无向图相似地可得：

(1) $ab\notin E(G)$，则 $p(a,b)=N(a,b)=\overline{N}$ 中最大流量，其中 $p(a,b)$是从顶 a 到 b 的有向独立轨条数.

(2) G 不是双向完全图，则

$$\min_{ab\notin E(G)} p(a,b)=\min_{a,b\in V(G)} p(a,b).$$

(3) $\kappa(G)=\min_{a,b\in V(G)} p(a,b)$.

可见，通过求最大流可求得非双向完全有向图中 $N(a,b)$ $(ab\notin E(G))$，经 min 运算，即可得有向图的 $\kappa(G)$. 注意这里的字母 a 与 b 是有序的.

1.16.3 无向图的边连通度

定义 5 设 $T\subseteq E(G)$，G 是无向单图，$a,b\in V(G)$，从 a 到 b 的每条轨上至少有一条边在 T 中，则称 T 是 G 中的(a,b)边分离集. 令 $\mathcal{T}$表示(a,b)边分离集集合，令

$$M(a,b)=\min_{T\in\mathcal{T}}|T|,$$

$M(a,b)$称为 a,b 的边分离数.

$$\kappa'(G)=\min\{M(a,b)\mid(a,b)\in V\times V\}$$

称为 G 的边连通度，$\kappa'(G)\geq k$ 时，G 称为 k 边连通图.

两两无公共边的一组轨称为弱独立轨. □

把 $G(V,E)$中每边 $e=uv$ 变成两条有向边 $e'=uv, e''=vu$，赋权 $c(e')=c(e'')=1$，以 a 为源，以 b 为汇，得一网络 $\overline{N}$，与无向图顶连通度相似地可以证明

$M(a,b)=p'(a,b)=\overline{N}$ 中从 a 到 b 的最大流量，其中 $p'(a,b)$是无向图 $G(V,E)$中 a 到 b 的弱独立轨的条数. 于是用网络流技术可以求得 $\kappa'(G)$.

容易证明，对于无向图 $G,\kappa(G)\leqslant\kappa'(G)\leqslant\delta(G)$。而且 G 是 k 边连通图的充要条件是，$\forall u,v\in V(G)$，u 与 v 之间至少有 k 条弱独立轨.

1.16.4 有向图的边连通度和弱独立外向生成树

定义 6 $T\subseteq E(G)$，G 是有向图，且从 a 到 b 的有向轨上至少有一边在 T 中，则称 T 是有向图 G 中的 (a,b) 边分离集，其中 $a,b\in V(G)$.

$$\kappa'(G)=\min\{M(a,b)\mid(a,b)\in V\times V\},$$

其中

$$M(a,b)=\min_{T\in\mathcal{T}}|T|,$$

$\mathcal{T}$ 是 G 中 (a,b) 边分离集集合. □

以 a 为源，以 b 为汇，每边容量皆 1，在 G 上建立网络 N，则与前面相似地可以证明

$$M(a,b)=p'(a,b)=N\text{ 中从 }a\text{ 到 }b\text{ 的最大流量}.$$

于是求 $\kappa'(G)$ 的问题化成了求网络最大流问题.

定理 3（Edmonds1973） a 是有向图 G 的一个顶，且 $\min\limits_{v\in V-\{a\}}M(a,v)=k$，则 G 中存在以 a 为根的 k 棵弱独立外向生成树（既无公共边的生成树）.

证 对 k 进行归纳证明. $k=1$ 时，$\min\limits_{v\in V-\{a\}}M(a,v)=1$，又 $M(a,v)=p'(a,v)$，故从 a 至任一顶 v 至少有 1 条有向轨，于是有一棵以 a 为根的外向生成树，即定理 3 对 $k=1$ 成立.

令 $\delta_G(S)=|(S,\bar{S})|$，$S\subset V(G)$，且用 $G-H$ 表示从 G 中删去子图 H 的一切边得到的生成子图. 显然（因为 $\delta_G(S)$ 是截量，而 $M(a,v)$ 是最大流量）有

$$\min_{v\in V-\{a\}}M(a,v)\geqslant k\Leftrightarrow\text{对每个 }S\subset V(G),a\in S,$$
$$S\neq V(G),\text{有 }\delta_G(S)\geqslant k. \tag{1}$$

设 $F(V',E')$ 是 G 的子图，且

（i）F 是根在 a 的外向树；

(ⅱ)对每个 $S\subset V(G),S\neq V(G),a\in S,\delta_{G-F}(S)\geqslant k-1$.

这样的 F 是存在的.若 F 是 G 的外向生成树,由归纳法假设及(1)式知,$G-F$ 中有 $k-1$ 棵弱独立的以 a 为根的外向生成树,于是 G 中有 $k-1+1=k$ 棵以 a 为根的外向弱独立生成树.

若 F 不是 G 的外向生成树,我们下面令 F"生长"成一棵外向生成树又不破坏(ⅰ)与(ⅱ).为此考虑满足下列三个条件的集合 $S\subset V(G)$:(1)$a\in S$,(2)$S\cup V'\neq V$,(3)$\delta_{G-F}(S)=k-1$.若 S 集不存在,我们把$(V',\overline{V'})$的任一边 e 加到F 上,使 $F+e$ 仍满足(ⅰ)(ⅱ).

(ⅰ)自然满足.下面反证(ⅱ)亦能满足.不然,存在某个集合 $S,S\neq V,a\in S$,但 $\delta_{G-(F+e)}(S)<k-1$,即 $\delta_{G-F}(S)<k,\delta_{G-F}(S)\leqslant k-1$.又已有 $\delta_{G-F}(S)\geqslant k-1$,故 $\delta_{G-F}(S)=k-1$,即 S 满足(3),S 满足(1)早已成立,若 S 还满足(2),则 S 满足了(1)(2)(3),与不存在满足(1)(2)(3)的 S 矛盾.

下面验证 S 满足(2).设 $e=uv$ 是加到F 上去的那条边,因为 $F_{G-(F+e)}(S)<k-1,\delta_{G-F}(S)=k-1$,故 $v\notin S$,又 $v\notin V'$,所以 $S\cup V'\neq V$,即 S 满足(2).

若存在满足(1)(2)(3)的 S,A 是满足(1)(2)(3)的极大顶子集,因 F 的边之头皆在 V'中,故

$$\delta_{G-F}(A\cup V')=\delta_G(A\cup V')\geqslant k,$$

这个不等式指出,在 $G-F$ 中存在一边 $e=xy,e\in(A\cup V',\overline{A\cup V'})$,但 $e\notin(A,\overline{A})$,所以 $x\in\overline{A}\cap V',y\in\overline{A}\cap\overline{V'}$.下面证明 $F+e$ 满足(ⅰ)与(ⅱ).

(ⅰ)自然满足.

设 $S\subset V(G),S\neq V(G),a\in S,e\notin(S,\overline{S})$,则

$$\delta_{G-(F+e)}(S)=\delta_{G-F}(S)\geqslant k-1. \tag{2}$$

设 $e\in(S,\overline{S})$,对 $V(G)$的每两个子集 S 与A,

$$\delta_{G-F}(S\cup A)+\delta_{G-F}(S\cap A)\leqslant\delta_{G-F}(S)+\delta_{G-F}(A). \tag{3}$$

由(2)式与(3)式及 $\delta_{G-F}(A)=k-1,\delta_{G-F}(A\cap S)\geqslant k-1$ 得

$$\delta_{G-F}(S\cup A)\leqslant\delta_{G-F}(S).\tag{4}$$

又 $x\in S$ 而 $x\notin A$,故 $S\not\subseteq A$,于是 $|S\cup A|>|A|$;又 $y\in\bar{S}$,$y\in\bar{A}$,$y\in\overline{V'}$,所以 $S\cup A\cup V'\neq V$.由 A 之极大性,$\delta_{G-F}(S\cup A)\geqslant k$,$\delta_{G-F}(S)\geqslant k$,故 $\delta_{G-(F+e)}(S)\geqslant k-1$,即得证(ii),证毕.

上述证明是构造性的,它提供了 k 个外向弱独立同根生成树的求法.

定理 4 设 G 是有向图,$\kappa'(G)\geqslant k>0$,则 $\forall u,v\in V(G)$,以及 $\forall l\in\{0,1,2,\cdots,k\}$ 则存在从 u 到 v 的 l 条弱独立有向轨,同时存在从 v 到 u 的 $k-l$ 条弱独立有向轨.

证 构作辅助图 $\bar{G}$ 如下:G 上加新顶 a,从 a 到 u 加 l 条平行的新边,从 a 到 v 加 $k-l$ 条平行的新边.若能证明 $\bar{G}$ 中

$$\min_{w\in V(G)}M(a,w)=k,$$

由定理 3,可以在 $\bar{G}$ 中找到以 a 为根的 k 棵外向弱独立生成树;由 $\bar{G}$ 之构作知定理 4 成立.

由所加的 k 条新边可知,$\min\limits_{w\in V(G)}M(a,w)\leqslant k$,下证"<"号不成立.若 $\min\limits_{w\in V(G)}M(a,w)<k$,则存在 $S\subset V(G)\cup\{a\}$,$a\in S$,$|(S,\bar{S})|<k$,显然 $\{a\}\neq S$.令 $x\in S-\{a\}$,$y\in\bar{S}$,由于 $|(S,\bar{S})|<k$,得 $M(x,y)<k$,此与 $\kappa'(G)\geqslant k$ 矛盾,证毕.

1.16.5 可靠通讯网络

欲构作一个有线通讯网络,使得几个通讯台站出现障碍时,其余台站仍可彼此通话,显然有两个要求:一个允许出故障的台站数目要多,一是整个造价要少.这个重要的实际问题之数学模型如下:

G 是加权连通图,k 是给定的自然数,求 G 的有最小权的 k 连通生成子图.当 $k=1$ 时,这就是由 Kruskal 算出求得的生成树.$k>1$ 时尚无人给出解答.

当 $G=K_\nu$,每边权皆 1 时,Harary 于 1962 年给出如下的解.

令 $f(m,n)$ 表示 n 个顶 m 连通图当中边数的最小值，$m<n$. 由 $\sum\limits_{v\in V(G)} d(v)=2\varepsilon$，$\kappa(G)\leqslant\kappa'(G)\leqslant\delta(G)$，有 $f(m,n)\geqslant\left\{\frac{mn}{2}\right\}$.

Harary 构作出 n 项 m 连通图，它的边数恰为 $\left\{\frac{mn}{2}\right\}$ 条，且 $f(m,n)=\left\{\frac{mn}{2}\right\}$，这种图记成 $H_{m,n}$. $H_{m,n}$ 构作如下：

(1) m 是偶数，$m=2r$，$H_{2r,n}$ 以 $\{0,1,2,\cdots,n-1\}$ 为顶集合，当 $i-r\leqslant j\leqslant i+r$ 时，在顶 i 与 j 之间连一边，这里加法在 $\bmod n$ 意义下进行.

(2) m 是奇数，$m=2r+1$，n 是偶数. 先构作 $H_{2r,n}$，然后对 $1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}$ 的 i，在 i 与 $i+\frac{n}{2}$ 之间加一边即得 $H_{2r+1,n}$.

(3) m 是奇数，$m=2r+1$，n 是奇数. 先构作 $H_{2r,n}$，然后在 0 与 $\frac{n-1}{2}$，0 与 $\frac{n+1}{2}$ 之间加上边，在 i 与 $i+\frac{n+1}{2}$ 之间加上边，其中 $1\leqslant i\leqslant\frac{n-1}{2}$，则得 $H_{2r+1,n}$. □

图 1.125 中，(a) 是 $H_{4,8}$，(b) 是 $H_{5,8}$，(c) 是 $H_{5,9}$.

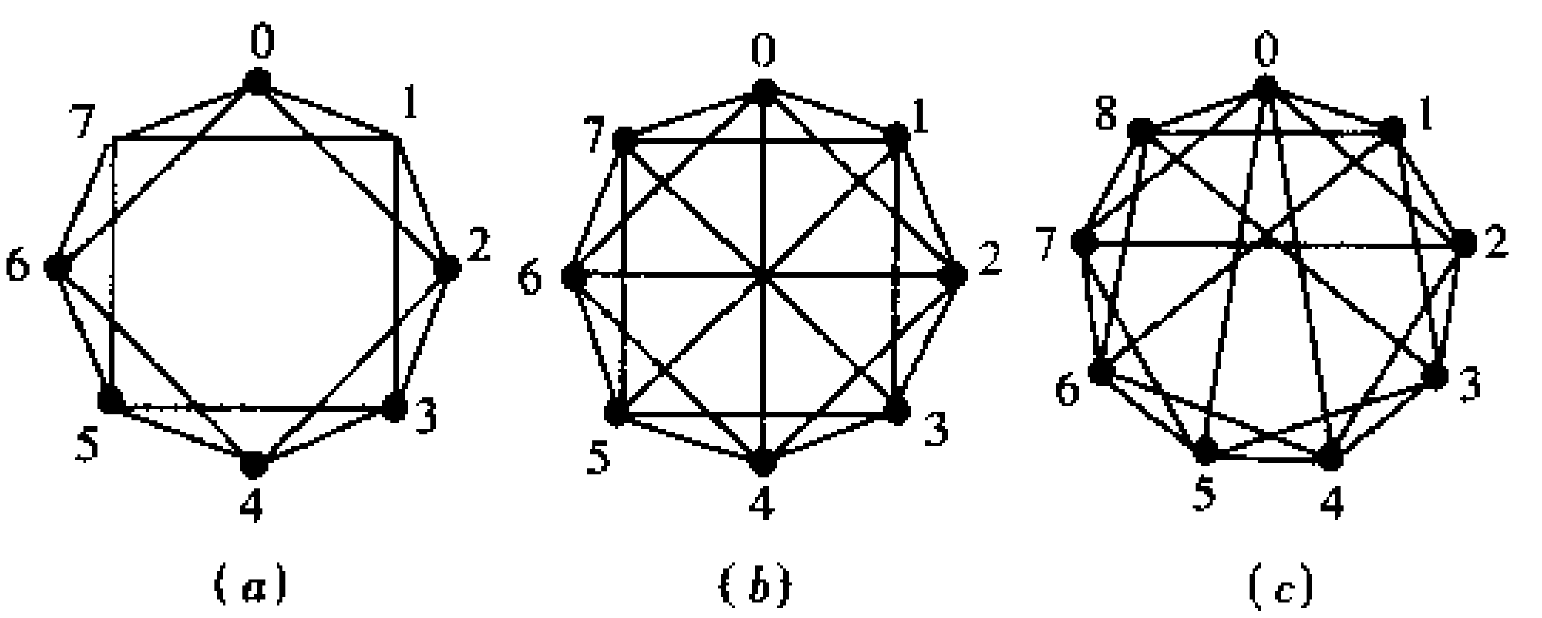


图 1.125

定理 5 $H_{m,n}$ 是 m 连通图，且边数最少.

证 $m=2r$ 时，我们来证明 $H_{2r,n}$ 中没有少于 $2r$ 个顶组成

的分离集．若 V'是一个顶分离集，且 $|V'|<2r$，又 i 与 j 两顶分别属于 $H_{2r,n}-V'$的不同连通片，令

$$S=\{i,i+1,\cdots,j-1,j\},T=\{j,j+1,\cdots,i-1,i\},$$

其中加法在 $\bmod n$ 下执行．因为 $|V'|<2r$，不失一般性，设 $|V'\cap S|<r$，则显然存在 $S-V'$中的序列，从 i 始至 j 终，使得序列中连续二项号码之差的绝对值最大是 r．但这样的序列中相邻顶之间由(1)知存在边，即在 $H_{2r,n}-V'$中有轨 $P(i,j)$，与 i,j 分居于 $H_{2r,n}-V'$的两个连通片矛盾，所以 $H_{2r,n}$是 $2r$ 连通的．

相似地可以证明 $m=2r+1$ 时，$H_{2r+1,n}$是 $2r+1$ 连通的．由于

$$f(m,n)\geqslant\left\lceil\frac{mn}{2}\right\rceil,\varepsilon(H_{m,n})=\left\lceil\frac{mn}{2}\right\rceil,$$

而 $H_{m,n}$是 n 顶 m 连通图，故 $f(m,n)\leqslant\left\lceil\frac{mn}{2}\right\rceil$，从而得证

$$\varepsilon(H_{m,n})=f(m,n)=\left\lceil\frac{mn}{2}\right\rceil,$$

证毕．

由于 $\kappa\leqslant\kappa'$，故 $H_{m,n}$也是 m 边连通图；若用 $g(m,n)$表示 n 顶 m 边连通图中的最少边数，则对于 $1<m<n$，$g(m,n)=\left\lceil\frac{mn}{2}\right\rceil$．

习题十一

1．若 G 是连通图，$\upsilon(G)\geqslant3$，则下列命题等价：

(1)G 是块．(2)G 中任二顶共圈．(3)G 的任一顶与任一边共圈．(4)G 的任二边共圈．(5)任给 G 的二顶及一边，存在连接此二顶且含此边之轨．(6)对 G 的三个不同的顶，存在一轨，连接其中两个顶，第三个顶是此轨之内顶．(7)对 G 的三个不同的顶，存在一轨，连接其中两个顶，第三个顶不在此轨上．

2. $\upsilon\geqslant3$ 的图是 2 连通图的充要条件是任二顶共圈.

3. 试证：$\kappa(G)\leqslant\kappa'(G)\leqslant\delta(G)$.

4. v 是连通图的一个顶点，则下述命题等价：

(1) v 是割顶. (2) 存在与 v 不同的两个顶 u, w，使得 v 在每条由 u 到 w 的轨上. (3) 存在 $V-\{v\}$ 的一个划分 $V-\{v\}=U\cup W, U\cap W=\emptyset$，使得 $\forall u\in U, \forall w\in W$，$v$ 在每条由 u 到 w 的轨上.

5. x 是连通图 G 的一边，则下述命题等价：

(1) x 是 G 的桥. (2) x 不在 G 的任何圈上. (3) 存在两个顶 u, v，使得 x 在每条从 u 到 v 的轨上. (4) 存在 $V(G)$ 的划分 U 与 W，使得任二顶 $u\in U, w\in W$，x 在每条从 u 到 w 的轨上.

6. G 是 k 边连通图，E' 是 G 的 k 条边的集合，则 $\omega(G-E')\leqslant2$.

7. 给出一个 k 连通图 G 及其 k 个顶的集合 V'，使得 $\omega(G-V')>2$.

8. G 是单图，$\delta\geqslant\upsilon-2$，则 $\kappa(G)=\delta$.

9. 找一个单图 G，满足 $\delta=\upsilon-3$，$\kappa(G)<\delta$.

10. G 是单图，$\delta\geqslant\frac{\upsilon}{2}$，则 $\kappa'(G)=\delta$.

11. G 是单图，$\delta\geqslant\frac{1}{2}(\upsilon+k-2)$，则 G 是 k 连通的.

12. 若 $1\leqslant m\leqslant n$，则存在单图，满足 $\kappa=1, \kappa'=m, \delta=n$.

13. P 是 2 连通图中 u 与 v 两顶之间的轨，是否一定有另一条轨与 P 无公共内顶?

14. 若图 G 不含偶圈和孤立顶，则 G 的块是 K_2 或者奇圈.

15. 一个不是块的连通图 G 中至少存在两个块，它们仅含 G 的一个割顶.

16. $b(v)$ 表示图 G 中含顶 v 的块数，则 G 的块数为 $\omega+\sum_{v\in V(G)}(b(v)-1)$.

17. G 是 2 连通图，X 与 Y 是 v 中不相交的子集，且每个之中至少含两个顶，则 G 中含两条无公共内顶的轨 P 与 Q，使得(1)P 与 Q 之起点皆在 X 中，(2)P 与 Q 之终点皆在 Y 中，(3)P 与 Q 的内顶皆不属于 $X \cup Y$.

18. $\forall e \in E(G)$，皆有 $\kappa(G-e) < \kappa(G)$，则称 G 是临界图. 试证：

(a)每个 κ 临界 2 连通图有一个二次顶.

(b)G 是 κ 临界 2 连通图，$v \geqslant 4$，则 $\varepsilon \leqslant 2v-4$.

19. $H_{2r+1,n}$ 是 $2r+1$ 连通图.

20. $\kappa(H_{m,n}) = \kappa'(H_{m,n}) = m$.

21. 树 T 上 v 是割顶，则 $d(v) > 1$.

22. 只有两个顶不是割顶的图是轨.

23. G 每顶皆偶次，则 G 无桥.

24. G 是 k 次正则 2 分图，$k \geqslant 2$，则 G 无桥.

25. G 是连通图，$v \geqslant 3$，则(1)若 G 有桥，则存在 $v \in V(G)$，使得 $\omega(G-v) > w(G)$.(2)(1)之逆未必正确.

26. 画 $H_{3,8}$，$H_{3,9}$.

27. G' 是 G 的真子图，G 连通，则存在 $e \in E(G)$，$e \notin E(G')$，但 e 的一端在 G' 上.

28. 三次正则图有一个割顶，当且仅当它有一桥.

29. 有桥三次正则图至少 10 个顶.

30. G 是没有有向回路的有向图，欲求一个无公共顶点的有向轨的最小条数，使这些轨道覆盖一切顶(这种轨可以从任何一顶始而止于任何顶，也可长变为零).

(a)叙述一个解此问题的算法.(b)指出无有向回路的条件是否必要.(c)给出你的算法的时间复杂度.

31. 把 30 题中“无公共顶”的要求删去，再解上题中的(a)(b)(c)三个问题.

两顶 u 与 v 叫做无逆流的，若无从 u 到 v 或无从 v 到 u 的有

向轨.一个无逆流顶集是指此集中任二顶皆为无逆流的.试证:覆盖轨道的最小条数等于最大无逆流顶集的顶数.

32.$(a)G(X,Y;E)$是二分图,写出一个有效算法求出一个最小边子集$E'\subseteq E(G)$,使得每顶至少为E'中一条边之端点.(b)指出此算法的时间复杂度.(c)证明这个覆盖顶的E'满足$|E'|=\beta(G)$,其中$\beta(G)$是G的独立数.

33.$(a)G(X,Y;E)$是完全二分图,则

$$\kappa(G)=\min\{|X|,|Y|\}.$$

(b)证明:对每个自然数k,存在一个图G,使得$\kappa(G)\geqslant k$,且G中无Hamilton轨.

34.G是无圈有向图,恰有一顶s,$d^-(s)=0$,恰有一个顶t,$d^+(t)=0$,称边$e_1=ab$优于边$e_2=cd$,当且仅当G中有从b到c的有向轨.一个边子集叫做一个"片",若它之中无比另一边为优的边,且此集已极大.P是边子集,证明下述命题等价:

(1)P是一个片.

(2)P是(s,t)边分离集,P中没有比其它边为优的边.

(3)对某个$\{s\}\subset S\subset V-\{t\}$的$S$,$P=(S,\bar{S})$,使得$(\bar{S},S)=\varnothing$.

35.称竞赛图G是可分的,若$V(G)$可划分成A,B两个非空子集,使得A与B之间的边皆从A到B.令$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,且$d^+(v_1)\leqslant d^+(v_2)\leqslant\cdots\leqslant d^+(v_n)$,则$G$可分的充要条件是:存在$k<n$,使得$\sum_{i=1}^{k}d^+(v_i)=\binom{k}{2}$.

36.证明或反驳:G为有向图,且$\kappa(G)\geqslant 2$,则对每三个顶x,y,z,存在一个从x经y到z的有向轨.

37.$k\in\mathbf{N}$,$l(k)$是从图G上删去k个顶所得子图的边连通度之最小值,讨论函数$l(k)$的定义域、单调性和极值,若$\kappa(G)=4$,$\kappa'(G)=5,l(1)=2,l(2)=3$是否成立?

第二篇　组合基础

2.1　什么是组合论

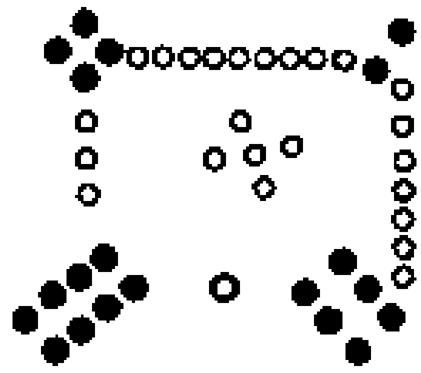
组合论也称组合学或组合数学,它是离散数学的骨干内容之一,是研究按一定规则(条件)安排离散事物的事理科学,讨论这种安排的可行性、可能的个数和如何执行等等的数学技术.它的历史可以追溯到四千多年以前,而今由于计算机科学之崛起,已经从根本上改变了人类生产活动和智力活动的面貌,组合数学作为计算机科学的基础之一,也已经从零散的一些游戏内容和不人数学主流的杂题发展成现代数学的重要分支.图论实际上是组合数学的分支,图论中的诸多问题,例如 Ramsey 数,匹配等都可以用组合论的方法去研究,对这些内容,本书不打算用组合的办法再讨论一遍;反过来,一些组合论中的问题也可以化成图论问题去讨论,例如 Bernonlli－Euler 错放信笺问题等.

下面用若干具体的组合问题显示一下组合论的风貌.本书对这些问题将给出细解.

1.洛书与河图

公元前 2200 年,《易经》载有如下图符,见图 2.1 与图 2.2.相传大禹治伏水患,洛河中一神龟浮出水面,将图 2.1 所示的“洛书”奖给大禹;黄河中则跃起一匹白龙马,将图 2.2 所示的所谓“河图”

献给大禹.



$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

图 2.1

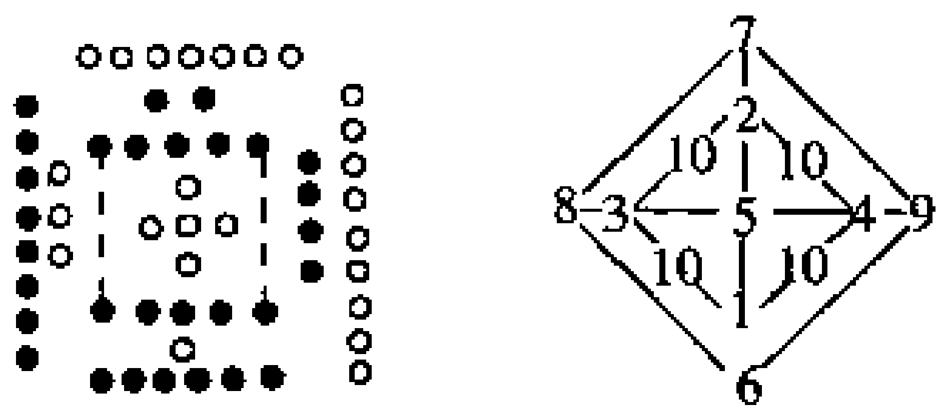


图 2.2

洛书化成方阵,恰为由 1 到 9 九个数字组成的幻方:每行每列及每对角线上数字之和皆 15. 而在河图中,外围的四个等腰梯形皆有上底与下底相等的性质,例如右上的梯形满足 $2+10+4=7+9=16$. 另外,从中心的 5 算起,向上:$5+2=7$;向下:$5+1=6$;向左:$5+3=8$;向右:$5+4=9$.

2. Catalan **数**

饭后,姐姐洗碗,妹妹把姐姐洗过的碗一个一个放进碗厨摞成一摞. 共有 n 个两两相异的碗,洗前也摞成一摞,也许因为小妹贪玩,碗拿进厨子不及时,姐姐则把洗过的碗摞在旁边,问小妹摞起的碗摞可能有几种方式?

另一个不同的问题是:一个汽车队在狭窄的路面上行驶,不得超车,但可以进入一个死胡同去加油,之后再插队行驶,共有 n 辆汽车,问可能有几种不同的车队开出城去?

这两个问题的答案一致,皆为 $C(n)=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$, $C(n)$即数学中著名的 Catalan 数.

3. 河内塔

有 n 个大小两两不同的圆盘和三根木柱 a,b,c，开始时这 n 个圆盘从下向上是由大到小套在 a 柱上（每盘中心处有一孔），要求把这 n 个圆盘移到 c 柱上，规则是：(ⅰ)每次搬动一盘，(ⅱ)圆盘只能套在三根柱子上，(ⅲ)不许大盘压小盘. 问移动次数是多少？

如果是 64 只盘子，则移动 18446744073709551615 次，每秒移动一只，每日工作 10 小时，需要 140 亿个世纪才能完工！组合学中的答数往往是天文的！

4. Euler36 军官问题

有 6 个兵团，从每兵团派出 6 种军衔的军官各一名，能否把这 36 位军官排成 6×6 方阵，使得每行每列都有每个兵团的一名军官，且每行、每列都有每种军衔的军官？如果把 6 换成其它自然数呢？

5. 女生问题(Kirkman，1847)

班里有 15 名女同学，每天出外散步时平分成 5 组分头进行，问能否在一星期内安排 7 次散步，使得任意两名女生在一周内恰有一次分在同一组？

6. Fibonacci 兔子序列

1 月 1 日购得一对兔子，雌雄各一，且每月繁殖雌雄各一的一对小兔；从出生满两个月开始，每对同龄年轻的兔子也每月产下一对异性小兔，问第 n 个月开始时，兔子共几对？

7. Stirling 数

n 名硕士生毕业后将分配到 m 个无区别的单位任职，要求每个单位都要得到至少一名毕业生，问有多少种分配方案？

这个方案个数用 $S_2(n,m)$ 表示，$S_2(n,m)$ 即著名的(第二类)Stirling 的数. $S_2(n,m)=?$

8. 母函数问题

红球 k_1 个，白球 k_2 个，黄球 k_3 个，从中抽取 k 个球，有多少

种取法?

9. 鸽笼原理的应用

例如,任给定 n^2+1 个相异实数的序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1},$$

试证:序列中至少有 $n+1$ 个实数的单调子列.

10. 构作 $2k+1(k\geqslant 1)$ 阶幻方;$2k$ 阶呢?

组合论中如上述十问题那样精彩的问题非常之多,它们都各有自己所属的组合数学理论背景,若不系统学习相应的组合理论,这种貌似初等的具体问题将会非常之棘手.

2.2 鸽笼原理

如果有 $n+1$ 只鸽子飞回 n 只鸽巢(笼),则至少有一只鸽巢中飞人两只鸽子.此即朴素的所谓鸽笼原理.

例如,用鸽笼原理可知 13 人之中至少两人是同一个月份出生的.从 100 双鞋中取出 101 只鞋,则至少取出了一双鞋.

例 1 在正六边形内投下七颗豆子,至少有两颗豆粒之间的距离小于或等于正六边形之边长.

证 作正六边形的三条过中心的对角线,把正六边形划分成六个正三角形.由鸽笼原理,必有一个三角形上有两个豆子,这两粒豆子的距离不大于此三角形的边长,证毕.

例 2 从$\{1,2,3,\cdots,2r\}(2r\geqslant 1)$任意提取 $r+1$ 个数,则取出的数中存在两个数 a,b,使得 $a\mid b$.

证 由于自然数可表成 $2^m\cdot p$,其中 m 是非负整数,p 是奇数,所以对于取出的 $r+1$ 个数而言,它们在 $2^m\cdot p$ 型表达式中的 $p\in\{1,3,5,\cdots,2r-1\}$,而$|\{1,3,5,\cdots,2r-1\}|=r$,由鸽笼原理,取出的这 $r+1$ 数中,至少有两个 $a=2^{m_1}p_1$, $b=2^{m_2}p_1$,不妨设 $m_2>m_1$,于是 $a\mid b$,证毕.

定理 1 把 $m_1+m_2+\cdots+m_n-n+1$ 只球任意放人 n 只盒

子，则第一个盒子中至少有 m_1 个球，第二个盒子中至少有 m_2 只球，…，第 n 只盒子中至少 m_n 只球，这 n 个事件至少发生一件；其中 $n, m_1, m_2, \cdots, m_n$ 皆自然数.

证 如果上述 n 个事件皆未发生，则球的总数不超过

$$(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \cdots + (m_n - 1) = m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n,$$

与共有 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n + 1$ 个球不符，证毕.

推论 1 把 $n(r-1)+1$ 个球放入 n 个盒子，至少有一个盒子中的球不少于 r 个，其中 $n, r \in \mathbf{N}$.

证 在定理 1 中令 $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = r$，则 $n(r-1)+1 = m_1 + m_2 \cdots + m_n - n + 1$，由定理 1，推论 1 成立，证毕.

推论 2 若 $\{m_1, m_2, \cdots, m_n, r\} \subset \mathbf{N}$，且 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i > r - 1$，则存在 $m_j(1 \leqslant j \leqslant n)$，使得 $m_j \geqslant r$.

证 由于 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i > r - 1$，则 $\sum_{i=1}^{n} m_i > n(r-1)$，即

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n \geqslant n(r-1)+1,$$

若把 $n(r-1)+1$ 个球任放入 n 个盒子，由推论 1，至少一个盒子中的球不少于 r 个；现在若把第一个盒子放入 m_1 个球，第二个盒子放入 m_2 个球，…，就是把不少于 $n(r-1)+1$ 个球放入了 n 个盒子，所以更会有一个盒子中的球不少于 r 个，即 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 中至少一个不小于 r，证毕.

推论 3 m 个球放入 n 个盒子，至少一盒中有不少 $[\frac{m-1}{n}]+1$ 个球.

证 由于 $\frac{m}{n} > \left[\frac{m-1}{n}\right]$，$\frac{m}{n} > \left([\frac{m-1}{n}]+1\right) - 1$，令 $r = [\frac{m-1}{n}]+1$，由推论 2 知推论 3 成立，证毕.

例 3 （Dirichlet 逼近定理） $\forall x \in \mathbf{R}$，$\forall n \in \mathbf{N}$，则存在 $m \in$

$\mathbf{N}$ 及整数 l,使得 $m<n$,且满足

$$|mx-l|<\frac{1}{n}.$$

证 因 $[0,1)=\left[0,\frac{1}{n}\right)\cup\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\cup\cdots\cup\left[\frac{n-1}{n},1\right)$,即把 $[0,1)$ 划分成 n 个长皆 $\frac{1}{n}$ 的小区间 $[\cdot,\cdot)$. 考虑序列

$$0,x-[x],2x-[2x],\cdots,nx-[nx],$$

此序列中每个数皆在 $[0,1)$ 内,但此序列中有 $n+1$ 项,由鸽笼原理,必有两项同在一个小区间 $[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})$ 中,$k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$. 设此两项为 $m_1x-[m_1x]$, $m_2x-[m_2x]$, $m_1<m_2$, $m_1,m_2\in\{0,1,\cdots,n\}$. 于是

$$|m_1x-[m_1x]-m_2x+[m_2x]|<\frac{1}{n},$$

即

$$|(m_2-m_1)x-([m_2x]-[m_1x])|<\frac{1}{n}.$$

取 $m=m_2-m_1$, $l=[m_2x]-[m_1x]$,即得结论,证毕.

此例指出,对每个实数,若干倍之后可以变成与整数相差任意小的程度.

例 4 甲乙两个年级都有 50 名男生 50 名女生,在一次联谊舞会上,甲乙两年级的同学分别随意地站成一个圈,甲在外圈,乙在里圈. 甲年级的同学沿其圈顺时针旋转,乙年级同学不动,证明会有一个时刻,甲乙两年级内圈与外圈面对面站着的至少有 50 对可以成为舞伴.

证 因为每旋转一周,外圈的每位同学都与内圈的 50 位异性同学相对一次,产生的异性相对的总次数为 $50\times100=5000$,故每个位置上平均产生异性相对为 $\frac{5000}{100}=50$ 次,由推论 2 知,存在一个时刻,内圈与外圈至少有 50 对异性同学面对面结成舞伴,证毕.

例 5 任给 n^2+1 个相异实数组成的序列

$$x_1, x_2, \cdots, x_{n^2+1}, (n \in \mathbf{N})$$

则必存在由其中 $n+1$ 个数组成的单调子列.

证 令 m_i 表示从 x_i 开始最长的递增子列的长度(项数),若存在 $m_i \geqslant n+1$,则例 5 成立.如果对每个 $m_i(i=1,2,\cdots,n^2+1)$,皆 $m_i < n+1$,则 $m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$是$\{1,2,\cdots,n\}$中的数,相当于把 n^2+1 个"球"(m_i)投入 n 个盒子,由推论 1,这里 $r-1=n$,必有$(1,2,\cdots,m)$中的一个位置放上了 $n+1$ 个"球",即 $m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$中有 $n+1$ 个相等者.不妨设 $m_{i_1}=m_{i_2}=\cdots=m_{i_{n+1}}=m$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1} \leqslant n^2+1$.下面证明 $x_{i_1} > \cdots > x_{i_{n+1}}$,即 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{n+1}}$是单调子列.

事实上,若 $x_{i_1} > x_{i_2} > \cdots > x_{i_{n+1}}$不成立,不妨设 $x_{i_1} < x_{i_2}$(其它情形相似证明),因为从 x_{i_2}开始递增子列之长为 $m_{i_2}=m$,再把 x_{i_1}接排在这个递增子列的前面,则得 $m_{i_1} > m_{i_2}$,与 $m_{i_1}=m_{i_2}$相违,故 $x_{i_1} < x_{i_2}$不成立,进而知 $x_{i_1} > x_{i_2} > \cdots > x_{i_{n+1}}$,证毕.

2.3 +×原理与排列组合

加法原理 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互相独立的,A_i 的发生有 p_i 种可能的方式,则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中一种事件发生的可能方式有 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i$ 种.

乘法原理 设事件 A_1 发生有 p_1 种可能方式,A_1 发生后,A_2 发生的可能有 p_2 种可能方式,A_1, A_2 发生后,A_3 的发生有 p_3 种可能方式,$\cdots$,$A_1, A_2, \cdots A_{n-1}$发生后,A_n 的发生有 p_n 种可能方式,则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 依次发生有 $\prod\limits_{j=1}^{n} p_i$ 种可能的方式.

2.3.1 无重复排列组合

$P(n,r)$表示从集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中任意提取 r 个元素($r\leqslant n$),再把这 r 个元素任意列成的横队(或纵队)的数目.

如果从左向右看,横队第一位置上的元素有 n 种可能,第二位置上的元素则为第一位置选走后,从剩下的 $n-1$ 个元素中提取,有 $n-1$ 种可能,第 r 个位置上的元素只能从前 $r-1$ 个位置上的元素依次选走后,从 $n-r+1$ 个剩下的元素中去抽取,故有 $n-r+1$ 种可能,于是,由乘法原理,

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

特别地,当 $n=r$ 时,则有

$$P(n,n)=n!,$$

$P(n,n)$称为 n 个元素的全排列.

$\binom{n}{r}$表示集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中 r 个元素的子集的个数,$\binom{n}{r}$也可记成$C(n,r)$或 C_n^r.

由 $P(n,r)$的定义知,$P(n,r)$是先后两个事件 A_1,A_2;A_1 是从$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中任取 r 个元素,由$\binom{n}{r}$的定义,A_1 发生的可能方式为$\binom{n}{r}$种,A_2 把这 r 个元素全排列,A_1 发生后,A_2 发生的可能方式有 $r!$ 种,由乘法原理,

$$P(n,r)=\binom{n}{r}\cdot r!,$$

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}.$$

例 1 (无重复圆排列) 从$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中任取 r 个元素任放在圆周的 r 个位置上,有多少种不同的方式?

解 若按逆时针(顺时针也可)方向看,从不同的起点沿圆周

可读出相同的序列时，称两种圆排列相同.

把 $P(n,r)$ 所指的排列称为线排列，记无重复圆排列的方式数为 $O(n,r)$，把 r 个元素在圆周上排列后，每个圆周上的元素可以做为“排头”读出一个 r 元素的线排列，每一个圆周排列可得 r 个线排列，由乘法原理，

$$P(n,r)=O(n,r)\cdot r,$$

于是

$$O(n,r)=\frac{1}{r}P(n,r)=\frac{n!}{r(n-r)!}.$$

特别地，$n=r$ 时，称为 n 元素圆全排列，

$$O(n,n)=(n-1)!.$$

例 2 各种面值的人民币各一枚，可以组成多少种不同的币值？

解 人民币的面值有 100 元，50 元，20 元，10 元，2 元，1 元，五角，二角，一角，五分，二分，一分 13 种面值，由加法原理，可组成

$$\sum_{i=1}^{13} C(13,i) = 2^{13}-1 = 8191$$

种币值.

2.3.2 Catalan 数

定义 1 括号()中，“(”称为左括，“)”称为右括，所谓好括号列是指

(1)空列是好括号列.

(2)若 A 与 B 是好括号列，则 AB 是好括号列.

(3)若 A 是好括号列，则 (A) 也是好括号列.

(4)除(1)(2)(3)中的括号列外，再无其它好括号列.

不是好括号列的括号列称为坏括号列.□

例如(()())是好括号列，)(())(是坏括号列.

定理 1 一个括号列是好括号列的充要条件是，它由偶数个括号组成，其中一半是左括，一半是右括，且从左向右读这个括号

列时，读出的右括个数不会超过读出的左括的个数.

证 若括号列是好列，由定义，显然它是由偶数个括号组成且左括占一半. 下面用关于括号数的数学归纳法证明从左向右读出的左括个数不少于读出的右括个数. 若括号数为 2，则命题显然成立，设 m 个左括 m 个右括组成的好括号列，命题已真，考虑 n 个左括号和 n 个右括号组成的好括号列，$n>m$.

(ⅰ)若构造此列时，最后一步是(2)，此列形如 AB，且 A 与 B 皆好列，当我们从左向右读时，只要还在读 A，由归纳法假设，读出的左括不比右括少，当我们读 A 的最后一个括号时，读出的左括与右括一样多. 再读下去，即读 B，由归纳法假设，读出的右括总数仍然不会超过读出的左括总数.

(ⅱ)若造此括号列时，最后一步是(3)，命题显然成立.

下面证明由左括号占半数的括号列，从左向右读时读出的左括个数不少于读出的右括个数，则此列是好括号列. 仍用关于括号数的归纳法来证. 括号数为 2 时，命题自然成立. 假设 $m<n$ 时，m 个左括号 m 个右括组成的括号列，命题已真，考虑 n 个左括 n 个右括组成的括号列，若从左向右读时，读了 $2m$ 个括号后，读得的左右括号个数相等，由归纳法假设，读出的非空子列 A 是好列，右面未读的子列 B 也满足命题条件，由归纳法假设，B 亦是好列，所以整个括号列 AB 是好列.

若上述非空列 A 不存在，则从左向右读时，刚读了第一个括号而未读其它括号时，由命题条件知第一个括号左括. 读到只剩一个括号时，已读出的左括不比右括少，而左括右括个数各占一半，故最后一个括号是右括，于是原括号是 (A)，且 A 仍满足命题条件，由归纳法假设，A 是好列，故 (A) 亦是好列，证毕.

定理 2 由 $2n$ 个括号组成的好括号列的个数等于 Catalan 数 $C(n)$：

$$C(n)=\frac{1}{n+1}C(2n,n).$$

证 设 $p_2p_2\cdots p_{2n}$是 n 个左括 n 个右括组成的坏括号列.由定理 1 知,$p_1p_2\cdots p_{2n}$有一个前缀,其中右括比左括多.设 $p_1p_2\cdots p_j$ 中右括比左括多,且 j 最小,这时 $p_1p_2\cdots p_j$ 中右括只比左括多 1 个,把 p_{j+1}开始的后半段括号们都"翻"过来,则得 $n-1$ 个左括 $n+1$ 个右括的坏括号列,显然这一过程是可逆的,故 n 个左括 n 个右括组成的坏括号列与 $n-1$ 个左括 $n+1$ 个右括组成的括号列一一对应.而 $n-1$ 个左括 $n+1$ 个右括组成的括号列共计 $C(2n,n+1)$个,n 个左括 n 个右括组成的括号列共计 $C(2n,n)$ 个,所以 $2n$ 个括号的好括号列共有

$$
\begin{aligned}
&C(2n,n)-C(2n,n+1)\\
&=\frac{1}{n!}\times 2n(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-n+1)-\frac{1}{(n+1)!}\\
&\quad\times 2n(2n-1)\cdots(2n-n)\\
&=\frac{1}{n+1}C(2n,n)=C(n),
\end{aligned}
$$

证毕.

例如考虑 $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\cdots\cdot x_n$,对这个乘式加括号搞结合律,则共加 $2n-2$ 个括号,其中一半是左括,而且从左向右读时,读出的左括号个数不比右括号少,由定理 1,加上的括号列是好括号列,作结合时,所有可能的加括号方式得到所有的好括号列,故所有的加括号方式共计 $C(n-1)$种.

另一方面,设最后一次乘法是 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 的某种结合方式乘得的积与 $x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_n$ 的某种结合方式乘得的积,这两个积的乘法,若前一个积产生时的结合方式数记成 a_k,则后面 $n-k$ 个因数产生第二个积时的结合方式数为 a_{n-k},$k=1,2,\cdots,n-1$,于是由加乘原理,所有加括方式数为 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}$,令 $a_1=1$.

容易证明初值问题

$$\begin{cases} a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}, \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

的解是唯一的.又由上述论证知 $a_n = C(n-1)$是此初值问题的唯一解.

例 3 圆周上有 $2(n-1)$个点,用 $n-1$ 条彼此无公共点的弦连接这些点,共有几种方式?

解 设共有 b_n 种方式.记圆周上的 $2n-2$ 个点依逆时针序为 $v_1, v_2, \cdots, v_{2n-2}$,不妨设 v_1 与 v_{2k}间连一条弦,$1 \leqslant k \leqslant n-1$,则此弦两侧分别有 $2(k-1)$和 $2(n-k-1)$个点.因为要求弦彼此无公共点,所以上述 $2(k-1)$个点与 $2(n-k-1)$个点,双方之间不会连接弦,于是这 $2(k-1)$个点之间的弦的连接方式有 b_k 种,其余 $2(n-k-1)$个点之间的弦的连接方式有 b_{n-k}种,由于 k 可取 $1,2,\cdots,n-1$,由加乘原理,得

$$b_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k},$$

再令 $b_1 = 1$,则知 $b_n = C(n-1)$.

例 4 把凸 $n+1$ 边形用其互不相交的对角线进行三角剖分,问剖分的方式有几种?

解 设此 $n+1$ 边形为 $v_1 v_2 v_3 \cdots v_{n+1} v_1$,则在任何一种三角形剖分中,$v_1 v_{n+1}$皆一个三角形的边,此三角形的另一顶为 v_{k+1},$1 \leqslant k \leqslant n-1$,$\triangle v_1 v_{k+1} v_{n+1}$把原多边形分隔成一个 $k+1$ 边凸多边形和一个$(n-k+1)$边凸多边形,令 $n+1$ 边凸多边形的三角剖分有 a_n 种,则上述两个小凸多边形分别有 a_k 和a_{n-k}种三角剖分方式.由 + × 原理得

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k},$$

令 $a_1 = 1$,则 $a_n = C(n-1)$.

例 4 可用好括号列技术来解.把凸 $n+1$ 边形的边依逆时针

为序排列为 $e_1,e_2,\cdots,e_n,e_{n+1}$. 对于 $e_1\cdot e_2\cdot e_3\cdots\cdot e_n=e_{n+1}$进行加括号结合,按前面所证,加括号的方式恰为 $C(n-1)$种. 把对角线视为所在三角形上另两边之积,见图 2.3,按脚标递增的顺序抄写并加括号. 于是对 $n+1$ 边凸多边形的三角形剖分的方式与 $e_1e_2e_3\cdots e_n$ 加括号方式一一对应,故三角剖分方式有 $C(n-1)$种.

在 2.1 节中提出的汽车队加油问题中,有汽车进入胡同时,立刻画一个左括"(",有汽车出胡同时,立刻接着画一个右括")",不进入胡同的汽车认为它是刚一进入胡同立刻退出胡同,于是由定理 1,画得一个好括号列,好括号列与车队一一对应,汽车队的种类有 $C(n)$个.

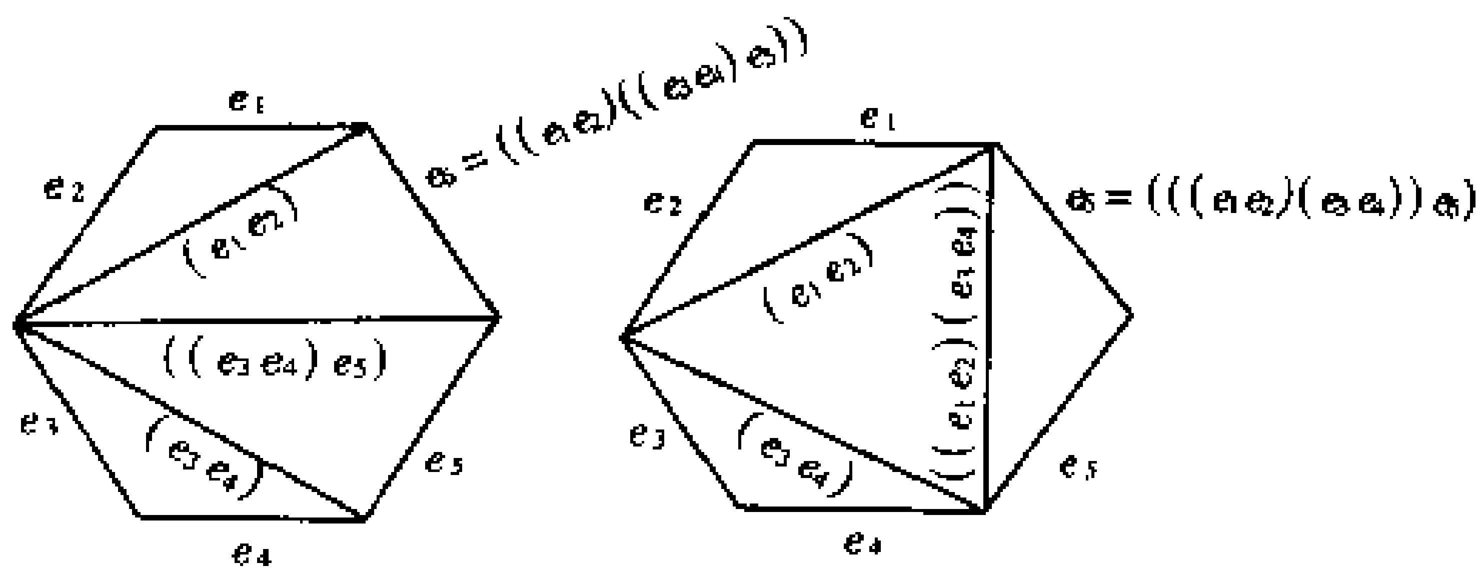


图 2.3

姊妹洗碗那个问题中,姐洗好一碗即画左括"(",妹拿进厨子一碗,则画右括")",由定理 1,洗好后的碗摞可能共有 $C(n)$种.

还有一个计算机存储问题:n 个字符,都要进入"先入后出"存储器 S 恰一次,它们进入 S 时是有序的,问出 S 的不同字符列可能几种?

有字进 S 时,立刻画"(",有字出 S 时,立即画")",则得好括号列,于是知出 S 的不同字符列可能有 $C(n)$种.

2.3.3 可重复的排列组合

上一节讨论的无重复排列与组合中,参加排列或组合的元素必须两两相异,现取消这一限制. 例如一个排列可以是 *aaaaabbbbbaaaabbbb* 等等,一个组合可以是 $\{a,a,b,b\}$.

定义 2 记 $S=\{a_1^{(1)},a_2^{(1)},\cdots a_n^{(1)}\cdots;a_1^{(2)},a_2^{(2)},\cdots a_m^{(2)};\cdots;\cdots;a_1^{(k)},a_2^{(k)},\cdots,a_l^{(k)}\cdots\}$,其 $a_j^{(i)}=a^{(i)}$,$i=1,2,\cdots,k$,$j=1,2,\cdots$,则称 S 是 k 种元素的重集;每种元素的个数称为该元素的重数.若 $a^{(i)}$ 的重数为 p_i,则 S 可简写成 $S=\{p_1a^{(1)},p_2a^{(2)},\cdots,p_ka^{(k)}\}$,$p_i$ 可以是∞.□

定理 3 设 $S=\{\infty a^{(1)},\infty a^{(2)},\cdots,\infty a^{(k)}\}$,则从 S 中提取出 r 个的排列个数是 k^r,其中 $r\in\mathbf{N}$.

证 欲得之排列,第一位上的元素有 k 种取法,第一位取定后,第二位上的元素亦有 k 种取法,依此类推,由乘法原理,此种排列有 k^r 种,证毕.

例 5 一种体育彩票,规定购买者填写一个 7 位数字,摇奖摇出的那个 7 位数字与某人的彩票上预先登记的 7 位数字一致时则此人得大奖,问得大奖的可能性有多大?

解 由定理 3,所有的由 7 个数码组成的 7 位数字共有 10^7 个,所以获大奖的可能是 10^{-7},即千万分之一(这种可能太小了!).

定理 4 重集 $S=\{p_1a^{(1)},p_2a^{(2)},\cdots,p_ka^{(k)}\}$ 的排列个数是

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k}p_i\right)!}{\sum\limits_{i=1}^{k}(p_i!)}.$$

证 S 中共 $\sum\limits_{i=1}^{k}p_i$ 个元素,若把这些元素皆看成相异者,则共有排列 $\left(\sum\limits_{i=1}^{k}p_i\right)!$ 个.实际上每种元素有 p_i 个相同者,这 p_i 个元素视为两两相异,使得排列数扩大了 $p_i!$ 倍,由乘法原理,共使排列扩大了 $\prod\limits_{i=1}^{k}(p_i!)$ 倍,故 S 的(全)排列共有 $\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k}p_i\right)!}{\prod\limits_{i=1}^{k}(p_i!)}$ 个,证毕.

例 6 已知 $l,m,n\in\mathbf{N}$ 及一个 $l\times m\times n$ 的长方体房子，一只蚊子从地板的西南角飞向天花板的东北角，它只能南北方向、东西方向和上下方向飞行，飞行整数长度后才拐弯，问蚊子飞行的最短路线有多少条？

解 为了路线最短，它不能向南、向下和向西飞，所以它飞行过向北的、向上的和向东的路程共计 $l+m+n$，又向南的各段（每段长 1）是无区别的，向上的各段（每段长 1）是无区别的，向东的各段（每段长 1）是无区别的，由定理 4，蚊子的最短路线共有

$$\frac{(m+l+n)!}{m!\ l!\ n!}\text{种}.$$

以魔方式 $3\times3\times3$ 的空间为例，蚊子的最短路线有 $\frac{9!}{(3!)^3}=\frac{362880}{216}=1680$ 种.

定理 5 设 $S=\{\infty\cdot a^{(1)},\infty a^{(2)},\cdots,\infty a^{(k)}\}$，则从 S 中选 r 个元素的组合数为 $C(k-1+r,r)$.

证 S 的每个 r 个元素的组合形如 $\{x_1a^{(1)},x_2a^{(2)},\cdots,x_ka^{(k)}\}$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是非负整数，且 $\sum\limits_{i=1}^{k}x_i=r$. 反之，任何一个满足不定方程 $\sum\limits_{i=1}^{k}x_i=r$ 的非负整数列 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 对应一个 S 的 r 组合，于是 S 的 r 元组合个数等于 $\sum\limits_{i=1}^{k}x_i=r$ 的非负整数解的个数. 为此考虑 $S'=\{(k-1)\cdot0,r\cdot1\}$ 的(全)排列，任给 S' 的一个排列，相当于有非负整数 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，$\sum\limits_{i=1}^{k}x_i=r$，使得 x_1 个 1 在第一个 0 的左侧，x_2 个 1 在第一个 0 与第二个 0 之间，$\cdots$，x_k 个 1 在最后一个 0 的右侧，即任给一 S' 的排列，可以找到一个 $\sum\limits_{i=1}^{k}x_i=r$ 的非负整数解；反之，若非负整数 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是方程

$\sum_{i=1}^{k} x_i = r$ 的解，可按上述情形构作一个 S' 的排列，于是 S' 的排列与 $\sum_{i=1}^{k} x_i = r$ 的非负整数解之间一一对应，故知 S 的 r 元组合个数等于 S' 的排列个数，由定理 4 得 S 的 r 元组合个数为 $\frac{(k-1+r)!}{(k-1)!r!} = C(k-1+r, r)$，证毕.

例如系数为 1 的变元为 x, y, z 的 100 次单项式的个数是 $C(3+100-1, 100) = C(102, 100) = 5151$.

定理 6 若 $S = \{\infty a^{(1)}, \infty a^{(2)}, \cdots, \infty a^{(k)}\}$，且要求 S 的每个不同元素在 r 组合中至少出现 1 次，$r \geqslant k$，则 S 的这种组合数等于 $C(r-1, k-1)$.

证 S 的 r 组合形如 $\{x_1 a^{(1)}, x_2 a^{(2)}, \cdots x_k a^{(k)}\}$，且 $\sum_{i=1}^{k} x_i = r, x_i \geqslant 1$. 这种组合的个数等于方程 $\sum_{i=1}^{k} x_i = r$ 的正整数解的个数. 此方程等价于 $\sum_{i=1}^{k} (x_i - 1) = r - k$，令 $y_i = x_i - 1$，则只欠证明 $\sum_{i=1}^{k} y_i = r - k$ 的非负整数解的个数是 $C(r-1, k-1)$，由定理 5 证明知，$\sum_{i=1}^{k} y_i = r - k$ 的非负整数解的个数为

$$C(k-1+r-k, r-k) = C(r-1, r-k) = C(r-1, k-1),$$

证毕.

例 7 一电视机厂生产 10 种彩电，欲运往市场，每个集装箱可装 30 台彩电，要求每个集装箱中各种彩电至少一台，问有多少种装箱方式？

解 设该厂需外运的彩电足够多，此题即求从 $S = \{\infty a^{(1)}, \infty a^{(2)}, \cdots, \infty a^{(10)}\}$ 中提取 $r = 30$ 台电视进行组合的个数，但要求每一组合中 $a^{(1)}, a^{(2)} \cdots, a^{(10)}$ 都出现，由定理 6，此组合

的个数为

$$C(30-1,10-1)=C(29,9)=10015005.$$

即装箱方式有 10015005 种.

习题一

1. 从$\{1,2,3,\cdots,99,100\}$中任选 51 个数,这 51 个数中有两个数 a,b,使得 $a|b$.

2. 有二路横队,每队 30 人,甲队由 15 名男生和 15 名女生组成,乙队男女生不限。两队之间同学面对面站立,甲队不动,乙队向右平移,每移动一个位置,其队尾就跑到最左端做排头,证明:乙队平移到某一时刻会出现面对面的同学中有 15 对性别一致.

3. 单位正方形内任取的 5 点中存在两点相距小于$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 边长为 1 的等边三角形内任取的 5 点存在两点相距小于$\frac{1}{2}$.

5. 任取黑白棋子 21 枚,任意排成 3×7 的长方阵,总能找到长方子阵,其四角上的棋子同色.

6. 任取 11 个自然数,之中必有两数其差是 10 的倍数.

7. $\forall a_1,a_2,a_3\in\mathbf{N}$, $b_1b_2b_3$ 是 a_1,a_2,a_3 的任一排列,则 a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3 中至少有一个是偶数.

8. $m\in\mathbf{N}$,任取 $m+1$ 个自然数,其中至少有两个整数,其差是 m 的倍数.

9. 序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中,每项皆自然数,则必存在一段连续子列,其各项之和为 n 的倍数.

10. 9 名科学家从事一项秘密工作,把文件锁在柜子里,当且仅当 5 个科学家同时在场时,才可打开柜子,问最少需要多少把锁?每位科学家至少需要多少把钥匙?

11. 6 男 6 女在圆桌旁交错人席,有一对男女拒绝邻座,有多

少种入席方式?

12.教室里有两排位置,每排 8 位,今有 14 名学生,其中 5 人总坐前排,4 人总坐后排,求入坐的方式数.

13.从 10 男 12 女中选 4 人,至少要选两名女士,几种选法? 22 人中有一男一女拒绝同时入选,有多少种选法?

14.在小于 10000 的正整数中含有数字 7 者有几个?

15.从不大于 500 的自然数中取 5 个数,其和恰为 5 的倍数,有几种取法?

16.空间 25 个点,任三点不共线,问可以确定多少个三角形和多少个四面体?

17.10000! 的末尾有几个零?

18.能整除 1400 的自然数有多少?

19.一停车场有卡车 20 辆,大客车 10 辆,小轿车 15 辆,把这些汽车排成一行,有多少种排法?

20.k 个不同的字母组成长 n 的字中,相邻字母不同的字有多少?

21.有足够的 k 种纪念品送给 n 位老师,每位老师收到两种不同的纪念品的选法有多少种?

22.$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非负整数,r 是正整数,求方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i = r$ 的满足 $x_i \geqslant a_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 的非负整数解的个数.

23.求不等式 $\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant r$ 的非负整数解的个数.

24.袋中有红、黄、蓝、白四色球各 100 只,从袋中任取 10 只球,有多少种取法?

25.有纸片 n^2 张(n 是任意自然数),在每张上用红蓝铅笔各任意写一个不大于 n 的自然数,但要使红字相同的任意两张上所写的蓝字不相同,现把每张上的两个数相乘,证明得到的 n^2 个积之和是一个常数,且求此常数.

2.4 容斥原理

几个集合，通过其交集的元素个数可以算出其并集的元素个数或这几个集合补集之交的元素个数.下面建立筛式计算公式.

二集容斥原理 设 A_1,A_2 是两个有限集合，则有公式

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|. \tag{1}$$

公式(1)的证明不足道，一画文氏图即得知。"容""斥"二字从何谈起？事实上欲求 $A_1\cup A_2$ 中元素的个数，如果 A_1 与 A_2 不交，只要数一下 A_1 元素的个数，再数 A_2 的个数，把两数相加即得，即对 A_1 与 A_2 的元素个数是接纳的，相容的，但若 $A_1\cap A_2\neq\varnothing$，则上述相容性累加就把 $A_1\cap A_2$ 中的元素数了两遍，应把其中的重数部分排斥掉，即还要减去 $|A_1\cap A_2|$.

三集容斥原理 设 A_1,A_2,A_3 是三个有限集合，则有公式

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup A_3|=&(|A_1|+|A_2|+|A_3|)-(|A_1\cap A_2|\\&+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)+|A_1\cap A_2\cap A_3|\end{aligned} \tag{2}$$

证 $|A_1\cup A_2\cup A_3|=|(A_1\cup A_2)\cup A_3|$，由公式(1)

$$\begin{aligned}|(A_1\cup A_2)\cup A_3|&=(|A_1\cup A_2|+|A_3|)-|(A_1\cup A_2)\cap A_3|\\&=(|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|+|A_3|)-|(A_1\cap A_3)\cup(A_2\cap A_3)|\\&=(|A_1|+|A_2|+|A_3|)-(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|\\&\quad+|A_2\cap A_3|)+|A_1\cap A_3\cap A_2\cap A_3|\\&=(|A_1|+|A_2|+|A_3|)-(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|\\&\quad+|A_2\cap A_3|)+|A_1\cap A_2\cap A_3|.\end{aligned}$$

证毕.

公式(2)右端的 $|A_1|+|A_2|+|A_3|$ 对于计算 $A_1\cup A_2\cup A_3$ 的元素个数可能接纳(容纳)得多了一些(在 A_1,A_2,A_3 之间有交时是这样)，所以要修正，减去($|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|$)，这样可能又减多了，还要最后修正一下，加上 $|A_1\cap A_2\cap A_3|$

恰为是$|A_1\cup A_2\cup A_3|$.如此象筛筛子似的左右摆动了三遍终于得出精确值,所以称之为筛式公式.

我们猜到$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$的计算则需筛 n 次,即交错地 $+-$共 n 项,加上些就变多,减去些就变少,如此多多少少逐次逼近,到$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$止,即得精确值.

n 集容斥原理 1　$A_1,A_2,\cdots A_n$ 是 n 个有限集,则有公式

$$
\begin{aligned}
&|A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n|\\
&=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|\\
&\quad+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

证　$n=2$ 时,由公式(1),命题(公式(3))成立.

假设对 $n-1$ 个集合的情形,(3)式已真,即

$$
\begin{aligned}
&|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}|\\
&=\sum_{i=1}^{n-1}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n-1}|A_i\cap A_j\cap A_k|\\
&\quad+\cdots+(-1)^{n-2}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}|, \qquad (4)
\end{aligned}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
&|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|\\
&=|(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1})\cup A_n|=|A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_{n-1}|\\
&\quad+|A_n|-|(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1})\cap A_n|, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

由归纳法假设,把(4)式代入(5)得

$$
\begin{aligned}
&|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|\\
&=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n-1}|A_i\cap A_j|\\
&\quad+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n-1}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n-2}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}|\\
&\quad-\Big[\sum_{i=1}^{n-1}|A_i\cap A_n|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}|A_i\cap A_j\cap A_n|+\cdots
\end{aligned}
$$

$$+(-1)^{n-2}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}\cap A_n|]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|,$$

证毕.

n 集容斥原理 2　$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个有限集，A_i 是 A 的子集，$i=1,2,\cdots,n$，记 $\overline{A}_i=A-A_i$，则

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n|$$

$$=|A|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=|A|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|$$

$$-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap k|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|. \tag{6}$$

公式(6)是公式(3)的推论.

公式(6)是在求不具有 n 种性质中的任何一种性质的元素的个数.事实上，若具有第 i 种性质的元素组成的集合是 A_i，$A_i\subseteq A$，则 $\overline{A}_i$ 是不具备性质 i 的元素组成的集合，于是 $\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right|$ 表示不具备 n 种性质中任何一种性质的元素的个数.公式(3)则表示具有 n 种性质中的某一种性质的元素的个数.

例 1　求1,2,3,4,$\cdots$,m中与 n 互素的整数的个数.

解　设 $A=\{1,2,\cdots,m\}$，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 m 的全体素因数，记 $A_i=\{a\mid a\in A$，且 $p_i\mid a\}$，$i=1,2,\cdots,n$.则所求的“个数”即为 $\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right|$，$\overline{A}_i=A-A_i$.由公式(6)，$\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right|=|A|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^n\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|$，

其中

$$|A|=m,|A_i|=\frac{m}{p_i},|A_i\cap A_j|=\frac{m}{p_ip_j},1\leqslant i<j\leqslant n,\cdots,|A_1$$

$\cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = \frac{m}{p_1 p_2 \cdots p_n}$,代入(6)得

$$
\begin{aligned}
|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i| &= m - \sum_{i=1}^{n}\frac{m}{p_i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{m}{p_i p_j} - \cdots + (-1)^n \frac{m}{p_1 p_2 \cdots p_n} \\
&= m\left(1 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{p_i p_j} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n}\right) \\
&= m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right),
\end{aligned}
$$

即$1,2,\cdots,m$中与n互素的整数个数是$m\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$.

定义 1 已知$a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}$是$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的一个全排列,$a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_n}$也是$S$的一个全排列,但$i_k \neq j_k$,$k=1,2,\cdots n$,则称$a_{j_1},a_{j_2},\cdots a_{j_n}$是$a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n}$的错位排列.□

图论中讲过 Bernoulli - Euler 错放信笺就是错位排列,现用容斥原理来求错位排列的个数.

定理 1 排列$a_1,a_2,\cdots,a_n$的错位排列的个数D_n有公式

$$D_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right). \qquad (7)$$

证 设A_i是使排列$a_1a_2\cdots a_j\cdots a_n$中第$j$位上总是$a_i$的各种全排列所成的集合,$i=1,2,\cdots,n$.则$a_1a_2a_3a_4\cdots a_n$的错位排列的个数为$|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i|$.且$|A_i|=(n-1)!$,$|A_i\cap A_j|=(n-2)!$,$i,j$相异,$i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$,$|A_i\cap A_j\cap A_k|=(n-3)!$,$i,j,k$相异,……,于是由容斥原理(公式(6))得

$$
\begin{aligned}
D_n = |\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i| &= n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! \\
&\quad + \cdots + (-1)^n C(n,n).0! \\
&= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n!} \\
&= n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right),
\end{aligned}
$$

证毕.

例 2 甲,乙,丙每个给自己的 6 位朋友写了六封信,求甲,乙,丙都把信笺插错有多少种可能?

解 每个人错放信笺的可能性有 D_6 种,由乘法原理,所求的答案是 $D_6^3=\left[6!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6!}\right)\right]^3$

$=265^3=18609625$.

在全排列中,禁止某 n 个元素排在某些位置上,或禁止出现某些连贯的子排列,则称其为禁位排列或禁串排列.

例如在 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 的全排列中,禁止 a_1 排在第一位,禁止 a_2 排在第二位,就是禁位排列的一例;在 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 的全排列中,禁止出现形如 a_2a_4 的段,则是禁串排列一例.

定理 2 设 $\{a_1,a_2\cdots,a_n\}$ 的全排列中,每个 a_i 有一些禁位,这些禁位组成 a_i 的禁区,设 r_i 表示恰有 i 个元素落入禁区的全排列之个数,$i=1,2,\cdots,n$,则每个元素皆不在自己的禁区的全排列个数为

$$Q_n=n!\ -(n-1)!\ r_1+(n-2)!\ r_2+\cdots+(-1)^{n-1}1!\ r_{n-1}+(-1)^n\cdot 0!\ r_n. \tag{8}$$

证 记 A_i 是有 i 个元素落入各自禁区的全排列之集合,$i=1,2,\cdots,n$.

若有一个元素落入其禁区,则剩下的 $n-1$ 个元素有 $(n-1)!$ 种排法,故至少一个元素落入禁区的排列数为 $(n-1)!\ r_1$.有两个元素落入各自禁区时,其余 $n-2$ 个元素有 $(n-2)!$ 种排法,故至少两个元素落入各自禁区的排列数为 $(n-2)!\ r_2$,依此类推,于是由容斥原理得

$$Q_n=|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n|=n!-\sum_{i=1}^{n}|A_i|$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

$$=n!-(n-1)!r_1+(n-2)!r_2+\cdots+(-1)^{n-1}r_n\cdot 1!$$

$$+(-1)^n r_n\cdot 0!,$$

证毕.

公式(8)中的 r_i 怎样确定？现在就来解决这个问题.

定义 2 设有限集 $S=\{a_1,a_2\cdots,a_n\}$,进行禁位全排列,在 $n\times n$ 的棋盘上,a_i 的禁位是第 j 位时,则把第 i,j 号方格染成红色,所有红色方格组成的集合称为总禁位区.两两既不同行也不同列的一些格称为独立格;设 I 为总禁位区,$r_k(I)$是把 S 中恰 k 个元素放入总禁位区,每格至多一个元素,且使它们占用独立格时的摆放方式的数目,则称

$$R(I)=\sum_{k=0}^{n}r_k(I)x^k$$

为禁区多项式.□

显然,禁区多项式中 x^i 的系数就是公式(8)中的 r_i,$i=1,2,\cdots,n$.

若把总独立区中某格删除,得到的剩余总独立区记成 I_1,把该格的同行与同列全删去得到的剩余独立区记成 I_2,则显然有公式

$$r_k(I)=r_k(I_1)+r_{k-1}(I_2), \tag{9}$$

事实上,$r_k(I_1)$表示删去的方格上不摆放元素时,k 个元素在总禁位区占用独立格的方式数,而 $C_{k-1}(I_2)$表示删去的格子上摆放一元素时,k 个元素在总禁位区占用独立格的方式数,由加法原理得公式(9).

公式(9)告知,可以把 $r_k(I)$的求取化成小一些的 I_1 与 I_2 进行,这样当然有化整为零带来的益处,因为逐次使用(9),可以把 $r_k(I)$的求取变成空集与一格组成的区域上的问题,而且有公式

$$R(I)=R(I_1)+R(I_2)x. \tag{10}$$

事实上,

$$R(I)=\sum_{k=0}^{n}r_k(I)x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [r_k(I_1) + r_{k-1}(I_2)] x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} r_k(I_1) x^k + \sum_{k=0}^{n} r_{k-1}(I_2) x^k,$$

$$\sum_{k=0}^{n} r_{k-1}(I_2) x^k = x \sum_{k=0}^{n} r_{k-1}(I_2) x^{k-1},$$

令 $k' = k-1$，则

$$\sum_{n=0}^{n} r_{k-1}(I_2) x^k = x \sum_{k'=-1}^{n} r_{k'}(I_2) x^{k'},$$

而 $r_{-1}(I_2) = r_n(I_2)$，故 $\sum_{k=0}^{n} r_{k-1}(I_2) x^k = x \sum_{k'=0}^{n} r_{k'}(I_2) x^{k'} = x \sum_{k=0}^{n} r_k(I_2) x^k$，于是

$$R(I) = \sum_{k=0}^{n} r_k(I_1) x^k + x \sum_{k=0}^{n} r_k(I_2) x_k$$

$$= R(I_1) + R(I_2) x.$$

定义 3 若 I 是总禁位区，$I = \bigcup_{i=1}^{m} I_i$，$I_i \cap I_j = \varnothing$，$i \neq j$，且 I_i 中的每一格与 I_j 中的每一格独立，则称 $I_1, I_2, \cdots, I_m$ 为独立块.□

显然，若 $I_1, I_2, \cdots, I_m$ 为独立块，则有公式

$$R(I) = \prod_{i=1}^{m} R(I_i). \quad (11)$$

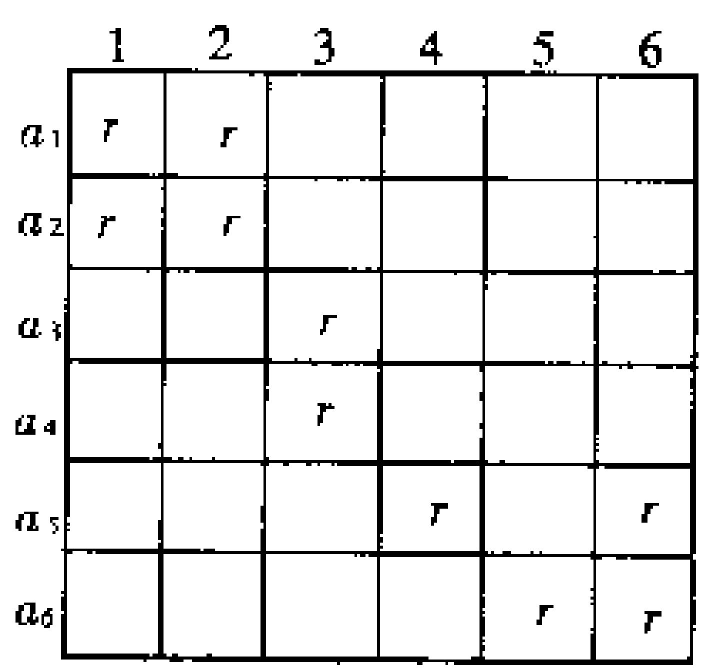


图 2.4

例 3 求图 2.4 中的 $r_i(I)$，$i = 1,2,3,4,5,6$，写了"r"的是红色总禁区 I 的格子；且求此禁位排列的总个数.

解 $I_1 = \{11,12,21,22\}$，$I_2 = \{33,43\}$，$I_3 = \{54,56,65,66\}$ 是三个独立块，其中 ij 表示第 i 行第 j 列的那个格子，由公式(11)

得

$R(I)=R(I_1)\times R(I_2)\times R(I_3)$.

$$R(I_1)=\square+x\square=(\square\square+x\square)+x\square$$
$$=\square+x+2x\square$$
$$=1+x+x+2x(1+x)=1+4x+2x^2,$$

$$R(I_2)=\square+x=1+2x,$$

$$R(I_3)=\square+x\square\square=(\square\square+x\square)+x(\square+x)$$
$$=\square+x+x\square+x\square+x^2$$
$$=1+x+x+x(1+x)+x(1+x)+x^2$$
$$=1+4x+3x^2,$$

于是

$$R(I)=(1+4x+2x^2)(1+2x)(1+4x+3x^2)$$
$$=1+10x+37x^2+62x^3+46x^4+12x^5,$$

即得

$$r_1=10,r_2=37,r_3=62,r_4=46,r_5=12,r_6=0.$$

把 r_i 代入公式(8)得禁位排列的总个数为

$$Q_6=6!-10\times5!+37\times4!-62\times3!+46\times2!-12\times1!$$
$$=116.$$

例 4 猪牛羊鸡犬猫鸭排成一路横队,但不许出现“鸡猫”与“鸡狗猫”的连排现象,共有几种排法?

解 设 A_1 是出现“鸡猫”连排的事件,A_2 是出现“鸡狗猫”连排的事件,则由容斥原理得

$$|A_1\cap\bar{A}_2|=|\{鸡,鸭,猫,犬,羊,猪,牛\}|$$
$$-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|,$$

而 $|A_1|=6!$, $|A_2|=5!$, $|A_1\cap A_2|=4!$,于是

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2|=7!-5!-6!+4!=4224.$$

即共有 4224 种排法.

习题二

1. 赵钱孙李四位教师分别去讲授数学、物理、化学和英语四门课，已知赵不能教物理，钱不会教物理和化学，孙不能教化学和英语，李不能教英语，每位教师教一门课，每门课都要有人教，问有几种安排方案？

2. 对 $S=\{5\times a^{(1)},4\times a^{(2)},3\times a^{(3)},2\times a^{(4)},1\times a^{(5)}\}$ 进行全排列，不许出现 $a^{(1)}a^{(1)}a^{(1)}a^{(1)}a^{(1)}$，$a^{(2)}a^{(2)}a^{(2)}a^{(2)}$，问有几种排列？

3. 7 名司机开来 7 辆汽车，第二天，若恰有两名司机仍开原来那辆车，其余的司机都不再开原来的车，有几种可能？

4. 求 1 到 1000 间能被 3,4,5,7 任何一个整除的整数的个数.

5. 证明：

$$Q_n=(n-1)!\left(n-\frac{n-1}{1!}+\frac{n-2}{2!}-\frac{n-3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

6. 当且仅当 n 是奇数，D_n 是偶数.

7. $Q_n=D_n+D_{n-1}$.

8. $n!=C(n,o)D_n+C(n,1)D_{n-1}+\cdots+C(n,n)D_0,(D_0=1)$.

9. 一次联谊会，7 人寄存了帽子，问下面三种情形，各有几种方式交回他们的帽子：

(1)没有任何人得到自己的帽子；

(2)至少有一个人得到了自己的帽子；

(3)至少有两个人得到了自己的帽子.

10. 求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ 的满足 $1\leqslant x_1\leqslant 6,0\leqslant x_2\leqslant 7,4\leqslant x_3\leqslant 8,2\leqslant x_4\leqslant 6$ 的整数解的个数.

11. 求满射 $f:X\to Y$ 的个数，其中 X 是 n 个元素的集合，Y 是 k 个元素的集合.

2.5 生成函数

2.5.1 生成函数概念

在 2.4 中,为了求得禁位排列的个数 Q_n,按公式

$Q_n = n! - (n-1)!\ r_1 + (n-2)!\ r_2 + \cdots + (-1)^n \cdot 0!\ r_n$,

我们需要求出 r_i, $i=1,2,\cdots,n$;如果按 r_i 的定义去确定 r_i,则不易找到求取 r_i 的规则,看事做事地去确定 r_i 不是好办法,后来我们引入禁区多项式和它的性质公式 $R(I)=R(I_1)+R(I_2)x$,则有了机械化的办法把"大事化小"有章可循地来确定出 r_i 了;r_i 是做为多项式 $r_0x^0+r_1x+r_2x^2+\cdots+r_nx^n$ 的系数的角色出现的,或者说 r_i 是从函数 $R(I)$ 这个母体生成的,我们会义地把 $r_0{}^0+r_1x+\cdots+r_nx^n$ 称为 r_i 的生成函数或母函数.在组合数学当中,通过一个幂级数的系数来确定未知序列的技术是最为有效地计数方法之一,事实上,我们前面讲出的 n 个元素的各种排列与组合数,其实就是求与 n 有关的一个量 a_n, $n\in \mathbf{N}$,所以是确定满足某种要求的序列 $a_0,a_1\cdots,a_n\cdots$,如果能有一种万全之策,设计一个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,而此级数的求得反而比直接去求 a_n 们更易于操作和具有某种规律性,岂不妙哉!

定义 1 函数

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kf_k(x)$$

叫做数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\cdots$ 的生成函数或母函数,其中 $f_k(x)$($k=0,1,2,\cdots$)称为 a_k 的标志函数,且对于取定的 $F(x)$ 和 f_k, a_k 是唯一的.□

最常见的情形是 $f_k(x)=\alpha_kx^k$,其中 α_k 是与 k 有关的已知数.一般我们并不关心级数(1)的收敛性,因为我们只是用这种手段算出 a_k, $k=0,1,2,\cdots$.

例 1 设计 $C(n,0),C(n,1),\cdots,C(n,n)$的生成函数

解 因为$(1+x)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}C(n,i)x^i$，故$(1+x)^n$是所求的生成函数(其标志函数为 $x^i,i=0,1,2,\cdots,n$).

例 2 求$(\alpha)1,1,1,\cdots,1,\cdots$的生成函数 $F_1(x)$.

$(\beta)1,2,3,\cdots,n,\cdots$的生成函数 $F_2(x)$.

$(\gamma)1,0,1,0,1,\cdots$ 的生成函数 $F_3(x)$.

$(\epsilon)1,0,0,1,0,0,1,\cdots$的生成函数 $F_4(x)$.

$(\delta)0,1,4,\cdots,n^2,\cdots$的生成函数 $F_5(x)$.

解 $(\alpha)F_1(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k=\dfrac{1}{1-x}$.

$(\beta)F_2(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(1+k)x^n=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

$(\gamma)F_3(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^{2k}=\dfrac{1}{1-x^2}$.

$(\epsilon)F_4(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^{3r}=\dfrac{1}{1-x^3}$.

(δ) 由 $xF_2(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^k$，$\dfrac{d}{dx}$之得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^3}=1+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}+\cdots,$$

于是

$$F_5(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=x+2^2x^2+\cdots+n^2x^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}k^2x^k.$$

2.5.2 组合数的生成函数

1)$C(n,k)$的生成函数

$C(n,k)$前面我们已经讲过，它的计算公式也已建立，下面用生成函数的观点再讲一遍，由定义，$C(n,k)$是从集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中提取 k 个元素组成子集，这种子集的个数.

考虑乘法

$$\underbrace{(x^0+x^1)(x^0+x^1)\cdots(x^0+x^1)}_{n个(\cdot,\cdot)}=1+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_nx^n, \quad (2)$$

左端第 i 个括号代表a_i,其中的 $x^0=1$ 代表 a_i 不参加组合,x^1 代表 a_i 参加组合,于是右端的 x^k 表示有 S 中的k 个元素参加组合,其系数 α_k 是k 个元素组合的各种方式的个数,所以有 $\alpha_k=C(n,k)$. 又(2)式为

$$F(x)=(1+x)^n=1+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_nx^n,$$

α_n 可由$F(x)$的幂级数展开得到:

$$\alpha_k=\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^kF(0)}{\mathrm{d}x^k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

最后得

$$C(n,k)=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

$F=(1+x)^n$ 即$C(n,k)$的生成函数.

2)从 $S=\{\infty\cdot a^{(1)},\infty a^{(2)},\cdots,\infty a^k\}$中选$r$ 个元素的组合数的生成函数

与 1)中思路相同,考虑 $F(x)=$

$$\underbrace{(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)\cdots(1+x+x^2+\cdots)}_{k个(\cdots)}=1+\beta_1x+\beta_2x^2+\cdots+\beta_nx^n+\cdots, \quad (3)$$

(3)式右端 x^r 的系数即为所求的组合数,而(3)左端为$(1-x)^{-k}=F(x)$,$F(x)$的幂级数展开的系数 $\beta_r=\frac{1}{r!}\frac{d^rF(0)}{dx^r}=C(k+r-1,r)$,而此系数正是从 S 中选r 个元素的组合数.

用母函数法,借助于微积分中的泰勒级数技术,可以比 2.3 章更轻松地算出可重复的组合的数目. $F(x)=(1-x)^{-k}$即$C(k+r-1,r)$的生成函数.

3)从 $S=\{\infty a^{(1)},\infty a^{(2)},\cdots,\infty a^{(k)}\}$中选 r 个元素,且 S 中

每个不同的元素至少选中一次，其组合数目的母函数($r\geq k$).

考虑母函数

$$F(x)=\underbrace{(x+x^2+x^3+\cdots)(x+x^2+\cdots)\cdots(x+x^2+\cdots)}_{k个(\cdots)}$$

$$=(1+\gamma_1 x+\gamma_2 x^2+\cdots)x^k, \tag{4}$$

$$F(x)=x^k(1-x)^{-k}=x^k(1+\gamma_1 x+\gamma_2 x^2+\cdots)$$

$$=x^k(1-x)^{-k}, \tag{5}$$

按幂级数展开$(1-x)^{-k}$的系数$\gamma_{r-k}=C(r-1,r-k)=C(r-1,k-1)$.所以所求的组合数是$C(r-1,k-1)$.

4)从$S=\{\infty a^{(1)},\infty a^{(2)},\cdots,\infty a^k\}$中取$r$个元素，且使$a^{(1)}$，$a^{(2)}\cdots,a^{(l)}$每个至多出现$m$次，$m,l\leqslant k$，$a^{(l+1)},a^{(l+2)}\cdots,a^k$不重复出现；其组合数的母函数.

$$F(x)=\underbrace{(1+x+\cdots+x^m)(1+x+\cdots+x^m)\cdots(1+x+\cdots+x^m)}_{l个(\cdots)}$$

$$\times\underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{k-l个(\cdots)}$$

$$=(1+x+\cdots+x^m)^l(1+x)^{k-l}, \tag{6}$$

$F(x)$的幂级数中x^r的系数即为从S中取r个元素所要求的组合数，$F(x)$是此组合数的母函数.

例 3 白球4枚，黄球2枚，红球2枚，从中取5球，几种取法？

解 白$=w$，红$=r$，黄$=y$，则考虑母函数

$$F(r,w,y)=(1+r+r^2)(1+w+w^2+w^3+w^4)(1+y+y^2)$$

$$=r^2y^2w+r^2yw^2+ry^2w^2+r^2w^3+ryw^3+y^2w^3$$

$$+rw^4+yw^4+\cdots,$$

其中“…”是非5次项，可见取5球有8种取法.

上式的8个5次项每项表示一种取法，$r^{k_1}y^{k_2}w^{k_3}$表示取k_1个红球，k_2个黄球，k_3个白球，$k_1+k_2+k_3=5$.

2.5.3 拆分自然数

把一个自然数表成若干个自然数之和，称为拆分自然数；不同的拆分方式的个数称为此自然数的拆分数.

例如　$6=1+1+1+1+1+1=2+1+1+1+1=3+1+1+1$

$=4+1+1=5+1=2+2+1+1=2+2+2=3+3$,

6 的拆分数是 8.

n 的拆分数是把 n 个无区别的球放入 n 个无区别的袋子里，允许有的袋子不放时，装袋的方式数.

下面用母函数技术求把自然数拆分成满足各种要求的拆分数.

1)把 $k\in\mathbf{N}$ 拆分成彼此相异的部分的拆分数，要求每部分不超过 $n\in\mathbf{N}$

考虑母函数

$$F(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n),$$

$F(x)$展开成多项式后，其 x^k 的系数即为 k 拆分成每部分相异且皆不超过 n 的拆分数.

例 4　用 1 克，2 克，3 克，4 克，5 克的砝码各一枚，能称出多少种质量？每种质量各有几种加砝码的方法？

解　令母函数为

$$\begin{aligned}F(x)&=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\\&=1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+3x^6+3x^7+3x^8+3x^9\\&\quad+3x^{10}+2x^{11}+2x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15},\end{aligned}$$

由 $F(x)$的展开式看出，用这些砝码可称出 1 克到 15 克的 15 种质量，展开式中 $x^k(1\leqslant k\leqslant 15)$的系数即 k 克质量加砝码的方法的数目. 例如 $3x^8$ 表示 8 克质量可用了 3 种方式称量：$1+2+5$，$1+3+4$，$3+5$.

2)把 $k\in\mathbf{N}$ 拆分成没有一部分超过 $l(l\leqslant k)$的拆分数

取母函数

$$\begin{aligned}F(x)&=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots(1+x^l+x^{2l}+\cdots)\\&=[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^l)]^{-1},\end{aligned}$$

把$[(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^l)]^{-1}$进行幂级数展开，展开式中 x^k 的系数即为 k 的每部分皆不超过 l 的拆分数.

例 5 求各自然数每部分不超过 3 的拆分数.

解 取母函数

$$F(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)$$
$$=[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)]^{-1}=1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+\cdots$$

所以知 $k\in\mathbf{N}$ 的拆分数(每部分不超过 3 时)为 k 个,例如 5 的每部分不超过 3 的拆分数是 5,它的拆分如下:2+2+1,1+1+1+1+1,1+1+1+2,1+1+3,2+3.

3)把 $k\in\mathbf{N}$ 拆分成奇数,每部分不超过 $2n+1$ 时的拆分数.

取母函数为

$$F(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\cdots(1+x^{2n+1}+x^{2(2n+1)}+\cdots)$$
$$=[(1-x)(1-x^3)\cdots(1-x^{2n+1})]^{-1},$$

把 $F(x)$ 作幂级数展开

$$F(x)=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

右端 x^k 的系数即为 k 的拆分数,且每个拆分出的部分不超过 $2n+1$.

例 6 把自然数拆分成每部分不超过 5 的奇数,求拆分数.

解 取母函数

$$F(x)=[(1-x)(1-x^3)(1-x^5)]^{-1}$$
$$=1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+3x^6+4x^7+5x^8+\cdots,$$

右端 x^k 的系数即 k 的拆分数,且每个拆分出的部分是不超过 5 的奇数,例如 8 拆成 5 部分是:

1+1+1+1+1+1+1+1,1+1+3+3,1+1+1+1+1+3,3+5,1+1+1+5.

4)把 $k\in\mathbf{N}$ 拆分成偶数,每部分不超过 $2n$ 的拆分数

取母函数为

$$F(x)=(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)\cdots(1+$$

$$x^{2n}+x^{4n}+\cdots)$$
$$=1+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{2n}x^{2n}+\cdots,$$
上式右端 x^{2k} 的系数 a_{2k} 即所求的 $2k$ 的拆分数.

例 7 求把正偶数拆分成每部分不超过 **6** 的拆分数.

$$F(x)=[(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)]^{-1}$$
$$=1+x^2+2x^4+3x^6+4x^8+\cdots,$$
上式右端 x^{2k} 的系数即 $2k$ 的不超过 6 的偶拆分数;例如 6 拆成偶数,且每部分不超过 6 拆分数是 3:6,2+4,2+2+2.

2.5.4 排列数的生成函数

由于

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, \tag{7}$$

若把 $1,\frac{x}{1!},\frac{x^2}{2!},\cdots,\frac{x^n}{n!}\cdots$ 视为标志函数,则(7)式是数列 $1,1,1,\cdots,1,\cdots$ 的生成函数;一般地,把

$$F_e(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{x^k}{k!} \tag{8}$$

称为指数型生成函数,即数列 $a_0,a_1,\cdots,a_n\cdots$ 的生成函数是(8)式表达的 $F_e(x)$.

例如我们知道

$$F_p(x)=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}C(n,k)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P(n,k)}{k!}x^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}P(n,k)\frac{x^k}{k!},$$

这里的排列数 $P(n,k)$ 扮了(8)式中 a_k 的角色,所以 $(1+x)^n$ 是 $P(n,k)$ 的指数型生成函数.

为了区别于幂函数 $1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots$ 为标志函数的母函数 $F(x)$,所以指数型母函数记成了 $F_e(x)$.

定理 1 从 $S=\{p_1a^{(1)},p_2a^{(2)},\cdots,p_ka^{(k)}\}$ 中取 r 个

$\left(r\leqslant\sum_{i=1}^{k}p_i\right)$元素的排列数$b_r$的指数型母函数为

$$F_e(x)=\prod_{i=1}^{k}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{p_i}}{p_i!}\right).\tag{9}$$

证 把(9)式右端展开成幂级数(做多项式乘法即得),每项形如

$$\frac{x^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{x^{m_2}}{m_2!}\cdot\cdots\frac{x^{m_k}}{m_k!}=\frac{x^{m_1+m_2+\cdots+m_k}}{\prod_{i=1}^{k}m_i!},$$

其中$0\leqslant m_i\leqslant p_i,i=1,2,\cdots,k$.令$r=m_1+m_2+\cdots+m_k$,则

$$\frac{x^r}{\prod_{i=1}^{k}m_i!}=\frac{r!}{\prod_{i=1}^{k}m_i!}\frac{x^r}{r!},$$

其中$\frac{r!}{\prod_{i=1}^{k}m_i!}$与$r=m_1+m_2+\cdots m_k$的拆分方式相对应,

从$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{p_1}}{p_1!}\right)$中提取$\frac{x^{i_1}}{i_1!}$,从$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{p_2}}{p_2!}\right)$中提取$\frac{x^{i_2}}{i_2!}$,…,从$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{p_k}}{p_k!}\right)$中提取$\frac{x^{i_k}}{i_k!}$,且$\sum_{j=1}^{k}i_j=r$,则

$$\frac{x^{i_1}}{i_1!}\cdot\frac{x^{i_2}}{i_2!}\cdot\cdots\frac{x^{i_k}}{i_k!}=\frac{r!}{\prod_{j=1}^{k}i_j}\frac{x^r}{r!}.$$

可见在$F_e(x)$的展开式中$\frac{x^r}{r!}$的系数为

$$\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=r\\0\leqslant m_1\leqslant p_1\\0\leqslant m_2\leqslant p_2\\\cdots\cdots\\0\leqslant m_k\leqslant p_n}}\frac{r!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}.\tag{10}$$

(10)即排列数$b_r,r=0,1,2,\cdots,\sum_{i=1}^{k}p_i$,证毕.

例 8 有一个 6 位数，它的数字全属于$\{1,2,3,4,5\}$中的数，5 恰用 1 次，且此 6 位数中有数字 1，但 1 出现不超过两次，2 出现不超过 1 次，3 不超过 3 次，4 出现的次数是偶数，这种数共计多少个？

解 考虑指数型母函数

$$F_e(x)=\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)(1+x)$$
$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)x$$
$$=2\cdot\frac{x^2}{2!}+15\cdot\frac{x^3}{3!}+72\cdot\frac{x^4}{4!}+320\cdot\frac{x^5}{5!}+1290\cdot\frac{x^6}{6!}+\cdots,$$

由 $1290\frac{x^6}{6!}$知此种数有 1290 个.

定理 2 从 $S=\{\infty a^{(1)},\infty a^{(2)},\cdots,\infty a^{(k)}\}$中取 r 个元素，每个元素至少取出一次的排列的个数是

$$b_r=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C(k,i)i^r. \tag{11}$$

证 考虑指数型母函数

$$F_e(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)^k=(e^x-1)^k$$
$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C(k,i)e^{ix}$$
$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C(k,i)\left(\sum_{n=0}^{k}\frac{i^n}{n!}x^n\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C(k,i)i^n\right)x^n,$$

可见所求的排列数为 $b_n=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C(k,i)i^r$，证毕.

习题三

1. 求数列 $0,1,4,\cdots,n^2,\cdots$ 的生成函数 $F(x)$.

2. 求数列 $2\times1,3\times2,4\times3,\cdots,n\times(n-1)\cdots$ 的生成函数 $F(x)$.

3. 求 $0,1,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,\frac{1}{7},\cdots$ 的生成函数 $F(x)$.

4. 求 $1,a,a^2,\cdots,a^n,\cdots$ 的指数型生成函数 $F_e(x)$.

5. 用 0,1,2,3,4,五个数字可组成多少个六位数? 要求 0 必须出现 1 次,1 出现 2 次或 3 次,2 出现 1 次或不出现,3 没有限制,4 出现奇数次.

6. 令 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\infty\cdot e_3,\infty\cdot e_4\}$,确定序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 的母函数,其中 a_n 是 S 的有限制的 n 组合数.

(1)每个 e_i 出现奇数次,$i=1,2,3,4$.

(2)每个 e_i 出现 3 的倍数次.

(3)e_1 不出现,e_2 至多出现 1 次.

(4)e_1 出现 1 次、3 次或 11 次;e_2 出现 2 次、4 次或 5 次.

7. 确定序列 $1!,2!,3!,\cdots,n!,\cdots$ 的指数型生成函数.

8. 令 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\infty\cdot e_3,\infty\cdot e_4,\infty\cdot e_5\}$,确定序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 的指数型母函数,其中 $a_0=1$,对于 $n=1,2,\cdots$ 有

(1)a_n 等于 S 的每个元素出现奇数次的 n 排列个数.

(2)a_n 等于 S 的每个元素至少出现 4 次的 n 排列个数.

(3)a_n 等于 n 排列个数,其中 e_1 至少出现 1 次,e_2 至少出现 2 次,$\cdots$,e_5 至少出现 5 次.

(4)a_n 等于 n 排列个数,其中 e_1 至多出现 1 次,e_2 至多出现两次,$\cdots$,e_5 至多出现 5 次.

9. 证明:(1)$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 的指数型生成函数是 $\frac{1}{x}(e^x-1)$.

(2)数列$\left\{\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i+1)!(i+1)!}:n\geqslant 0\right\}$的指数型生成函数是$\frac{1}{x^2}(e^x-1)^2$.

10.记边长都是正整数且周长为 k 的三角形个数是 t_k,规定 $t_0=0$,求证:序列 $t_0,t_1,\cdots,t_n,\cdots$ 的生成函数为 $F(x)=x^3(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1}(1-x^4)^{-1}$.

11.今有红、黄、蓝、白、紫、黑六种球分别为两个,两个,三个,三个,四个,四个,从中取 10 只,有几种取法?

12.有 8 男 5 女,从中选拔不少于 2 名女士和偶数位男士组成一个小组,几种选拔方式?

13.1 角、2 角、8 角、1 元的邮票贴出的不同邮资有多少种?

14.1 克砝码 10 枚,2 克砝码 5 枚,4 克砝码 2 枚,能称出几种质量? 各有几种加码方案?

15.由 100 个白球排成一队,用红、绿、蓝三色对每球上色,每球一色,但要求同色球为偶数,有几种着色方式?

16.10 只球放入 A、B、C、D 四只盒子,要求 A 盒不少于 4 只球,B 盒不多于 5 只球,C 盒放偶数个球,D 盒任意投放,有多少种投放方式?

17.把实数轴上的点 $0,1,2,\cdots,n$ 用红、橙、黄、绿、蓝、靛、紫 7 种颜色每点着一色,且要求出现偶数个红点,偶数个橙点、偶数个黄点,其余四种颜色中有两种是奇数个,另两种任意,有多少种着色方式?

18.由 0,2,4,6,8 五个数字组成的 7 位数中,0 至少出现 1 次,6 不作限制,但 2 与 4 各出现偶数次,8 出现奇数次,这种 7 位数有多少?

19.由 0,2,4,6,8 组成的 10 位数中,要求 0 出现恰 2 次且不邻,2 与 4 各出现偶次,6 与 8 不作限制,这种 10 位数有多少?

2.6 递归方程

2.6.1 递归方程的初值问题

定义 1 序列 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, \cdots, a_n, \cdots$ 中,已知 $a_0 = \alpha_0$, $a_1 = \alpha_1, \cdots, a_{k-1} = \alpha_{k-1}$, α_i 是已知数, $i = 0, 1, \cdots, k-1$; $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n \cdots$ 各项为未知数. 又已知 $k+1$ 元函数 F, F 的定义域为 $\mathbf{R}^{k+1}$,则称

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k}, n), n \geqslant k \tag{1}$$

为关于未知数 a_n 的 k 阶**递归方程**. 此**递归方程的初值问题**是指

$$\begin{cases} (1), \\ a_i = \alpha_i, i = 0, 1, 2, \cdots, k-1. \square \end{cases} \tag{2}$$

把(2)及 $n = k$ 代入(1),通过 F 可算出 a_k;把 $n = k+1$ 代入(1)可算出 a_{k+1},把 $n = k+2$ 代入(1)可算出 a_{k+2},依此递推,可逐次算出 $a_n, n \geqslant k$. 由此可知初值问题(1)(2)的解是存在唯一的.

例 1 Fibonacci 序列及其递归方程.

解 设 $f(n)$是第 n 个月开始时兔子的对数, $f(1) = 1$,若令 $f(0) = 1$,则有 $f(2) = f(0) + f(1)$, $f(3) = f(1) + f(2)$, $\cdots$,一般地有递归方程的初值问题

$$\begin{cases} f(n) = f(n-1) + f(n-2), n = 2, 3, \cdots, & (3) \\ f(0) = f(1) = 1. & (4) \end{cases}$$

例 2 河内(Hanoi)塔问题的递归方程是 $h(n+1) = 2h(n) + 1$,其中 $h(n+1)$表示 $n+1$ 个盘子从 a 柱移至 c 柱的移动次数.

证 用对 n 的数学归纳法来证明.

显然 $h(0) = 0$, $h(1) = 1$,所以当 $n = 0$ 时,公式 $h(n+1) = 2h(n) + 1$ 成立;考虑 a 柱上有 2 只盘子, $h(2) = ?$ 相应的动作必然是首先把 a 柱上的小盘移到 b 柱,再把大盘移到 c 柱,第三步把 b 柱上的小盘移至 c 柱,所以 $h(2) = 3 = 2h(1) + 1$. 至此归纳法起

步完成.

假设 a 柱上有 k 只盘子($k\geqslant 2$)已有 $h(k)=2h(k-1)+1$. 考虑 a 柱上有 $k+1$ 只盘子的情形,暂把上层那 k 只盘子利用 c 柱全移到 b 柱上,由归纳法假设,需要移动 $h(k)=2h(k-1)+1$ 次. 这时,再把那只最大的盘子移到 c 柱,最后再用 $h(k)=2h(k-1)+1$ 个动作把 b 柱上的 k 只盘子利用 a 柱移至 c 柱,前后共移动了 $[2h(k-1)+1]+1+[2h(k-1)+1]=2h(k)+1$,即 $h(k+1)=2h(k)+1$,证毕.

河内塔的递归方程初值问题为

$$\begin{cases} h(n+1)=2h(n)+1, \qquad n=0,1,2,\cdots, & (5) \\ h(0)=0. & (6) \end{cases}$$

k 阶($k\geqslant 1$)递归方程的初值问题需要 k 个初条件,例如(1)是 k 阶方程,初条件(2)有 k 个初值;(3)是 2 阶递归方程,初条件(4)有两个初值 $f(0)$ 与 $f(1)$;(5)是一阶递归方程,只有一个初条件 $h(0)=0$.

定义 2 形如 $a(n)+\alpha_1 a(n-1)+\alpha_2 a(n-2)+\cdots+\alpha_k a(n-k)=\beta(n)$ 的递归方程,其中 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是 n 的已知函数,$\alpha_k\neq 0$,$\beta(n)\neq 0$ 是 n 的已知函数,则称此关于 $a(n)$ 的递归方程为 k 阶线性非齐次递归方程,$\beta(n)\equiv 0$ 时,称此递归方程为 k 阶线性齐次递归方程. □

容易证明,非齐次线性递归方程的解加上相应的齐次线性递归方程的任何解,仍为非齐次线性递归方程的解.

2.6.2 线性常系数递归方程的生成函数解法

给定线性常系数递归方程为

$$a(n)+\alpha_1 a(n-1)+\alpha_2 a(n-2)+\cdots+\alpha_k a(n-k) = \beta(n), \tag{7}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为常数,用 a_n 表示 $a(n)$,我们的目标是找到序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 的母函数 $F(t)$:

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

以便由 $F(x)$ 的幂级数展开式之系数定出递归方程的解 $a(n)=a_n$. 为此，用 x^n 乘方程(7)的两端且求和 $\sum\limits_{n=k}^{\infty}$：

$$\sum_{n=k}^{\infty}(a_n+\alpha_1a_{n-1}+\cdots+\alpha_ka_{n-k})x^n=\sum_{n=k}^{\infty}\beta(n)x^n, \qquad (8)$$

而

$$\sum_{n=k}^{\infty}a_nx^n=F(x)-(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{k-1}x^{k-1}),$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}\alpha_1a_{n-1}x^n=\alpha_1x[F(x)-(a_0+a_1x+\cdots+a_{k-2}x^{k-2})],$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}\alpha_2a_{n-2}x^n=\alpha_2x^2[F(x)-(a_0+a_1x+\cdots+a_{k-3}x^{k-3})],$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}\alpha_{k-1}a_{n-k+1}x^n=\alpha_{k-1}x^{k-1}[F(x)-a_0],$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}\alpha_ka_{n-k}x^n=\alpha_kx^k\sum_{n=k}^{\infty}a_{n-k}x^{n-k}=\alpha_kx^kF(x).$$

把上面各等式相加得

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{\infty}\beta(n)x^n=&F(x)(1+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_kx^k)\\&-(a_0+a_1x+a_2x+\cdots+a_{k-1}x^{k-1})\\&-\alpha_1(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{k-2}x^{k-2})x\\&-\alpha_2(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{k-3}x^{k-3})x^2\\&-\cdots-a_0\alpha_{k-1}x^{k-1}\end{aligned}$$

于是得母函数

$$F(x)=[1+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_kx^k]^{-1}\Big[\sum_{n=k}^{\infty}\beta(n)x^n+(a_0+a_1x+a_2x^2$$

$$+\cdots+a_{k-1}x^{k-1})+\alpha_1(a_0+a_1x+\cdots+a_{k-2}x^{k-2})x$$

$$+\alpha_2(a_0+a_1x+\cdots+a_{k-3}x^{k-3})x^2+\cdots+\alpha_{k-1}x^{k-1}a_0\Big],\quad(9)$$

例 3 求 Fibonacci 数列.

解 由(3)(4)及(9)知,$\beta=0,\alpha_1=-1,\alpha_2=-1,k=2$,于是 Fibonacci 列的母函数为

$$F(x)=(1-x-x^2)^{-1}[a_0+a_1x+\alpha_1a_0x],$$

由初条件,$a_0=a_1=1$,所以所求之母函数为

$$F(x)=(1-x-x^2)^{-1},$$

把$(1-x-x^2)^{-1}$展成幂级数,其 x^n 的系数为

$$a_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1},\quad(10)$$

(10)即所求的 Fibonacci 数列的通项公式,$n=0,1,2,\cdots$.

例 4 求 Hanoi 塔问题中的移盘次数 $h(n)$.

解 在(5)(6)中,公式(9)中的 $\alpha_1=-2,\beta(n)\equiv1,k=1$,代入公式(9)得 $h(0),h(1),\cdots,h(n),\cdots$的母函数为

$$F(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$=[1+\alpha_1x]^{-1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}x^n+h_0\right].$$

由于 $h_0=0$,故 $F(x)=\dfrac{x}{(1-x)(1-2x)}=\dfrac{1}{1-2x}-\dfrac{1}{1-x}$,$F(x)$ 的幂级数展开的 x^n 的系数为 2^n-1,所以移盘次数为 $h(n)=2^n-1$.

例 5 设 n 条封闭曲线画在平面上,任何两条封闭曲线恰交于两点,且任三条封闭曲线不交于同一点,求这些闭曲线把平面划分成几个区域?

解 记 a_n 是所求的区域数.若 $n-1$ 条这种闭曲线已把平面划分成 a_{n-1}个区域,第 n 条闭曲线必与前面的 $n-1$ 条闭曲线相交于 $2(n-1)$个点,这 $2(n-1)$个点把第 n 条闭曲线分割成 $2(n-1)$段曲线段,它们把原来 a_{n-1}个区域中的 $2(n-1)$个区域划分

成 4$(n-1)$ 个区域，于是 $a_n=a_{n-1}+2(n-1)$，有初值问题

$$\begin{cases} a_n-a_{n-1}=2(n-1), n\geqslant 1. & (11)\\ a_0=2. & (12)\end{cases}$$

（为了满足 $a_1=2$，人为规定初条件 $a_0=2$.）

设 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 的母函数为 $F(x)$，$F(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$；(11)(12)中，$\alpha_1=-1, k=1, \beta(n)=2(n-1)$，代入公式(9)得

$$\begin{aligned} F(x) &= (1-x)^{-1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}2(n-1)x^n+a_0\right]\\ &= (1-x)^{-1}\left[2x^2\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^{n-2}+2\right]\\ &= (1-x)^{-1}\left[2x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)'+2\right] \qquad \left('=\frac{d}{dx}\right)\\ &= (1-x)^{-1}\left[2x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)'+2\right]\\ &= \frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{2}{1-x}. \end{aligned}$$

$F(x)$ 的幂级数展开式中 x^n 系数是

$$a_n=n(n-1)+2, n=0,1,2,\cdots.$$

2.6.3 常系数线性齐次递归方程的特征值解法

定义 3 对于常系数齐次线性递归方程

$$a(n)+\alpha_1a(n-1)+\alpha_2a(n-2)+\cdots+\alpha_ka(n-k)=0, \quad (13)$$

方程

$$x^k+\alpha_1x^{k-1}+\alpha_2x^{k-2}+\cdots+\alpha_k=0 \qquad (14)$$

称为递归方程(13)的特征方程，特征方程的根称为(13)的特征根或特征值. □

1) 特征值是 k 个相异实数的情形

设(14)有根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k\in\mathbf{R}$，且 $\lambda_i\neq\lambda_j, 1\leqslant i<j\leqslant k$.

定理 1 设 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k$ 是 k 个实特征值，则(13)的通解为

$$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_k\lambda_k^n. \tag{15}$$

证　由于 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,k)$是(14)的根,所以 λ_i^n 满足(13),又(13)是线性齐次方程,所以解的线性组合(15)仍是(13)的解.下面证明对任给的初值 $a(0)=b_0, a(1)=b_1,\cdots,a(k-1)=b_{k-1}$,唯一确定的特解 $\bar{a}(n)$,存在唯一常数 $\bar{c}_1,\bar{c}_2,\cdots,\bar{c}_k$,使得

$$\bar{a}(n) = \sum_{i=1}^{k} \bar{c}_i\lambda_i^n.$$

事实上,由 $\bar{a}(n)$的初条件得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \cdots + c_k = b_0, & ((15)\text{中 } n=0) \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_k\lambda_k = b_1, & (n=1) \\ \cdots\cdots \\ c_1\lambda_1^{n-1} + c_2\lambda_2^{k-1} + \cdots + c_k\lambda_k^{k-1} = b_{k-1}. & (n=k-1) \end{cases} \tag{16}$$

(16)的系数阵的行列式是范德蒙行列式,所以(16)有唯一解 $\bar{c}_1$,$\bar{c}_2,\cdots,\bar{c}_k$,故(15)是通解,证毕.

例如 Fibonacci 列,$f(n)=f(n-1)+f(n-2), n=2,3,\cdots$,它的特征方程为

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

特征根为 $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$,所以通解是

$$f(n) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \tag{17}$$

由初条件　$f(0)=f(1)=1$,代入(17)得

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2, \\ 1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \end{cases}$$

解得　$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,于是得解

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

这种特征解法比前面的母函数法简洁.

2)特征值皆实数但有重根的情形.

定理 2 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots<\lambda_r$ 是实特征值,重数分别为 n_1, $n_2,\cdots,n_r$, $\sum_{i=1}^{r} n_i = k$,则(13) 的通解为

$$\begin{aligned} a(n)=&\left(c_1^{(1)}+c_2^{(1)}n+\cdots+c_{n_1}^{(1)}n^{n_1-1}\right)\lambda_1^n \\ &+\left(c_1^{(2)}+c_2^{(2)}n+\cdots+c_{n_2}^{(2)}n^{n_2-1}\right)\lambda_2^n+\cdots \\ &+\left(c_1^{(r)}+c_2^{(r)}n+\cdots+c_{n_r}^{(r)}n^{n_r-1}\right)\lambda_r^n. \end{aligned} \tag{18}$$

定理 2 的证明与定理 1 相似,此处不必写了.

例 6 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = ?$

解 令 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = a(n)$,则有

$a(n)-a(n-1)=n^2,\quad a(n-1)-a(n-2)=(n-1)^2,$

$$\begin{aligned} &[a(n)-a(n-1)]-[a(n-1)-a(n-2)] \\ &= a(n)-2a(n-1)+a(n-2) \\ &= 2n-1, \end{aligned}$$

$a(n-1)-2a(n-2)+a(n-3)=2(n-1)-1,$

$[a(n)-2a(n-1)+a(n-2)]-[a(n-1)-2a(n-2)+a(n-3)]=2,$

即

$$\begin{cases} a(n)-3a(n-1)+3a(n-2)-a(n-3)=2, \\ a(n-1)-3a(n-2)+3a(n-3)-a(n-4)=2, \end{cases}$$

最后得常系数线性齐次递归方程

$a(n)-4a(n-1)+6a(n-2)-4a(n-3)+a(n-4)=0,$

特征方程为

$$\lambda^4-4\lambda^3+6\lambda^2-4\lambda+1=(\lambda-1)^4=0,$$

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1.$$

通解为

$$a(n)=(c_1+c_2n+c_3n^2+c_4n^3)1^n, n\geqslant 4.$$

$a(0)=a(1)=1, a(2)=5, a(3)=14$，于是有

$$\begin{cases} c_1=1, \\ c_1+c_2+c_3+c_4=1, \\ c_1+2c_2+4c_3+8c_4=5, \\ c_1+3c_2+9c_3+27c_4=14. \end{cases}$$

解得 $c_1=0, c_2=\frac{1}{6}, c_3=\frac{1}{2}, c_4=\frac{1}{3}$，故

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

对于非齐次项 $\beta(n)$ 为多项式的情形，可以利用减法化成齐次线性方程，事实上，

$$a(n)+\alpha_1 a(n-1)+\cdots+\alpha_k a(n-k)=\beta(n),$$

$$a(n-1)+\alpha_1 a(n-2)+\cdots+\alpha_k a(n-k-1)=\beta(n-1),$$

这两式相减得递归方程

$$a(n)+\beta_1 a(n-1)+\beta_2 a(n-2)+\cdots+\beta_{k+1}a(n-(k+1)) = r(n),$$

其中 $r(n)$ 是比 $\beta(n)$ 次数低一次的多项式，逐次利用这种相减技术，可使右端非齐次项变成零次多项式，即常数，再用一次减法技术，则得到线性齐次递归方程.

3)特征根中有复数的情形

若 λ_i 与 λ_j 是两个共轭复数，设 $\lambda_i=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$，则在公式(15)或(18)的 λ_i^n 与 λ_j^n 处分别用其实部 $\rho^n\cos n\theta$ 和虚部 $\rho^n\sin\theta$ 代入即可.

例 7 求解初值问题

$$\begin{cases} a_n=a_{n-1}-a_{n-2}, \\ a_1=1, a_2=0. \end{cases} \tag{19}$$

解 特征方程为 $\lambda^2-\lambda+1=0$, $\lambda_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_2=\frac{1}{2}-i$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$,于是通解为

$$a_n=c_1\cos\frac{n\pi}{3}+c_2\sin\frac{n\pi}{3},$$

由初条件得

$$\begin{cases}1=c_1\cos\frac{\pi}{3}+c_2\sin\frac{\pi}{3},\\0=c_1\cos\frac{2\pi}{3}+c_2\sin\frac{2\pi}{3}.\end{cases}$$

解得　$c_1=1$, $c_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$,最后得初值问题(19)的解为 $a_n=\cos\frac{n\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3}$.

2.6.4　常系数线性非齐次递归方程的解

首先用某种方法得出常系数线性非齐次递归方程的一个特解,再求相应的齐次方程的通解,两者相加,即得非齐次方程的通解.

例如 Hanoi 塔问题,$h(n)=2h(n-1)+1$, $h(1)=1$. 相应的齐次方程特征方程为 $\lambda-2=0$, $\lambda=2$;于是 $h(n)=2h(n-1)$的通解为

$$h(n)=c2^n,$$

由观察法得到 $h(n)=2h(n-1)+1$ 的一个特解 $h(n)=-1$,于是 $h(n)=2h(n-1)+1$ 的通解为

$$h(n)=c\cdot 2^n-1,$$

由初条件 $h(1)=1$,得 $c=1$,最后得解 $h(n)=2^n-1$.

2.6.5　递归方程的其它解法

1)用母函数求变系数线性递归方程的解

变系数线性递归方程一般很难求解,但对其中某些特殊类型的方程,经适当的递推变形,运用生成函数方法,可以求得初值问题的解.兹举例说明如下.

错位排列个数 $D_n=?$

错位排列个数 D_n 满足线性 2 阶变系数齐次递归方程的初值问题

$$\begin{cases} D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}), n=2,3,\cdots \\ D_0=1, D_1=0. \end{cases}$$

递推变形如下：

$$\begin{aligned} D_n&=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}), \\ D_n-nD_{n-1}&=-[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}] \\ &=(-1)^2[D_{n-2}-(n-2)D_{n-3}] \\ &=(-1)^{n-1}(D_1-D_0)=(-1)^n. \end{aligned}$$

即得

$$D_n-nD_{n-1}=(-1)^n. \tag{20}$$

设(20)定义的序列 $D_0,D_1,D_2,\cdots D_n,\cdots$ 的母函数为

$$\begin{aligned} F(x)&=D_0+D_1x+D_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+D_n\frac{x^n}{n!}+\cdots \\ &=1+\sum_{n=2}^{\infty}D_n\frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

把(20)式两端乘以$\frac{x^n}{n!}$再求 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}$ 得

$$\sum_{n=2}^{\infty}D_n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}nD_{n-1}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty}D_n\frac{x^n}{n!}&=F(x)-1 \\ &=x\sum_{n=2}^{\infty}D_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+(e^{-x}-1+x) \\ &=x(F(x)-1)+(e^{-x}-1+x). \end{aligned}$$

于是得

$$F(x)-1=xF(x)+e^{-x}-1, (x-1)F(x)=-e^{-x},$$

$$F(x)=\frac{1}{1-x}\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)$$

$$=(1+x+x^2+\cdots)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots\right),$$

上式右端两个级数乘后展开成幂级数，$\frac{x^n}{n!}$ 的系数为 $\left(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)n!$，所以错位排列的个数 $D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$.

2)用向初值递推法求递归方程的解

求解 $a_n=F(a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_{n-k},n)$，右端的 a_{n-1} 用 $F(a_{n-2},a_{n-3},\cdots,a_{n-k-1},n-1)$ 代入，a_{n-2} 用 $F(a_{n-3},a_{n-4},\cdots,a_{n-k-2},n-2)$ 代入，依此逐次把递归方程中的 n 减小 1 再代入方程 $a_n=F$ 的右端，最后得到 a_n 被初值所表达的式子.

例 8 求解初值问题

$$\begin{cases}a(n)=(4n-6)a(n-1),\\ a(1)=1,\end{cases}$$

解 由于 $a(n)=(4n-6)a(n-1)$，于是

$$\begin{aligned}a(n)&=(4n-6)a(n-1)\\&=(4n-6)[4(n-1)-6]a(n-2)\\&=(4n-6)(4n-10)(4n-14)a(n-3)\\&=(4n-6)(4n-10)(4n-14)(4n-18)\cdots6\cdot2a(1)\\&=2^{n-1}[1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)]\\&=\frac{2^{n-1}(2n-2)!}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n-6)(2n-4)(2n-2)}\\&=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}=(n-1)!C(2n-2,n-1)\\&=n!C(n-1).\end{aligned}$$

可见此初值问题的解是 Catalan 数 $C(n-1)$的 $n!$ 倍.

由此种方法可以证明初值问题

$$\begin{cases} h_{n+1} = \dfrac{1}{n}(4n-6)h_n, \\ h(2) = 1 \end{cases}$$

的解是 Catalan 数 $h(n+1) = \frac{1}{n} = \frac{1}{n}C(2n-2, n-1) = C(n-1)$.

2.6.6 Stirling 数

下面介绍一种很有用的二维递归序列.

定义 4 把 n 元素合划分成非空的 m 个子集的划分方式数目记成 $S(n,m)$,称 $S(n,m)$为(第二类)Stirling 数. □

由定义可知一些平凡的 Stirling 数:

$S(n,0)=0(n\geqslant 1), S(n,1)=1, S(n,n)=1,$

$S(n,m)=0(m>n), S(n,n-1)=C(n,2).$

$S(n,2)=2^{n-1}-1, S(n+1,k)=\sum\limits_{j=k-1}^{n} C(n,j)S(j,k-1).$

下面建立 $S(n,m)$的递归公式.

定理 3 $n>1, m\geqslant 1$ 时有递归公式

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1). \tag{12}$$

证 设有 n 元集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,把 A 划分成 m 个非空子集,这些子集组成的集合为 $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$, $A_i\subset A$, $i=1,2,\cdots,m$,任取一元素 $a_k\in A$.

(ⅰ)$A_1=\{a_k\}$.这时划分方式有 $S(n-1,m-1)$种.

(ⅱ)$\{a_k\}\notin\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$.只能是先把 $A-\{a_k\}$(之中有 $n-1$ 个元素)划分成非空的 m 个子集,由定义,共有 $S(n-1,m)$种划分方式;然后把 a_k 放入其中任一子集,a_k 有 m 种放法,可见(ⅱ)情形的划分方式总数为 $mS(n-1,m)$.

由加法原理得知(12)式成立,证毕.

对于 $S(n,m)$反复使用公式(12),可使等式右端的函数 $S(\cdot,\cdot)$的自变量逐次变小,以至于变成其函数值已知的平凡情形,从而算出 $S(n,m)$的值.

例 9 把10个颜色各异的球装入8只一模一样的瓶子，不许有空瓶，问有多少种装瓶方式？

解 此题意在求 $S(10,8)$.

$$\begin{aligned}S(10,8)&=8S(9,8)+S(9,7)\\&=8C(9,2)+7S(8,7)+S(8,6)\\&=288+7C(8,2)+6S(7,6)+S(7,5)\\&=288+196+126+5S(6,5)+S(6,4)\\&=685+4S(5,4)+S(5,3)\\&=725+3S(4,3)+S(4,2)\\&=743+(2^3-1)=750.\end{aligned}$$

习题四

1. 求初值问题的解：

$$\begin{cases}H_n=2H_{n-1}+H_{n-2}-2H_{n-3}, n=3,4,\cdots\\H_0=1, H_1=2, H_2=3.\end{cases}$$

2. 求解初值问题：

$$\begin{cases}H_n=6H_{n-1}-9H_{n-2}, n=2,3,4,\cdots\\H_0=1, H_1=2.\end{cases}$$

3. 某大学20名数学专业大学毕业生，分配到10个省去工作，每省至少分去一人，且各省的工作条件无差异，问有几种分配方案？

4. 设 $f(0), f(1), f(2), \cdots$ 是 Fibonacci 列，试写出下列各个和式的结果：

(1) $f(1)+f(3)+\cdots+f(2n-1)$.

(2) $f(0)+f(2)+\cdots+f(2n)$.

(3) $[f(0)]^2+[f(1)]^2+\cdots+[f(n)]^2$.

(4) $f(0)+f(1)+\cdots+f(n)$.

5. 求解初值问题：

(1) $\begin{cases} h_n = h_{n-1} - n + 3, n = 1,2,\cdots \\ h_0 = 2. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} h_n = h_{n-1} + n^3, n = 1,2,\cdots \\ h_0 = 0. \end{cases}$

6. 求解初值问题：

(1) $\begin{cases} h_n = (n+2)h_{n-1}, n = 1,2,\cdots \\ h_0 = 2. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} h_n^2 - 2h_{n-1}^2 = 1, n = 1,2,\cdots \\ h_0 = 2. \end{cases}$

7. 求解初值问题：

$$\begin{cases} na_n + na_{n-1} - a_{n-1} = 2^n, n = 1,2,\cdots \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

8. 求和：(1) $\sum_{k=0}^{n} k$，(2) $\sum_{k=0}^{n} k^2$，(3) $\sum_{k=0}^{n} k^3$，(4) $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)$.

9. 平面上有 n 条直线和一个圆，每条直线皆与其它直线交于该圆内，且无三直线共点，问圆被这些直线分成多少区域？

10. n 位二进制数最后三位出现 010 者的个数是多少？

11. 证明：Stirling 数 $S(\cdot,\cdot)$满足公式

$$S(n+1,m) = \sum_{k=m-1}^{n} C(n,k)S(k,m-1).$$

12. 从 1 到 n 的自然数中选 k 个相异且不相邻的自然数，有多少种选法？

13. 求解递归方程组：

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n + v_n = n, \\ u_n + 2v_{n+1} - v_n = 2, \qquad n = 1,2,\cdots \\ u_0 = v_0 = 1. \end{cases}$$

14. 求解递归方程组：

$$\begin{cases} a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1}, \\ b_n = 9b_{n-1} + a_{n-1}, \qquad n = 2,3,\cdots \\ a_1 = 8, b_1 = 1. \end{cases}$$

15. 由 a,b,c 三字母组成的长为 n 的字中,禁止两个 a 相邻,求这种字的个数.

第三篇　代数与计数

这里写的代数二字是代数系统或代数结构之简称.主要内容是群、环、域,由于它们极其抽象和现代科学思想的含量高,所以也把这些代数内容称为抽象代数或近世代数,当然,它的源头既不十分深奥也不那么抽象,只是算术中实数范围四则运算或线性代数与微积分当中一些具体集合之上的特殊运算的共性,但当它准确地概括了这些古典的,大部分是初等的运算的本质之后,则获得了一种神奇的抽象力量,被广泛而有效地应用于数学科学内部各分支和物理学、化学等物质科学时,尤其突出的是它用于离散数学的方方面面之后,收到了令人惊喜的成果!例如用群的理论解决各种计数问题,用域的理论解决区组计设等等.

囿于本书的定位,我们只简略地介绍代数系统的基本概念和必要的定理,对于计数的内容则作了较细的讨论,同时介绍了图代数的一些内容.

3.1　代数系统及其性质

3.1.1　代数系统的定义

定义 1　已知集合 $S\neq\varnothing$,若存在映射 $f:S\times S\times\cdots\cdots\times S=S^n\rightarrow S$,则称 f 是集合 S 上的 n 元运算,$n\in\mathbf{N}$.

若 f_i 是 S 上的 n_i 元运算,$i=1,2,\cdots,m$,则由 S 及其上的运算 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 构成的一个数学模型称为一个代数结构,记作 $\langle S,f_1,f_2,\cdots,f_m\rangle$.□

值得注意的是上述运算是泛指有一定之规的数学操作，不一定只是$+$、$-$、$\times$、$\div$或$\int$、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$等行为，但我们有时仍然习惯地称其为加法或乘法，这是一种借喻式的称呼，分别用$\oplus$、$\otimes$等符号来表达这种广义的加法与乘法.

本篇重点讨论二元运算，若不声明，运算即指二元运算.

例如$\langle \mathbf{R}, +, -, \times \rangle$，$\langle \mathbf{N}, + \rangle$就是两个代数结构，之中的运算是二元运算，而$\langle \mathbf{R}, +, -, \times, \div \rangle$就不是代数结构，因为$\div$在$\mathbf{R}$中不是总能行得通.

定义 2　在代数系统$\langle S, \otimes \rangle$中，$e \in S$，$\otimes$是 2 元运算，对任取的$a \in S$，总有$a \otimes e = e \otimes a = a$，则称$e$是$\langle s, \otimes \rangle$的单位元；若任取$a \in S$，则存在$a' \in S$，使得$a' \otimes a = a \otimes a' = e$，则称$a'$是$a$的逆元.□

例如在$\langle \mathbf{R}, + \rangle$中$\mathbf{0}$是单位元，$\forall x \in \mathbf{R}$，$-x$是$x$的逆元，而在$\langle \mathbf{R}, \times \rangle$中 1 是单位元，$x \in \mathbf{R}$，$x \neq 0$时，其逆元是$\frac{1}{x}$，$x = 0$无逆元.

定理 1　$\langle S, \otimes \rangle$的单位元不多于 1 个.

证　若$\langle S, \otimes \rangle$有两个单位元$e, e'$，由定义，$\forall x \in S$，则有

$$x \otimes e = x, \tag{1}$$

$$e' \otimes x = x. \tag{2}$$

由x的任意性，在(1)中x用e'代入，(2)中的x用e代入，则得

$$e' \otimes e = e', e' \otimes e = e,$$

于是得$e' = e$，证毕.

定义 3　在代数系统$\langle S, \otimes \rangle$中，$e_0 \in S$，$\otimes$是 2 元运算，对任取的$a \in S$，总有$e_0 \otimes a = a \otimes e_0 = e_0$，则称$e_0$是$\langle S, \otimes \rangle$中的零元.

与定理 1 相似地可以证明下面定理.

定理 2　$\langle S, \otimes \rangle$的零元不多于 1 个.

例如$\langle \mathbf{R}, \times \rangle$中的零元唯一地是零.

$\langle \mathbf{R}, + \rangle$无零元，但零是$\langle \mathbf{R}, + \rangle$的唯一单位元，可见单位元一

词的“单位”已失去实数 1 的普通含义.

又例如约定 min 表示 N 中两数取其小者的二元运算，则实数 1 是$\langle \mathbf{N},\min\rangle$的零元，可见零元一词中的“零”字已失去实数零的含义.

定理 3 代数系统$\langle S,\otimes\rangle$中，若$\otimes$满足结合律，且有单位元 e，则 S 每一元素的逆元最多 1 个.

证 设 $x\in S$，且 x_1^{-1} 与 x_2^{-1} 皆 x 的逆元，则

$$x_1^{-1}\otimes x\otimes x_2^{-1}=(x_1^{-1}\otimes x)\otimes x_2^{-1}=e\otimes x_2^{-1}=x_2^{-1},$$

$$x_1^{-1}\otimes x\otimes x_2^{-1}=x_1^{-1}\otimes(x\otimes x_2^{-1})=x_1^{-1}\otimes e=x_1^{-1},$$

可见 $x_1^{-1}=x_2^{-1}$，证毕.

3.1.2 代数系统的同构和同态

定义 4 给定两个代数系统$\langle A,\oplus\rangle$与$\langle B,\otimes\rangle$，$\oplus$与$\otimes$都是二元运算，且存在双射

$$f: A\to B,$$

使得$\forall a_1,a_2\in A$，成立

$$f(a_1\oplus a_2)=f(a_1)\otimes f(a_2),$$

则称$\langle A,\oplus\rangle$与$\langle B,\otimes\rangle$同构，记作$\langle A,\oplus\rangle\cong\langle B,\otimes\rangle$.

例如$\langle\{0,1\},\oplus\rangle$定义为$\oplus$是 mod2 意义下的求和，而$\langle\{$羊，虎$\},\otimes\rangle$定义为羊$\otimes$羊＝羊，羊$\otimes$虎＝虎$\otimes$羊＝虎，虎$\otimes$虎＝羊，则这两个代数系统同构，$\langle\{0,1\},\oplus\rangle\cong\langle\{$羊，虎$\},\otimes\rangle$（虎$\otimes$虎＝羊的含义是虎只和虎在一起，没有食物，都变成了无力绵羊）；事实上，给羊与虎分别编码 0 与 1 即知这两个代数系统的同构性.

定理 4 若$\langle A,\oplus\rangle\cong\langle S,\otimes\rangle$，$\langle A,\oplus\rangle$有结合律，则$\langle B,\otimes\rangle$也有结合律.

证 由于$\langle A,\oplus\rangle\cong\langle B,\otimes\rangle$，考虑定义 4 中的同构映射 f，$\forall b_1,b_2,b_3\in B$，可以找到 $a_1,a_2,a_3\in A$，使得 $f(a_i)=b_i$，$i=1,2,3$. 且由定义知

$f(a_1\oplus(a_2\oplus a_3))=f(a_1)\otimes f(a_2\oplus a_3)=f(a_1)\otimes(f(a_2)\otimes$

$$f(a_3)) = b_1 \otimes (b_2 \otimes b_3), \tag{1}$$

另一方面又有

$$f((a_1 \oplus a_2) \oplus a_3) = f(a_1 \oplus a_2) \otimes f(a_3) = (f(a_1) \otimes f(a_2)) \otimes f(a_3) = (b_1 \otimes b_2) \otimes b_3. \tag{2}$$

由于$\langle A, \oplus \rangle$中有结合律，所以 $a_1 \oplus (a_2 \oplus a_3) = (a_1 \oplus a_2) \oplus a_3$，由(1)与(2)得 $b_1 \otimes (b_2 \otimes b_3) = (b_1 \otimes b_2) \otimes b_3$，即$\langle B, \otimes \rangle$满足结合律，证毕.

定义 4 可以推广到$\langle A, \oplus_1, \oplus_2, \cdots, \oplus_n \rangle \cong \langle B, \otimes_1, \otimes_2, \cdots, \otimes_n \rangle$，含义是存在一个双射 $f: A \to B$，使得 $\forall a_1, a_2 \in A$，成立 $f(a_1 \oplus_i a_2) = f(a_1) \otimes_i f(a_2)$，$i = 1, 2, \cdots, n$.

定理 5 若$\langle A, \oplus_1, \oplus_2 \rangle \cong \langle B, \otimes_1, \otimes_2 \rangle$，$\langle A, \oplus_1, \oplus_2 \rangle$满足分配律，则$\langle B, \otimes_1, \otimes_2 \rangle$也满足分配律.

分配律是指：$\forall a, b, c \in A$，在$\langle A, \oplus_1, \oplus_2 \rangle$中

(i) $\oplus_1$ 对$\oplus_2$ 的左分配律：$a \oplus_1 (b \oplus_2 c) = (a \oplus_1 b) \oplus_2 (a \oplus_1 c)$；

(ii) $\oplus_1$ 对$\oplus_2$ 的右分配律：$(b \oplus_2 c) \oplus_1 a = (b \oplus_1 a) \oplus_2 (c \oplus_1 a)$；

(iii) $\oplus_2$ 对$\oplus_1$ 的左分配律：$a \oplus_2 (b \oplus_1 c) = (a \oplus_2 b) \oplus_1 (a \oplus_2 c)$；

(iv) $\oplus_2$ 对$\oplus_1$ 的右分配律：$(b \oplus_1 c) \oplus_2 a = (b \oplus_2 a) \oplus_1 (c \oplus_2 a)$.

定理 5 的证明可由定义直接导出，此处从略.

容易证明，若$\langle A, \oplus \rangle \cong \langle B, \otimes \rangle$，代数系统$\langle A, \oplus \rangle$中有交换律，则代数系统$\langle B, \otimes \rangle$中也有交换律；$\langle A, \oplus \rangle$有单位元，则$\langle B, \otimes \rangle$也有单位元；$\langle A, \oplus \rangle$有零元，则$\langle B, \otimes \rangle$中也有零元；$\langle A, \oplus \rangle$中的元素有逆元，则$\langle B, \otimes \rangle$中元素也有逆元.

两个代数系统是同构的，则可以通过代换元素名字和运算符，从一个系统的运算结果得到另一系统的运算结果，一个系统的结

果在另一个系统中有等价的理解.两个同构的代数系统,区别仅仅是双方元素与运算的标志不同,两者的数学结构是完全一致的.

定理 6 代数系统之间的同构关系是等价关系.

证 设$\langle A,\oplus\rangle$,$\langle B,\otimes\rangle$,$\langle C,\circledast\rangle$是三个代数系统.

由于$\langle A,\oplus\rangle\cong\langle A,\oplus\rangle$,所以同构关系$\cong$是自反的.

下证$\cong$是对称的,即如果$\langle A,\oplus\rangle\cong\langle B,\otimes\rangle$,则$\langle B,\otimes\rangle\cong\langle A,\oplus\rangle$.若$\langle A,\oplus\rangle\cong\langle B,\otimes\rangle$,由定义,存在一个双射 $f:A\rightarrow B$,使得$\forall a_1,a_2\in A$,成立

$$f(a_1\oplus a_2)=f(a_1)\otimes f(a_2),\tag{1}$$

由于 f 存在逆映射 $f^{-1}:B\rightarrow A$,使得 $f^{-1}(b_1)=a_1$,$f^{-1}(b_2)=a_2$,其中 $b_1=f(a_1)$,$b_2=f(a_2)$,于是

$$a_1\oplus a_2=f^{-1}(b_1)\oplus f^{-1}(b_2),\tag{2}$$

另一方面又有

$$\begin{aligned}a_1\oplus a_2&=f^{-1}(f(a_1\oplus a_2))\\&=f^{-1}(f(a_1)\otimes f(a_2))=f^{-1}(b_1\otimes b_2),\end{aligned}\tag{3}$$

由(2)与(3)得

$$f^{-1}(b_1)\oplus f^{-1}(b_2)=f^{-1}(b_1\otimes b_2),\tag{4}$$

由 a_1,a_2 的任意性及 f 的一一对应性知f^{-1}是从 B 到 A 的同构映射,$\langle B,\otimes\rangle\cong\langle A,\oplus\rangle$.

最后证$\cong$的传递性,即$\langle A,\oplus\rangle\cong\langle B,\otimes\rangle$,$\langle B,\otimes\rangle\cong\langle C,\circledast\rangle$,则$\langle A,\oplus\rangle\cong\langle C,\circledast\rangle$.

事实上,由$\langle A,\oplus\rangle\cong\langle B,\otimes\rangle$,即存在双射 $f:A\rightarrow B$,使得$\forall a_1,a_2\in A$,成立

$$f(a_1\oplus a_2)=f(a_1)\otimes f(a_2);\tag{5}$$

由$\langle B,\otimes\rangle\cong\langle C,\circledast\rangle$,即存在双射 $g:B\rightarrow C$,使得$\forall b_1,b_2\in B$,成立

$$g(b_1\otimes b_2)=g(b_1)\circledast g(b_2).\tag{6}$$

令 $h=g\circ f$,则 h 是从A 到C 的双射:$h:A\rightarrow C$,

$$h(a_1 \oplus a_2) = gof(a_1 \oplus a_2) = g(f(a_1) \otimes f(a_2))$$
$$= g(f(a_1)) \circledast g(f(a_2))$$
$$= h(a_1) \circledast h(a_2),$$

即$\langle A, \oplus \rangle \cong \langle C, \circledast \rangle$，证毕.

定义 5 设$\langle A, \oplus \rangle$与$\langle B, \oplus \rangle$是两个代数系统，$\oplus$与$\otimes$皆二元运算，若存在映射 $f: A \to B$，使得$\forall a_1, a_2 \in A$，皆有

$$f(a_1 \oplus a_2) = f(a_1) \otimes f(a_2),$$

则称$\langle A, \oplus \rangle$与$\langle B, \otimes \rangle$同态，$f$ 是从$\langle A, \oplus \rangle$到$\langle B, \otimes \rangle$的同态映射，记成$\langle A, \oplus \rangle \backsim \langle B, \otimes \rangle$. □

同构是同态的特殊情形.

根据同态映射 f 是满射还是单射，分别称其为满同态和单同态映射. 既满又单的同态映射则为同构映射. 与同构相似的，同态的概念可以推广成$\langle A, \oplus_1, \oplus_2, \cdots, \oplus_k \rangle \backsim \langle B, \otimes_1, \otimes_2, \cdots, \otimes_k \rangle$，其中$\oplus_i$ 与$\otimes_i$ 皆二元运算，多运算的同态定义为：对 $i = 1, 2, \cdots\cdots, k$，存在映射 $f: A \to B$，使得对$\forall a_1, a_2 \in A$，皆有 $f(a_1 \oplus_i a_2) = f(a_1) \otimes_i f(a_2)$.

从定义出发，可以证明下列定理.

定理 7 若$\langle A, \oplus \rangle \backsim \langle B, \otimes \rangle$，则

(i)若$\langle A, \oplus \rangle$有结合律，则$\langle B, \otimes \rangle$有结合律.

(ii)若$\langle A, \oplus \rangle$有分配律，则$\langle B, \otimes \rangle$有分配律.

定理 8 若$\langle A, \oplus_1, \oplus_2 \rangle \backsim \langle B, \otimes_1, \otimes_2 \rangle$，又$\langle A, \oplus_1, \oplus_2 \rangle$有$\oplus_1$ 对$\oplus_2$ 的左(右)分配律，则$\langle B, \otimes_1, \otimes_2 \rangle$有$\otimes_1$ 对$\otimes_2$ 的左(右)分配律.

值得小心的是，同态没有对称性，只是单向的，所以$\langle A, \oplus \rangle \backsim \langle B, \otimes \rangle$时，$\langle B, \otimes \rangle$有的性质，$\langle A, \oplus \rangle$未必具备. 与同构不同，对于同态，一般只能从$\langle A, \oplus \rangle$的性质得知$\langle B, \otimes \rangle$有该性质，反之则不一定为真.

3.2 群、环、域

3.2.1 群

定义 1 在代数系统$\langle S,\oplus\rangle$中，$\oplus$是二元运算，且$\langle S,\oplus\rangle$上有结合律(可群)，则称$\langle S,\oplus\rangle$是一个半群，如果$\langle S,\oplus\rangle$上还有交换律，则称$\langle S,\oplus\rangle$是交换半群. 若$\langle S,\oplus\rangle$是半群，$\langle S_1,\oplus\rangle$也是群，且 $S_1\subseteq S$，则称$\langle S_1,\oplus\rangle$是$\langle S,\oplus\rangle$的子半群. □

定义 2 $\langle S,\otimes\rangle$是一个半群，存在一个元素 $a\in S$，使得对$\forall b\in S$，可以找到 $n\in\mathbf{N}$，成立 $b=\underbrace{a\otimes a\otimes a\otimes\cdots\otimes a}_{n个a}=a^n$，则称$\langle S,\otimes\rangle$是循环半群，$a$ 称为此循环半群的生成元. □

例如$\langle\mathbf{N},+\rangle$ 是以 1 为生成元的循环半群.

容易证明，循环半群一定是交换半群.

半群有的是含幺(单位元)半群，有的不是. 例如$\langle\mathbf{N},\times\rangle$是含幺半群，幺元是 1；而$\langle\mathbf{E}_+,\times\rangle$是不含幺半群，其中 $\mathbf{E}_+$ 是正偶数集合.

定义 3 代数系统$\langle G,\oplus\rangle$中有结合律，有幺元素，每个元素有逆元素，则称$\langle G,\oplus\rangle$是一个群. 群$\langle G,\oplus\rangle$中有交换律时，称之为阿贝尔群(交换群). $|G|<\infty$时，称群$\langle G,\oplus\rangle$为有限群，否则为无限群，$|G|$称为群$\langle G,\oplus\rangle$的阶数. 若 $H\subseteq G$，$H\neq\varnothing$，$\langle G,\oplus\rangle$是群，$\langle H,\oplus\rangle$也是群，则$\langle H,\oplus\rangle$称为$\langle G,\oplus\rangle$的子群. □

由于 3.1 的定理 1 知群的单位元是唯一的.

定理 1 阶数不小于 2 的群无零元.

证 设$\langle G,\oplus\rangle$是群，$|G|\geqslant 2$，则$\langle G,\oplus\rangle$中含幺元 e. 若$\langle G,\oplus\rangle$中有零元 θ，则 $e\neq\theta$；事实上，若 $\theta=e$，则$\forall x\in G$，成立 $x=e\oplus x=\theta\oplus x=\theta=e$，由 x 的任意性，$G=\{e\}$，与$|G|\geqslant 2$ 相违，可见若 θ 是$\langle G,\oplus\rangle$的零元，则 $e\neq\theta$.

又$\forall x\in G$，$\theta\oplus x=\theta\neq e$，即 θ 无逆元，与 $\theta\in G$ 且$\langle G,\oplus\rangle$是

群相违，证毕.

定理 2(消去律) $\langle G,\otimes\rangle$是群，若 $a,b,c\in G$，且 $a\otimes b=a\otimes c$ 或 $b\otimes a=c\otimes a$，则有 $b=c$.

证 若 $a\otimes b=a\otimes c$，则 $a^{-1}\otimes(a\otimes b)=a^{-1}\otimes(a\otimes c)$，其中 a^{-1}是 a 之逆元，于是有

$$(a^{-1}\otimes a)\otimes b=(a^{-1}\otimes a)\otimes c,\ e\otimes b=e\otimes c,$$

其中 e 是$\langle G,\otimes\rangle$中的幺元，故得 $b=c$.

相似地，若 $b\otimes a=c\otimes a$，则 $b=c$，证毕.

定理 3 若$\langle G,\otimes\rangle$是群，$a,b\in G$，则方程 $a\otimes x=b$ 在$\langle G,\otimes\rangle$中有唯一解.

证 a^{-1}是 a 的逆元，可以验证 $x_0=a^{-1}\otimes b\in G$ 是$a\otimes x=b$ 的解：

$$a\otimes x_0=a\otimes(a^{-1}\otimes b)=(a\otimes a^{-1})\otimes b=b.$$

若除了 x_0 外，还有一解 $x_1\in G$，即 $a\otimes x_1=b$，$a\otimes x_0=b$，从而 $a\otimes x_1=a\otimes x_0$，于是

$$a^{-1}\otimes(a\otimes x_1)=a^{-1}\otimes(a\otimes x_0),$$
$$(a^{-1}\otimes a)\otimes x_1=(a^{-1}\otimes a)\otimes x_0,$$
$$x_1=x_0,$$

证毕.

定理 4 在群$\langle G,\otimes\rangle$中，$\forall a,b\in G$，有结论：

(i) $(a^{-1})^{-1}=a$ (负负得正)，

(ii) $(a\otimes b)^{-1}=b^{-1}\otimes a^{-1}$ (脱衣律).

证 (i) 由于 $(a^{-1})^{-1}\otimes a^{-1}=e=a\otimes a^{-1}$，由定得 2，$(a^{-1})^{-1}=a$.

(ii) $$(a\otimes b)\otimes(b^{-1}\otimes a^{-1})=a\otimes(b\otimes b^{-1})\otimes a^{-1}$$
$$=a\otimes a^{-1}=e,$$

其中 e 是幺元.

$$(b^{-1}\otimes a^{-1})\otimes(a\otimes b)=b^{-1}\otimes(a^{-1}\otimes a)\otimes b=e,$$

由逆元定义及其唯一性，$a\otimes b$ 的逆元是 $b^{-1}\otimes a^{-1}$，证毕.

定理 4(ii)可以推广成

$$(x_1\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_n)^{-1}=x_n^{-1}\otimes x_{n-1}^{-1}\otimes\cdots\otimes x_2^{-1}\otimes x_1^{-1},$$

其中 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$是群$\langle G,\otimes\rangle$中元素. x 们的排序左右正相反，犹如脱衣，先穿上的后脱，所以称为脱衣律.

3.2.2 环

定义 4 $\oplus$与$\otimes$是二元运算的代数系统$\langle R,\oplus,\otimes\rangle$，满足

(i) $\langle G,\oplus\rangle$是交换群；

(ii) $\langle R,\otimes\rangle$是半群；

(iii) $\otimes$对$\oplus$有分配律：$\forall a,b,c\in R$，

$$a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c),$$
$$(b\oplus c)\otimes a=(b\otimes a)\oplus(c\otimes a),$$

则称$\langle R,\oplus,\otimes\rangle$是环.

若$\langle R,\otimes\rangle$是含幺半群，则称$\langle R,\oplus,\otimes\rangle$是含幺环；若$\langle R,\otimes\rangle$是交换半群，则称$\langle R,\oplus,\otimes\rangle$是交换环. □

按数学界的约定俗成，在环中，运算$\oplus$与$\otimes$用 + 与 × 表示，交换群$\langle R,+\rangle$的单位元记成 0，$a\in R$ 的逆元记成 $-a$，$na=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n个a}$，含幺环中的半群$\langle R,\times\rangle$的单位元记成 1.

例如在算术的意义下的 + 与 ×，$\langle \mathbf{R},+,\times\rangle$，$\langle \mathbf{C},+,\times\rangle$，$\langle Q,+,\times\rangle$都是环，其中 **C** 是复数集，$Q$ 是有理数集，它们是三个数环.

容易证明，若$\langle R,+,\times\rangle$是一个含幺环，则下列算术成立：

(i) $a\times 0=0\times a=0$,

(ii) $a\times(-b)=(-a)\times b=-(a\times b)$,

(iii) $(-a)\times(-b)=a\times b$,

(iv) $a\times(b-c)=a\times b-a\times c$,

(v) $(b-c)\times a=b\times a-c\times a$.

其中 $a+(-b)$记成 $a-b$.

定义 5 若$\langle R,+,\times\rangle$是含1的交换环，且$\langle R,+,\times\rangle$中无零因子，即$\forall a,b\in R$，若$a\neq 0, b\neq 0$，成立$a\times b\neq 0$，则称$\langle R,+,\times\rangle$是整环.□

例如环$\langle \mathbf{I},+,\times\rangle$中，$\mathbf{I}$表示整数集合，$\langle \mathbf{I},+,\times\rangle$称为整数环，显然整数环是一个整环，也有非整环，例如环$\langle A_{2\times 2},+,\times\rangle$中，$A_{2\times 2}$是二阶方阵集合，+与×分别是矩阵的+与×，$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$是幺元素，$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$是交换群$\langle A_{2\times 2},+\rangle$的单位元，$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\triangleq 1$，$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\triangleq 0$，$a=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$是$A_{2\times 2}$中两个非0元素，而$a\times b=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0$，所以$\langle A_{2\times 2},+,\times\rangle$不是整环.

定理 5 整环中有消去律.

证 若$a,b,c\in\langle R,+,\times\rangle$，$\langle R,+,\times\rangle$是整环，又$a\times b=a\times c$，则有

$0=a\times b-a\times c=a\times(b-c)$，若$a\neq 0$，如果$b-c\neq 0$，由整环定义，$a\times(b-c)\neq 0$，与$a\times(b-c)=0$相违，所以$b-c=0$，$b=c$，即有左消去律.由于×有交换律，若$b\times a=c\times a$，则有$a\times b=a\times c$，从而$b=c$，即有右消去律，证毕.

3.2.3 域

定义 6 设$\langle R,+,\times\rangle$是环，而$\langle R-\{0\},\times\rangle$是交换群，则称$\langle R,+,\times\rangle$为域；若$|R|<\infty$，则称其为有限域.□

例如数环$\langle \mathbf{Q},+,\times\rangle$，$\langle \mathbf{R},+,\times\rangle$，$\langle \mathbf{C},+,\times\rangle$都是域；而$\langle \mathbf{I},+,\times\rangle$不是域.事实上，$\langle \mathbf{I}-\{0\},\times\rangle$不是群，例如$2\in\mathbf{I}-\{0\}$，但2在$\langle \mathbf{I}-\{0\},\times\rangle$中无逆元.这是一个整环非域的例子.

定理 6 域为整环.

证 设$\langle R,+,\times\rangle$是一个域，对$\forall a,b,c\in R$，$a\neq 0$时，若$a\times b=a\times c$，则有

$$b = 1 \times b = (a^{-1} \times a) \times b = a^{-1} \times (a \times b)$$
$$= a^{-1} \times (a \times c) = (a^{-1} \times a) \times c = c,$$

即左消去律成立；考虑 $a \times b = 0, a \neq 0$ 时，有 $a \times b = a \times 0$，由消去律，得 $b = 0$，可见 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 时，$a \times b \neq 0$，所以 $\langle R, +, \times \rangle$ 是整环，证毕.

定理 7 有限整环是域.

证 设 $\langle R, +, \times \rangle$ 是有限整环，$R = \{r_0, r_1, \cdots r_n\}$，不妨设 $r_0 = 0, r_1 = 1$. 考虑 $R - \{0\} = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$，只欠证 $\langle R - \{0\}, \times \rangle$ 的每个元素有逆元. $\forall r_i \in \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$，则 $\{r_i \times r_0, r_i \times r_1, \cdots, r_i \times r_n\} \subseteq R$，由整环中的消去律，$l \neq k$ 时，$r_i \times r_k \neq r_i \times r_l$，即 $\{r_i \times r_0, r_i \times r_1, \cdots, r_i \times r_n\}$ 的元素互异，故 $\{r_i \times r_0, r_i \times r_1, \cdots, r_i \times r_n\} = R$，于是存在 r_j，使得 $r_i \times r_j = 1$，即 r_j 是 r_i 的逆元，证毕.

下面讨论一个叫做“模 n 同余类环”的重要环.

令 $[i]$ 是在模 n 之下与 i 同余的整数组成的集合，集合 $Z_n = \{[0], [1], [2], \cdots, [n-1]\}$. 在 Z_n 上规定“十法”：$[i], [j] \in Z_n$，则 $[i] + [j] = [i + j]$，在 Z_n 上规定“$\times$法”：$[i] \times [j] = [i \times j]$，$[\cdots]$ 中的 $+$ 与 $\times$ 是算术意义上的普通 $+$ 与 $\times$，于是由定义可知，$\langle Z_n, + \rangle$ 是交换群，$\langle Z_n, \times \rangle$ 是半群，$\times$ 对 $+$ 满足左、右分配律，对 $\langle Z_n, \times \rangle$ 而言，$[0]$ 是单位元，$[-i]$ 是 $[i]$ 的逆元，所以 $\langle Z_n, +, \times \rangle$ 是环，它称为模 n 同余类环. 又 $[1]$ 是 $\langle Z_n, \times \rangle$ 的单位元，且 $\langle Zn, \times \rangle$ 是可交换的，所以 $\langle Z_n, +, \times \rangle$ 是含幺交换环.

定理 8 $\langle Z_n, +, \times \rangle$ 是域的充要条件是 n 是素数.

证 已知 $\langle Z_n, +, \times \rangle$ 是含幺 $[1]$ 的交换环，下证 n 是素数时，$\langle Z_n, +, \times \rangle$ 是有限整环. 若 $[a] \neq [0]$，而 $[a] \times [b] = [0]$，那么 $[a \times b] = [0]$，即 $n \mid a \times b$，而 $a \nmid n$，（这里是 $\forall [a], [b] \in Z_n$），所以 $b \mid n$，即 $[b] = [0]$，可见 $\langle Z_n, +, \times \rangle$ 是有限整环，由定理 7，知 $\langle Z_n, +, \times \rangle$ 是域.

若 $\langle Z_n, +, \times \rangle$ 是域，而 n 不是素数，则 $n = a \times b, 0 < a < n, 0 < b < n$，于是

$$[a]\times[b]=[a\times b]=[n]=[0], \tag{1}$$

但这时$[a]\neq[0]$,$[b]\neq[0]$,,又由于$\langle Z_n,+,\times\rangle$是域,由定理6,$\langle Z_n,+,\times\rangle$是整环,由整环定义,$[a]\neq 0$,$[b]\neq 0$时,$[a]\times[b]$应不为$[0]$,此与(1)矛盾,故知$n$是素数,证毕.

通常,把域$\langle Z_n,+,\times\rangle$简记为$GF(n)$或$F(n)$.例如$F(2)$即$\langle\{[0],[1]\},+,\times\rangle$,俗称0-1二元域.

域$\langle Z_n,+,\times\rangle$的概念可以发展成伽洛瓦(Golois)域$GF[n^m]$.

考虑$m-1$次多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{m-1}x^{m-1},$$

这种多项式共计n^m个(向量$(a_0,a_1,\cdots,a_{m-1})$的个数),$a_i\in Z_n$,$i=0,1,\cdots,m-1$.令n是素数,系数取自Z_n的多项式集合记成$GF[n,x]$.

若$q(x)$是$GF[n,x]$中的一个多项式,且$q(x)$不能表成$GF[n,x]$中两个次数不低于1的多项式之积,则在$\bmod q(x)$意义下,$GF[n,x]$划分成若干同余类,这些同余类为元素的集合记成$GF[n,q(x)]$,则关于+与×,$GF[n,q(x)]$构成元素个数为n^m的一个域,其中m是$q(x)$的次数,此域即为伽洛瓦域$GF[n^m]$.

习题一

1. 在$\mathbf{R}$上定义$\oplus$与$\otimes$如下:

$$\forall r_1,r_2\in\mathbf{R}, r_1\oplus r_2=r_1+r_2-r_1r_2, r_1\otimes r_2=\frac{1}{2}(r_1+r_2),$$

$\oplus$与$\otimes$是否满足结合律?

2. 代数系统$\langle\mathbf{N},\times\rangle$与$\langle\{0,1\},\times\rangle$中,×是普通的乘法,定义映射$h:\mathbf{N}\to\{0,1\}$如下

$$h(n)=\begin{cases}1, & n=2^k, k\geqslant 0,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

则$\langle \mathbf{N}, \times \rangle \backsim \langle \{0,1\}, \times \rangle$，$h$ 是其同态映射.

3. 举出两组同态但不同构的实例.

4. 证明：若$\langle A, \oplus \rangle \backsim \langle B, \otimes \rangle$，$\langle A, \oplus \rangle$有结合律与交换律，则$\langle B, \otimes \rangle$也有结合律与交换律.

5. $\langle \mathbf{C}, +, \times \rangle$是一个代数系统，$\mathbf{C}$ 是复数集合，$+$ 与 $\times$ 是普通的加法与乘法；$\langle M, \oplus, \otimes \rangle$是另一代数系统，其中

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R} \right\},$$

$\oplus$与$\otimes$分别是矩阵的加法与乘法，则

$$\langle \mathbf{C}, +, \times \rangle \cong \langle M, \oplus, \otimes \rangle.$$

6. 设$\oplus$与$\otimes$是二元运算，f_1, f_2 是从$\langle S_1, \oplus \rangle$到$\langle S_2, \otimes \rangle$的同态映射，$\otimes$是可交换和可结合的，令 $h: S_1 \to S_2$，使得 $\forall x \in S_1$，有 $h(x) = f_1(x) \otimes f_2(x)$，试证：$h$ 是$\langle S_1, \oplus \rangle$到$\langle S_2, \otimes \rangle$的同态映射.

7. 证明或反驳：$\langle \mathbf{R} - \{0\}, \times \rangle \cong \langle \mathbf{R}, + \rangle$，其中 $\times$ 与 $+$ 是普通的乘法与加法.

8. 设 $G = \mathbf{Q} - \{1\}$，$\mathbf{Q}$ 是有理数集，在 G 上定义二元运算$\otimes$：$a \otimes b = a + b - ab$，证明：$\langle G, \otimes \rangle$是群，而$\langle \mathbf{Q}, \otimes \rangle$不是群.

9. $\langle G, \otimes \rangle$是群，$\forall a, b \in G$，有$(a \otimes b)^2 = a^2 \otimes b^2$，则$\langle G, \otimes \rangle$是交换群.

10. $\mathbf{I}$ 是整数集合，$\langle \mathbf{I}, + \rangle$是群（名整数加群），则$\langle H, + \rangle$是$\langle \mathbf{I}, + \rangle$是子群，其中 $H = \{3k \mid k \in \mathbf{I}\}$.

11. 证明：$A = \{-1, 1\}$在乘法运算下是一个群.

12. $f_1(x) = x$，　　$f_2(x) = \dfrac{1}{x}$，

$f_3(x) = 1 - x$，　　$f_4(x) = (1 - x)^{-1}$，

$f_5 = (x - 1)x^{-1}$，　　$f_6(x) = x(x - 1)^{-1}$，

令 $F = \{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_6\}$，$f_i$ 的定义域为 $\mathbf{R} - \{0, 1\}$，规定$\otimes$是函数的复合运算，证明$\langle F, \otimes \rangle$是一个群.

13. 证明:$\langle G,\otimes\rangle$是一个群,其中 $G=\{0,1,2,3\}$,$\oplus$是 mod4 意义下的加法.

14. 下列代数系统$\langle S,\oplus\rangle$,哪些是群? 是群者,是否 Abel 群? 并指出其单位元和如何求逆元.

(1)$S=\{z\mid |z|=1, z\in\mathbf{C}\}$,$\oplus$是普通复数加法.

(2)$S=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$,$\oplus$是普通加法.

(3)$S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$,$\oplus$是矩阵乘法.

15. $\langle G,\otimes\rangle$是群,$\forall a\in G$,$a\otimes a=a^2=e$,则$\langle G,\otimes\rangle$是 Abel 群,其中 e 是单位元.

16. $S=\mathbf{R}-\{-1\}$,定义 S 上的二元运算$\otimes$为 $a\otimes b=a+b+ab$,在 S 中求方程 $2\otimes x\otimes 3=7$ 的解.

17. 证明:整数加群与偶数加群同构.

18. 下列代数系统,哪些是环? 哪些是整环? 哪些是域?

(1)$\langle\mathbf{I}\times\mathbf{I},+,\times\rangle$,其中 $\mathbf{I}$ 是整数集合,+与×分别是对 $\mathbf{I}\times\mathbf{I}$ 中元素分量的加法与乘法.

(2)$\langle 2\mathbf{I}\times\mathbf{I},+,\times\rangle$,+,×同(1).

(3)$\langle\mathbf{R},+,\times\rangle$,+是普通加法,×定义成 $a\times b=|a|b$.

(4)$\langle\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{I}\},+,\times\rangle$.

(5)$\langle\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbf{Q}\},+,\times\rangle$.

19. $f:\mathbf{I}\times\mathbf{I}\to\mathbf{I}$,$f(a,b)=a$,证明:$f$ 是从环$\langle\mathbf{I}\times\mathbf{I},+,\cdot\rangle$到环$\langle\mathbf{I},+,\times\rangle$的同态映射.

20. 代数系统$\langle\{a,b\},+,\times\rangle$运算规则如下:

$a+a=a, a+b=b, b+a=b, b+b=a$;

$a\times a=a, a\times b=a, b\times a=a, b\times b=b$,

求证$\langle\{a,b\},+,\times\rangle$是域.

21. 设$\langle R,+,\times\rangle$是含幺环,$H=\{a\mid a^{-1}\in R\}$,则$\langle H,\times\rangle$是

一个群.

22.$\langle R,+,\times\rangle$是环，$\forall a,b\in R$，定义$\oplus$：$a\oplus b=a+b+1$；定义$\otimes$：$a\otimes b=a\times b+a+b$，则$\langle R,\oplus,\otimes\rangle$也是环，且$\langle R,+,\times\rangle\cong\langle R,\oplus,\otimes\rangle$.

23. 设$\langle A,+,\times\rangle$是含幺环，$\forall a\in A$，若$a\times a=a$，则称$\langle A,+,\times\rangle$是布尔环. 试证：布尔环$\langle A,+,\times\rangle$有三个以上元素时，则$\langle A,+,\times\rangle$不是整环.

24. 设$\langle F,+,\times\rangle$是域，$S_1\subseteq F$，$S_2\subsetneq F$，且$\langle S_1,+,\times\rangle$与$\langle S_2,+,\times\rangle$都是域，则$\langle S_1\cap S_2,+,\times\rangle$也是域.

25.$C([a,b])$表示闭区间$[a,b]$上定义的连通函数集合，则$\langle C([a,b]),+,\times\rangle$是环，$+,\times$是数学分析中的函数加法与乘法.

3.3 置换群与循环群

3.3.1 置换

定义 1 A是有限集，$\sigma:A\to A$，且σ是双射，则称σ为A中的置换. $|A|=n$时，σ称为n元置换. 若$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则σ表成

$$\sigma=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ \sigma(a_1) & \sigma(a_1) & \cdots & \sigma(a_n)\end{pmatrix}, \tag{1}$$

当$\sigma(a_i)=a_i$时，$i=1,2,\cdots,n$，σ称为恒同置换. □

σ是置换，$\sigma:A\to A$，则σ有逆映射$\sigma^{-1}:A\to A$.

用a_i的脚标i表示a_i，则置换(1)可以简写成：

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}. \tag{2}$$

由于σ^{-1}也是置换，所以σ^{-1}也应写成(2)的形式，其“上层”仍写作1 2 … n，下层依次写σ^{-1}下的对应元素.

例如$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$，其中$\sigma(1)=2,\sigma(2)=5$，等等.

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}2&5&1&4&3\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&4&2\end{pmatrix}.$$

由于置换的一一对应性，若 σ_1,σ_2 皆 A 上的置换，则复合映射 $\sigma_1\circ\sigma_2$ 也是 A 上的置换.

A 上的两上置换 σ_1 与 σ_2 的复合 $\sigma_1\circ\sigma_2$ 称为 σ_1 与 σ_2 之积. $\sigma_1\circ\sigma_2$ 未必等于 $\sigma_2\circ\sigma_1$. 例如

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix},\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},$$

$$\sigma_1\circ\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix},$$

$$\sigma_2\circ\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix},$$

此处 $\sigma_1\circ\sigma_2\neq\sigma_2\circ\sigma_1$.

定义 2 σ 是 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的置换，$a_1,a_2,\cdots,a_r(1\leqslant r\leqslant n)$ 是 A 中的 r 个不同元素，而且 $\sigma(a_r)=a_{i+1},i=1,2,\cdots,r-1,\sigma(a_r)=a_1,A-\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$ 中的元素皆 σ 的不动点，则称 σ 是 A 上长 r 的一个轮换，记成 $\sigma=(a_1a_2\cdots a_r)$，且称 $a_1,a_2,\cdots a_r$ 是轮换 σ 的移动元素；$r=2$ 时，相应的轮换 $\sigma=(a_1a_2)$ 称为对换. □

显然，

$$\begin{aligned}(a_1a_2\cdots a_r)&=(a_2a_3\cdots a_ra_1)=(a_3a_4\cdots a_ra_1a_2)\\&=\cdots\cdots=(a_ra_1a_2\cdots a_{r-1}).\end{aligned}$$

置换与轮换有生动的图论意义. 设 σ 是 $V=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的一个置换，仅当 $\sigma(i)=j$ 时，以 i 为尾以 j 为头连一有向边，形成的有向图 G 称为置换图；不难证明，置换图是若干两两无公共顶的有向圈(含有向环)并成的，当且仅当 σ 是轮换时，置换图 G 中有唯一的长大于 1 的有向圈，此有向圈称为轮换圈.

对于 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，两个轮换 $(a_1a_2\cdots a_{r_1})$ 与 $(a'_1a'_2\cdots a'_{r_2})$ 满足 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{r_1}\}\cap\{a'_1,a'_2,\cdots,a'_{r_2}\}=\varnothing$，则称这两个

轮换是独立(不相交)的.

由置换图可知下面定理成立.

定理 1 任何非恒同置换可以唯一地表成若干个独立轮换之积.

例如 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15\\4&3&7&5&6&9&8&2&1&12&11&13&10&15&14\end{pmatrix}$, σ 的置换图见图 3.1.

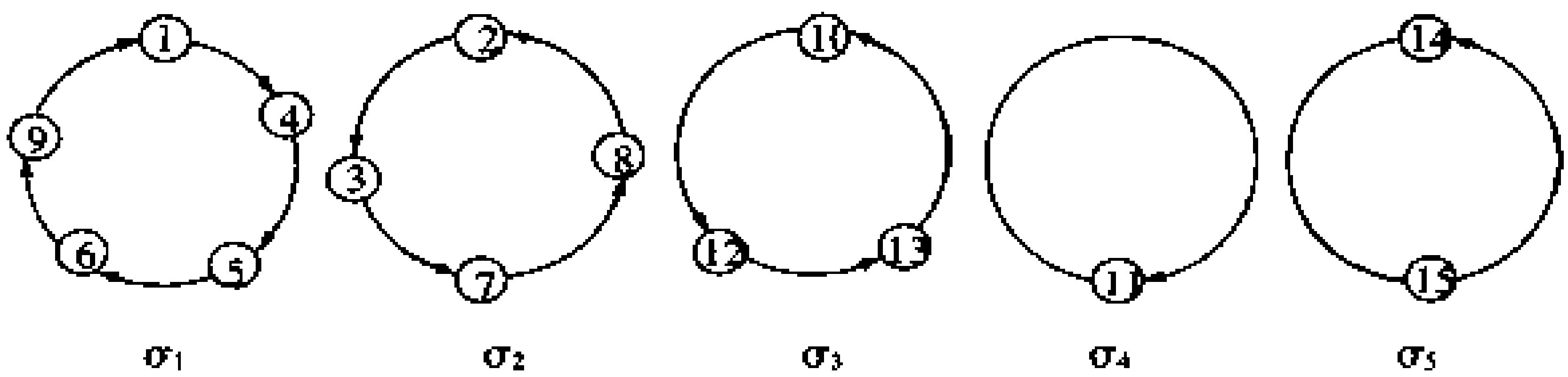


图 3.1

图 3.1 中 $\sigma_1=(1\ 4\ 5\ 6\ 9)$, $\sigma_2=(2\ 3\ 4\ 8)$, $\sigma_3=(10\ 12\ 13)$, $\sigma_4=(11\ 11)$, $\sigma_5=(14\ 15)$.

$$\sigma=\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3\circ\sigma_4\circ\sigma_5, \tag{1}$$

其中 11 是 σ 是不动点,用 $\sigma_4=(11\ 11)$形式地表成了轮换.(1)式右端之积有交换律,(1)的右端的轮换的抄写顺序可以任意,在这种意义下,(1)的表达是唯一的,例如认为 $\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3\circ\sigma_4\circ\sigma_5$ 与 $\sigma_2\circ\sigma_3\circ\sigma_1\circ\sigma_4\circ\sigma_5$ 是一样的.

设 $\sigma=(a_1a_2\cdots a_r)$是一个轮换,由于

$(a_1a_2\cdots a_r)=(a_1a_r)(a_1a_{r-1})(a_1a_{r-2})\cdots(a_1a_3)(a_1a_2)$,所以有结论:

定理 2 任何轮换可以表示成若干对换之积.

由定理 1 与定理 2,每一个置换可以表示成若干个对换之积,但表示未必唯一.例如

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&3&1\end{pmatrix}=(1\ 5)(1\ 2)(3\ 4)$$

$$=(1\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(2\ 4)(1\ 4).$$

定义 3 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$中，$\sigma(1)\quad\sigma(2)\cdots\sigma(n)$的逆序（$\sigma(i)>\sigma(j)$，$i<j$）的个数为奇数时，称 σ 为奇置换，否则为偶置换.□

例如 $\sigma=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\ 2\,5\,4\,3\,1\end{pmatrix}$中有 7 个逆序；

对换 $(i\ j)=\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\cdots i-1\ i\ i+1\cdots j-1\ j\ j+1\cdots n\\ 1\ 2\ 3\cdots i-1\ j\ i+1\cdots j-1\ i\ j+1\cdots n\end{pmatrix}$中的逆序有 $2(j-i)-1$ 个，所以对换皆奇置换.

设 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & & \sigma(n)\end{pmatrix}$，则

$\sigma(i\ i+1)=$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & i & i+1 & i+2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \sigma(i+2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix},$$

由于 $\sigma(i)$与 $\sigma(i+1)$的位置对换，使 $\sigma(i\ i+1)$的逆序与 σ 的逆序的奇偶性相异.而形如$(i\ j)(i<j)$的任一对换可表成

$$(i\ j)=(i\ i+1)(i+1\ i+2)\cdots(j-1\ j)(j-2\ j-1)\cdots(i\ i+1),$$

所以 $\sigma(i\ j)$的奇偶性是 σ 的奇偶性改变 $2(j-i)-1$ 次.

由上述论证知定义 3 等价于下面的定义：

定义 3′ n 元置换可以表成奇数个对换之积者称为奇置换，否则为偶置换.□

定理 3 n 元置换的集合由 $n!$ 个置换组成，其中一半是奇置换.

证 n 元置换即$\{1,2,\cdots,n\}$的全排列，所以 n 元置换的集合 Σ 有 $n!$ 个元素. 令 Σ_1 是 n 元奇置换集，Σ_2 是 n 元偶置换集，则 $\Sigma_1\cap\Sigma_2=\varnothing$，$\Sigma_1\cup\Sigma_2=\Sigma$. 定义 $f:\Sigma_2\to\Sigma_1$ 为 $\forall\sigma\in\Sigma_2$，$f(\sigma)=\sigma(12)$. 那么 $\forall\sigma'\in\Sigma_1\quad\sigma'(12)\in\Sigma_2$，$f(\sigma'(12))=\sigma'(12)(12)=\sigma'$，即 $\sigma'(12)$是 σ' 的原象，可见 f 是Σ_2到 Σ_1 的满

映射. $\forall \sigma_1,\sigma_2 \in \Sigma_2$,若$\sigma_1$与$\sigma_2$皆$\sigma' \in \Sigma_1$的原象,则$f(\sigma_1)=\sigma'$, $f(\sigma_2)=\sigma'$,而 $f(\sigma_1)=\sigma_1(12)$, $f(\sigma_2)=\sigma_2(12)$,故 $\sigma_1(12)=\sigma_2(12)=\sigma'$,得$\sigma_1=\sigma_2$,所以$f$是$\Sigma_2$到$\Sigma_1$的一一对应关系,可见 $|\Sigma_1|=|\Sigma_2|=\frac{1}{2}n!$,证毕.

3.3.2 置换群与循环群

定义 4 设 Σ 是$A=\{1,2,\cdots,n\}$上的置换为元素构成的集合,代数系统$\langle\Sigma,\circ\rangle$中,$\circ$是置换的复合运算(即置换乘法),且令恒同置换为$\langle\Sigma,\circ\rangle$的单位元,$\sigma\in\Sigma$,则逆置换$\sigma^{-1}$是$\sigma$的逆元素,又$\Sigma$中有结合律,于是$\langle\Sigma,\circ\rangle$是一个群,此群称为$n$次对称群,记成$S_n$.对称群的子群称为置换群.□

例 1 △①②③是等边三角形,h_1,h_2,h_3是它的三条高,见图3.2,中心为O,绕中心O旋转0°,120°,240°得到三种重合的姿态,以三条高为轴,翻转得三种重合的姿态,这六个动作可以分别用6阶3次对称群来表示如下:

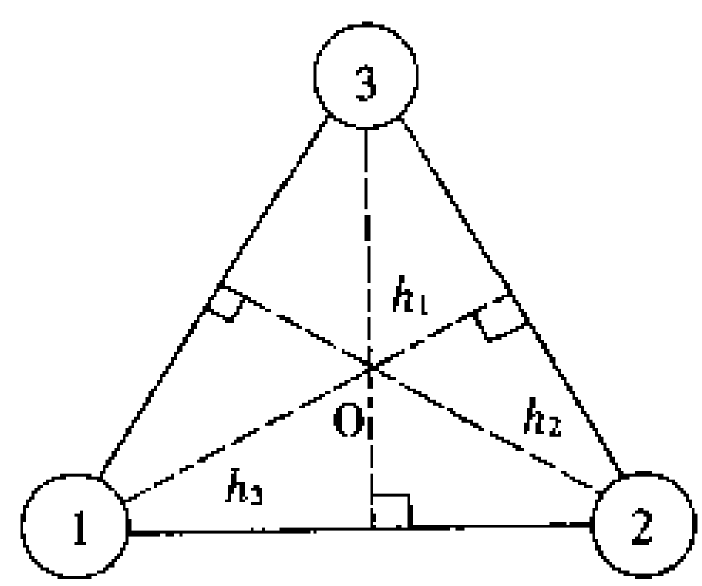


图 3.2

旋转 0°: $\rho_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$,

旋转 120°: $\rho_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3)$,

旋转 240°: $\rho_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2)$,

以 h_3 为轴翻: $\mu_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1\ 2)$,

以 h_2 为轴翻: $\mu_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(1\ 3)$,

以 h_3 为轴翻：$\mu_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(2\ 3)$.

以上用置换表达的六种姿态恰为 $A=\{1,2,3\}$ 的全体置换.

$\langle D_3,\circ\rangle$是一个对称群，"$\circ$"是运动的复合(合成)运动，由此(图 3.2)可以领会对称群名字中对群二字的背景，当然$\langle D_3,\circ\rangle$也是一个置换群，其中 $D_3=\{\rho_0,\rho_1,\rho_2,\mu_1,\mu_2,\mu_3\}$.

D_3 中运动合成矩阵如下.

$$\begin{array}{c} \\ \rho_0\\ \rho_1\\ \rho_2\\ \mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}\rho_0&\rho_1&\rho_2&\mu_1&\mu_2&\mu_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}\rho_0&\rho_1&\rho_2&\mu_1&\mu_2&\mu_3\\ \rho_1&\rho_2&\rho_0&\mu_2&\mu_3&\mu_1\\ \rho_2&\rho_0&\rho_1&\mu_3&\mu_1&\mu_2\\ \mu_1&\mu_3&\mu_2&\rho_0&\rho_2&\rho_1\\ \mu_2&\mu_1&\mu_3&\rho_1&\rho_0&\rho_2\\ \mu_3&\mu_2&\mu_1&\rho_2&\rho_1&\rho_0\end{pmatrix}\end{array},$$

例如第 5 行第 6 列交汇处为$\mu_2\circ\mu_3=\rho_2$，而第 6 行第 5 列汇会处为$\rho_1=\mu_3\circ\mu_2$，可见置换群与对称群未必是 Abel 群.

例 2　正方形□①②③④，绕中心 O 旋转 0°，90°，180°，270°的动作分别为$\rho_0,\rho_1,\rho_2,\rho_3$；4 条对称轴分别为 l_1,l_2,l_3,l_4，绕 l_1,l_2,l_3,l_4 翻转 180°的动作分别是μ_1,μ_2,μ_3,μ_4，共得 8 个姿态，见图 3.3. 则 $D_4=\{\rho_0,\rho_1,\rho_2,\rho_3,\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4\}$在合成运算(运动)之下构成一个置换群.

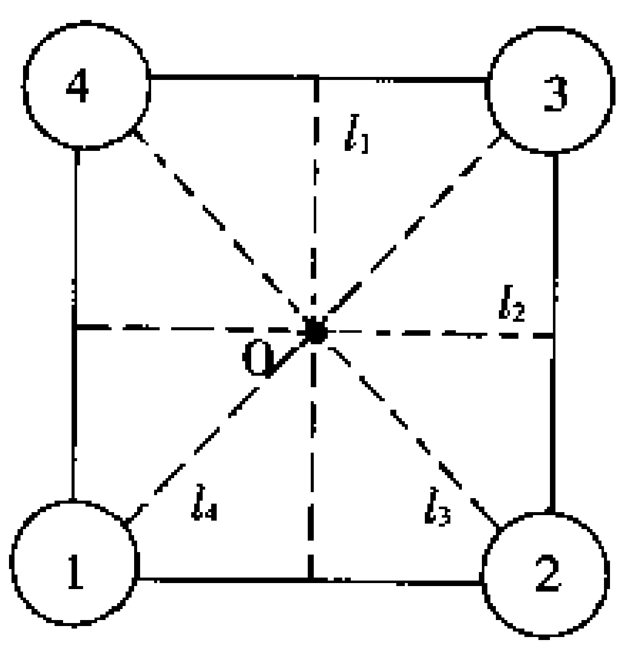


图 3.3

D_4 中各元素用置换表达如下：

$\rho_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$，　　$\rho_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3\ 4)$，

$$\rho_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=(1\ 3)(2\ 4),\quad \rho_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=(1\ 4\ 3\ 2),$$
$$\mu_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=(1\ 2)(3\ 4),\quad \mu_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=(1\ 4)(2\ 3),$$
$$\mu_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}=(1\ 3),\qquad \mu_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=(3\ 4).$$

代数系统$\langle D_4,\circ\rangle$中,$\circ$是合成运算,因为 D_4 中元素是置换,所以满足结合律,$\langle D_4,\circ\rangle$的运算矩阵如下:

$$\begin{array}{c}\\ \rho_0\\ \rho_1\\ \rho_2\\ \rho_3\\ \mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\\ \mu_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}\rho_0&\rho_1&\rho_2&\rho_3&\mu_1&\mu_2&\mu_3&\mu_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}\rho_0&\rho_1&\rho_2&\rho_3&\mu_1&\mu_2&\mu_3&\mu_4\\ \rho_1&\rho_2&\rho_3&\rho_0&\mu_3&\mu_4&\mu_2&\mu_1\\ \rho_2&\rho_3&\rho_0&\rho_1&\mu_2&\mu_1&\mu_4&\mu_3\\ \rho_3&\rho_0&\rho_1&\rho_2&\mu_4&\mu_3&\mu_2&\mu_1\\ \mu_1&\mu_4&\mu_2&\mu_3&\rho_0&\rho_2&\rho_3&\rho_1\\ \mu_2&\mu_3&\mu_1&\mu_4&\rho_2&\rho_0&\rho_1&\rho_3\\ \mu_3&\mu_1&\mu_4&\mu_2&\rho_1&\rho_3&\rho_0&\rho_2\\ \mu_4&\mu_2&\mu_3&\mu_1&\rho_3&\rho_1&\rho_2&\rho_0\end{bmatrix}\end{array}.$$

可见$\langle D_4,\circ\rangle$是一个代数系统. ρ_0 是$\langle D_4,\circ\rangle$中的单位元;$\rho_0^{-1}=\rho_0,\rho_1^{-1}=\rho_3,\rho_2^{-1}=\rho_2,\rho_3^{-1}=\rho_1,\mu_1^{-1}=\mu_1,\mu_2^{-1}=\mu_2,\mu_3^{-1}=\mu_3$, $\mu_4^{-1}=\mu_4$,由群的定义,$\langle D_4,\circ\rangle$是群,又 $D_3\subset\Sigma$,$\langle\Sigma,\circ\rangle$是 4 次对称群,所以$\langle D_4,\circ\rangle$是 8 阶置换群,$\langle D_4,\circ\rangle$是对称群$\langle\Sigma,\circ\rangle$的真子群.

定理 4 每个有限群都与某个置换群同构.

证 设$\langle G,\oplus\rangle$是任给定的一个有限群,令

$$G'=\{f_a\mid a\in G,f_a:G\to G,f_a(x)=a\otimes x\}.$$

显然,f_a 是G 到自身的双射. 在 G'上定义运算$\circledast$如下:$f_a\circledast f_b=f_{a\otimes b}$,于是$\circledast$在 G'中封闭且满足结合律. 又 f_e(e 是$\langle G,\otimes\rangle$的单位元)是$\langle G',\circledast\rangle$的单位元,$f_{a^{-1}}$是 f_a 的逆元,所以$\langle G',\circledast\rangle$是群.

而且是对称群的子群，所以$\langle G',\circledast\rangle$是置换群. 下证$\langle G',\otimes\rangle\cong\langle G',\circledast\rangle$.

定义$h:G\to G'$为$h(a)=f_a$，则h是双射，$\forall a,b\in G$，有

$$h(a\otimes b)=f_{a\otimes b}=f_a\circledast f_b=h(a)\circledast h(b),$$

所以h是同构映射，故$\langle G,\otimes\rangle\cong\langle G',\circledast\rangle$，证毕.

定义 5 设$\langle G,\otimes\rangle$是群，存在$g\in G$，使得任取定$a\in G$，可以找到$n\in\mathbf{I}$，$a=g^n$，则称$\langle G,\otimes\rangle$是一个循环群，g是这个循环群的生成元，简写成$\langle G,\otimes\rangle=\langle g\rangle$. □

定理 5 循环群的子群是循环群.

证 设$\langle G,\otimes\rangle=\langle g\rangle$是一个循环群，$\langle H,\otimes\rangle$是$\langle G,\otimes\rangle$的子群，若$H=\{e\}$，则$\langle H,\otimes\rangle=\langle e\rangle$，$\langle H,\otimes\rangle$是循环群，其中$e$是$\langle G,\otimes\rangle$是幺元. 若$H\neq\{e\}$，对每个$a\in H$，$a\neq e$，由于$\langle H,\otimes\rangle$是$\langle G,\otimes\rangle$的子群，$H\subseteq G$，而$\langle G,\otimes\rangle=\langle g\rangle$，故存在$l\in\mathbf{I}$，使得$a=g^l$；设$m$是使$g^m\in H$的最小正整数，$\forall b\in H$，$b\in G$，故$b=g^n$，$n\in\mathbf{N}$. 令$n=mu+v$，$0\leqslant v\leqslant m$，于是

$$b=g^n=g^{mu+v}=(g^m)^u\otimes g^v,$$

从而得

$$g_v=g^n\otimes(g^m)^{-u}.$$

由$b=g^n\in H$，$g^m\in H$，$\langle H,\otimes\rangle$是群，则$(g^m)^{-u}\in H$，从而$g^v\in H$，若$v>0$，与$g^m\in H$且m最小矛盾，所以$v=0$，即$b=(g^m)^u$，于是$\langle H,\otimes\rangle$中每元素皆可表成g^m的幂，从而g^m是子群$\langle H,\otimes\rangle$的生成元，$\langle H,\otimes\rangle$是循环群，证毕.

例如$\langle Z_n,+,\times\rangle$是模$n$同余类环，则$\langle Z_n,+\rangle$是循环群. [1]是$\langle Z_n,+\rangle$的生成元，即$\langle Z_n,+\rangle=\langle[1]\rangle$. $\langle\{[0],[3]\},+\rangle$是$\langle Z_6,+\rangle$的二阶子群，$\langle\{[0],[3]\},+\rangle=\langle[3]\rangle$仍为循环群，生成元为[3]. [3]=[1]+[1]+[1]，[1]+[1]+[1]相当于定理5证明中的g^m，此例中的$m=3$，$g=[1]$.

容易看出，循环群是Abel群.

定义 6 若$\langle G,\otimes\rangle=\langle g\rangle$是循环群，使得$g^k=e$，而$g,g^2,\cdots,g^{k-1}$皆不等于$e$，则称$g$的周期是$k$，其中$e$是$\langle G,\otimes\rangle$的单位元，

如果不存在 g 的有限周期,则称 g 的周期是∞.□

例如$\langle \mathbf{I}, +\rangle$是以 0 为单位元,以 1 和 -1 为生成元的循环群,$+$是普通加法,1 与 -1 的周期是∞.而$\langle Z_n, +\rangle$的生成元是[1],其周期是 n.

定义 7 对于 n 次对群 S_n 的子群(置换群)$\langle G, \circ\rangle$中两个置换 s 和 t,若存在一个置换 $g\in G$,使得 $s = gotog^{-1}$,则称 s 与 t 在$\langle G, \circ\rangle$中共轭.□

例如考虑 3 次对称群$\langle D_3, \circ\rangle$(见例 1),$D_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$,取 $s = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} = \mu_1$, $t = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} = \mu_3$, $g = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} = \mu_2$,则有 $s = g\circ t\circ g^{-1}$,所以 s 与 t 在$\langle D_3, \circ\rangle$中共轭,见图 3.2.

在置换群$\langle G, \circ\rangle$中,元素对的共轭关系是一种等价关系:

(1) 自反性:$s\in G$,则 s 与自己共轭,$s = e\circ s\circ e^{-1}$.

(2) 对称性:若 $s = g\circ t\circ g^{-1}$,则 $t = g^{-1}\circ s\circ g$,令 $g^{-1} = h\in G$,则 $t = h\circ s\circ h^{-1}$.

(3) 传递性:若 $s = g\circ t\circ g^{-1}$, $t = h\circ r\circ h^{-1}$,则 $s = g\circ(h\circ r\circ h^{-1})\circ g^{-1} = (g\circ h)\circ r\circ(h^{-1}\circ g^{-1})$,令 $g\circ h = l\in G$,则 $s = l\circ r\circ l^{-1}$,即 s 与 r 共轭.

由定理 1,任何非恒同置换皆可唯一地分解成若干独立轮换之积,设 $f\in S_n$,且

$$f = (a_1^{(1)}a_2^{(1)}\cdots a_{k_1}^{(1)})(a_1^{(2)}a_2^{(2)}\cdots a_{k_2}^{(2)})\cdots(a_1^{(m)}a_2^{(m)}\cdots a_{k_m}^{(m)}), \tag{1}$$

其中$(\cdots)$是轮换,(1)式右端的 k_m个轮换独立,$\sum_{i=1}^{m} k_i = n$,其中 k 元轮换的个数记成 λ_k,记号 k^{λ_k} 表示k 元轮换的个数是λ_k 个,用这种记号,则 S_n 中的置换可唯一地分解成的独立轮换的形式可记成

$$1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}, \tag{2}$$

其中$\sum_{k=1}^{n} k^{\lambda_i} = n$.

例如 S_6 中，(1)(2 3)(4 5 6)与(1 2 3)(4)(5 6)具有相同的分解形式 $1^1 2^1 3^1 4^0 5^0 6^0$；一般地，在 S_n 中，具有相同的置换分解形式的那些置换组成的 S_n 的子集称为一个共轭类，上面的(1)(2 3)(4 5 6)与(1 2 3)(4)(5 6)就是 S_k 中同一共轭类中的元素.

定理 6 非恒同置换 s 与 t 在 S_n 中共轭的充分必要条件是：s 与 t 中分解成独立轮换的形式 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 一致.

证 必要性，设 $t=(a_{11}a_{12}\cdots a_{1i_1})(a_{21}a_{22}\cdots a_{2i_2})\cdots(a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mi_m})$，其中$(\cdots),(\cdots),\cdots,(\cdots)$是独立的轮换. 若 s 与 t 是 S_n 中共轭的两个置换，于是存在置换 $g\in S_n$，使得 $s=g\circ t\circ g^{-1}$，记 $g(a_{kj})=b_{kj}$，$k=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,i_k$. 于是 $s(b_{kj})=g\circ t\circ g^{-1}(b_{kj})=g\circ t(a_{kj})=g(a_{k(j+1)})=b_{k(j+1)}$，其中 $a_{k(i_k+1)}=a_{k1}$，所以 $s(b_{ki_k})=b_{k1}$，$s=(b_{11}b_{12}\cdots b_{1i_1})(b_{21}b_{22}\cdots b_{2i_2})\cdots(b_{m1}b_{m2}\cdots b_{mi_m})$，其中$\{(b_{k1}b_{k2}\cdots b_{ki_k})\}(k=1,2,\cdots,m)$是独立轮换，必要性得证.

从上述论证可知充分性成立，证毕.

从定理 6 知，共轭类中的置换是共轭置换.

定理 7 S_n 中具有分解形式 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 的共轭类中非恒同置换的个数为(Cauchy 公式)

$$h(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\frac{n!}{\lambda_1!\ \lambda_2!\ \cdots\lambda_n!\ 1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}}. \tag{3}$$

证 具有分解形式 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 的置换形如

$$(a_1^{(1)})(a_2^{(1)})\cdots(a_{\lambda_1}^{(1)})(a_1^{(2)}a_2^{(2)})(a_3^{(2)}a_4^{(2)})\cdots(a_{2\lambda_2-1}^{(2)}a_{2\lambda_2}^{(2)})\cdots$$
$$(x_1^{(n)}x_2^{(n)}\cdots x_n^{(n)})(x_{n+1}^{(n)}x_{n+2}^{(n)}\cdots x_{2n}^{(n)})\cdots(x_{n\lambda_n-n+1}^{(n)}\cdots x_{n\lambda_n}^{(n)}).$$

一个置换即一个 n 元素全排列，共有 $n!$ 个. 但由于一个 k 元轮换与排列中的 k 个子排列串对应：$(a_1a_2\cdots a_k)=(a_2a_3\cdots a_ka_1)=\cdots=(a_ka_{k-1}\cdots a_2a_1)$，$\lambda_k$ 个 k 元轮换与 k^{λ_k} 个子排列串对应，而且独立的 λ_k 个 k 元轮换可以交换位置，即它们的位置在排列中有 $\lambda_k!$ 种可能，故得证(3)式成立，证毕.

例如 S_4 中共有 $4!=24$ 个置换，其中恒同置换 $e=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$一个，还有 23 个非恒同置换，它们的$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$共轭类有四种：

$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(1,0,1,0),(2,1,0,0),(0,2,0,0),(0,0,0,1)$.
每种共轭类中的置换个数，依公式(1)分别为

$$h(1,0,1,0)=\frac{4!}{1!\ 0!\ 1!\ 0!\ 1^1\times2^0\times3^1\times4^0}=8,$$
这 8 个置换是：(1 2 3)(4)，(1 2 4)(3)，(1 3 2)(4)，(1 3 4)(2)，(1 4 2)(3)，(1 4 3)(2)，(2 3 4)(1)，(2 4 3)(1).

$$h(2,1,0,0)=\frac{4!}{2!\ 1!\ 0!\ 0!\ 1^2\times2^1\times3^0\times4^0}=6,$$
这 6 个置换是：(1 2)(3)(4)，(1 3)(2)(4)，(1 4)(2)(3)，(2 3)(1)(4)，(2 4)(1)(3)，(3 4)(1)(2).

$$h(0,2,0,0)=\frac{4!}{0!\ 2!\ 0!\ 0!\ 1^0\times2^2\times3^0\times4^0}=3,$$
这 3 个置换是：(1 2)(3 4)，(1 3)(2 4)，(1 4)(2 3).

$$h(0,0,0,1)=\frac{4!}{0!\ 0!\ 0!\ 1!\ 1^0\times2^0\times3^0\times4^1}=6,$$
这 6 个置换是：(1 2 3 4)，(1 2 4 3)，(1 3 2 4)，(1 3 4 2)，(1 4 2 3)，(1 4 3 2).

3.4 Lagrange 定理和 Burnside 定理

定义 1 $\langle H,\oplus\rangle$是群$\langle G,\oplus\rangle$的子群，若 $a,b\in G$，$a\oplus b^{-1}\in H$，则称元素 a 与 b 是模 H 同余关系，记成 $a\equiv b(\bmod H)$. □

定理 1 群$\langle G,\oplus\rangle$中模 H 的同余关系是一种等价关系；且若 $a\in G$，a 所在的等价类记成 Ha，则

$$Ha=\{h\oplus a\mid h\in H\}, \tag{1}$$
a 是此等价类 Ha 的代表元.

证 自反性：$\forall a\in G, a\oplus a^{-1}=e\in H$，即 $a\equiv a(\bmod H)$.

对称性：若 $a,b\in G, a\equiv b(\bmod H), a\oplus b^{-1}\in H$，又 $\langle H,\oplus\rangle$ 是群，$\langle a\oplus b^{-1}\rangle^{-1}=b\oplus a^{-1}\in H$，即 $b\equiv a(\bmod H)$.

传递性：$a,b,c\in G, a\equiv b(\bmod H), b\equiv c(\bmod H)$，即 $a\oplus b^{-1}\in H, b\oplus c^{-1}\in G$，由于 $\langle H,\oplus\rangle$ 是群，故 $(a\oplus b^{-1})\oplus(b\oplus c^{-1})=a\oplus c^{-1}\in H$，即 $a\equiv c(\bmod H)$.

由此关系之自反、对称和传递性知其为等价关系.

把 $a\in G$ 所在的等价类记成 $[a]$，则

$$
\begin{aligned}
[a]&=\{b\mid b\in G, b\oplus a^{-1}\in H\}\\
&=\{h\oplus a\mid h\in H\}=Ha,
\end{aligned}
$$

而 $a\in[a]$，a 是此等价类之代表元，证毕.

定理 1 中所称的 a 所在的等价类 Ha 称为群 $\langle G,\oplus\rangle$ 之子群 $\langle H,\oplus\rangle$ 的右陪集. 相似地，$a\in G$，$aH=\{a\oplus h\mid h\in H\}$ 称为左陪集.

定理 2 $\langle H,\oplus\rangle$ 是群 $\langle G,\oplus\rangle$ 的子群，则 $\langle H,\oplus\rangle$ 的所有左陪集组成的集合 L 与 $\langle H,\oplus\rangle$ 的所有右陪集组成的集组成的集合 R 等势.

证 考虑映射 $f:L\to R$，具体定义 f 为 $f(aH)=Ha^{-1}$，f 显然是满射. 若 $a_1H, a_2H\in L$，又 $f(a_1H)=f(a_2H)=Ha$，则由 f 定义知 $Ha_1^{-1}=Ha_2^{-1}$，于是 $a_1H=a_2H$，即 f 是单射，可见 f 是 L 与 R 间的一一对应，所以 L 与 R 等势，证毕.

定理 3(Lagrange) $\langle G,\oplus\rangle$ 是有限群，$\langle H,\oplus\rangle$ 是 $\langle G,\oplus\rangle$ 的子群，则 $\langle H,\oplus\rangle$ 的左(右)陪集的个数为 $\frac{|G|}{|H|}$.

证 考虑映射 $f:H\to Ha$，具体运算为 $f(h)=h\oplus a$. f 是双射，故 $|H|=|Ha|$. 又 G 中的 H 的右陪集是 G 的一个划分，若右陪集的个数为 r，r 个不同的右陪集为 $Ha_1, Ha_2,\cdots,Ha_r$，$G=\bigcup\limits_{i=1}^{r}Ha_i$，其中 $Ha_i\cap Ha_j=\varnothing$，$i\neq j$，于是

$$
|G|=|Ha_1|+|Ha_2|+\cdots+|Ha_r|=r|H|,
$$

$$r=\frac{|G|}{|H|},$$

证毕.

定义 2 $\langle G,\circ\rangle$是 n 次对称群 S_n 的子群,$k\in\{1,2,\cdots,n\}$,$\langle G,\circ\rangle$中使 k 为不动点的置换全体构成的集合称为k 在G 中的稳定核,记成 H_k,即 $H_k=\{\sigma|\sigma\in G,\sigma(k)=k\}$.□

定理 4 $(H_k,\circ)$是置换群$\langle G,\circ\rangle$的子群.

证 (i) 封闭性:若 $\sigma_1,\sigma_2\in H_k$,则 $\sigma_1\circ\sigma_2\in H_k$.

(ii) 单位元,$\langle G,\circ\rangle$的单位元就是$\langle H_k,\circ\rangle$的单位元.

(iii) 逆元:若 $\sigma\in H_k$,则 $\sigma^{-1}\in H_k$,σ^{-1}是 σ 的逆元.

(iv) 有结合律.证毕.

定义 3 设$\langle G,\circ\rangle$是 n 次对称群 S_n 的子群,$k,l\in\{1,2,\cdots,n\}$,若存在置换 $\sigma\in\langle G,\circ\rangle$,使得 $\sigma(k)=l$,则称在 G 中k 与l 相邻(相邻关系是等价关系),k 的相邻等价类称为k 在置换群$\langle G,\circ\rangle$作用下的轨道,记成 O_k.□

定理 5 G 中的相邻关系是等价关系.

证 自反性:取 $\sigma=e$($\langle G,\circ\rangle$中的单位元,恒同置换),则有自反性 $k=e(k)$.

对称性:$k=\sigma(l)$,$l=\sigma^{-1}(k)$,$\sigma\in G$.

传递性:$k=\sigma_1(l)$,$l=\sigma_2(r)$,其中 $k,l,r\in\{1,2,\cdots,n\}$,$\sigma_1,\sigma_2\in G$,则 $k=\sigma_1\circ\sigma_2(r)=\sigma_3(r)$,$\sigma_3\in G$,证毕.

由定义 3,若$\{k,k_1,k_2,\cdots,k_m\}$是相邻等价类,则 $O_k=O_{k_1}=\cdots=O_{k_m}$,称$\{k,k_1,\cdots,k_m\}$中的数同轨.$\{1,2,\cdots,n\}$在$\langle G,\circ\rangle$作用下,可以划分成若干独立轨道.例如$\langle\{e,(1,2),(3,4),(3\ 4)(1\ 2)\},\circ\rangle$中 $O_1=O_2=\{1,2\}$,$O_3=O_4=\{3,4\}$,有两个独立轨道 O_1 与 O_3.

定理 6 $\langle G,\circ\rangle$是 n 次对称群 S_n 的一个子群,则$|O_k||H_k|=|G|$,$k\in\{1,2,\cdots,n\}$.

证 由定理 4,$\langle H_k,\circ\rangle$是$\langle G,\circ\rangle$的子群,由 Lagrange 定理,

$\langle H_k, \circ\rangle$的陪集个数是$\dfrac{|G|}{|H_k|}$.

由 O_k 定义，$\forall i\in O_k$，存在 $\sigma_i\in G$，使得 $\sigma_i(i)=k$；于是确定了一个映射

$$f: O_k \to R,$$

R 是 H_k 的右陪集集合，具体作用是 $f(i)=H_k\sigma_i$.

f 是单射的，只欠证 f 是满射. 事实上，设 $H_k a$ 是 H_k 的任一右陪集，由 f 的定义，以及 $a^{-1}(k)\in O_k$，可知 $H_k a$ 是 $a^{-1}(k)$的象，故 f 是满射，至此得知 f 是双射，即$|O_k|=|R|=\dfrac{|G|}{|H_k|}$，证毕.

定理 7(Burnside)　若$\langle G,\circ\rangle$是 n 次对称群 S_n 的子群，$g\in G$，$\lambda(g)$是置换 g 的不动点个数，则$\langle G,\circ\rangle$中不同的轨道数目为

$$N(G)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\lambda(g). \tag{2}$$

证　由于$\sum\limits_{g\in G}\lambda(g)=\sum\limits_{k\in A}|H_k|$，$A=\{1,2,\cdots,n\}$，由定理6，若 k,l 属于同一轨道O，则

$$|H_k|=|H_l|=\frac{|G|}{|O|},$$

其中 $O\in O(G)$，$O(G)$是轨集. 因此

$$\sum_{g\in G}\lambda(g)=\sum_{k\in A}|H_k|=\sum_{O\in O(G)}\sum_{k\in O}|H_k|=\sum_{O\in O(G)}|O|\cdot\frac{|G|}{|O|}=\sum_{O\in O(G)}|G|=N(G)|G|,$$

故有

$$N(G)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\lambda(g),$$

证毕.

例如　$\langle\{e,(1\ 2),(3\ 4),(1\ 2)(3\ 4)\},\circ\rangle$是 4 阶置换群，

$$g_1 = e = (1)(2)(3)(4), \lambda(g_1) = 4,$$
$$g_2 = (1\ 2), \lambda(g_2) = 2,$$
$$g_3 = (3\ 4), \lambda(g_3) = 2,$$
$$g_4 = (1\ 2)(3\ 4), \lambda(g_4) = 0,$$

代入 Burnside 公式(2)得

$$N(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{4} \lambda(g_i) = \frac{1}{4}(4 + 2 + 2 + 0) = 2,$$

即此群有两个轨道：$O_1 = \{1,2\}, O_2 = \{3,4\}$.

又例如 3.3.2 中的例 2，$\langle D_4, \circ \rangle$是置换群，$|D_4| = 8, \lambda(\rho_0) = 4, \lambda(\rho_1) = 0, \lambda(\rho_2) = 0, \lambda(\rho_3) = 0, \lambda(\mu_1) = 0, \lambda(\mu_2) = 0, \lambda(\mu_3) = 2, \lambda(\mu_4) = 2$，代入 Burnside 公式(2)得

$$N(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{8} \lambda(g_i) = \frac{1}{8}(4 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2 + 2) = 1.$$

即$\langle D_4, \circ \rangle$中只一个轨道 $O_1 = \{1,2,3,4\}$.

3.5 Pólya 定理

设 $C = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ 是 m 种颜色组成的色集合，$\langle G, \circ \rangle$ 是一个置换群，G 的元素是 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 中的置换，如果用颜色集 C 中的一些颜色对 X 中的每个数码代表的事物进行染色，相当于一个映射 $\varphi: X \to C$，约定 $i \in X$ 时，i 的上色为 $\varphi(i) \in C$，X 称为对象集. 如果把上色映射 φ 列成如下形式的函数表

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) & \cdots & \varphi(n) \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

则当 $g \in G$ 时，$\varphi \cdot g$ 也是从 X 到 C 的映射. 例如 $X = \{1,2,3,4\}$，$C = \{C_1, C_2, C_3\}$.

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ C_1 & C_3 & C_3 & C_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

则

$$\varphi_2=\varphi_1\cdot g=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ C_1 & C_3 & C_3 & C_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ C_3 & C_1 & C_2 & C_3\end{pmatrix}.$$

即 $\varphi_2=\varphi_1\cdot g$ 也是对对象集 X 的一个上色映射.

定义 1 若$\langle G,\circ\rangle$是对称群 S_n 的子群,φ_1 与 φ_2 是对象集 $X=\{1,2,\cdots,n\}$到色集 $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$的上色映射,且存在置换 $g\in G$,使得 $\varphi_1\cdot g=\varphi_2$,则称 φ_1 与 φ_2 有相似格式,记成 $\varphi_1\backsim\varphi_2$.□

显然,有相似格式的上色映射构成一个等价类.

事实上,在同一个等价类中的每个上色映射,用了哪几种颜色,每种颜色用了几次(对 n 个对象染了该种颜色)是一样的,我们称同一等价类中这些上色映射有同样的染色方案.

定理(Pólya) 设$\langle G,\circ\rangle$是对称群 S_n 的子群,用 m 种颜色对 n 个对象上色,不同上色方案的个数为

$$P(G,m)=\frac{1}{|G|}(m^{\lambda(g_1)}+m^{\lambda(g_2)}+\cdots+m^{\lambda(g_p)}) \tag{2}$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}m^{\lambda_1(g)+\lambda_2(g)+\cdots+\lambda_n(g)}, \tag{3}$$

其中 $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_p\}$,$\lambda(g_i)$是 g_i 中轮换的个数,$i=1,2,\cdots,p$.

证 设不同上色映射组成的集合为 A,则$|A|=m^n$.设$\langle T,\circ\rangle$是如下的 A 上的置换群,$\forall g_i\in G$,仅当 g_i 通过$\varphi_1\cdot g_i=\varphi_2$ 时,$t_i(\varphi_1)=\varphi_2$,其中 φ_1 与 φ_2 是 A 中两个元素,$t_i\in T$.

不难看出,$\langle T,\circ\rangle$中独立轨道的数目即不同上色方案的个数.由 Burnside 公式知

$$P(G,m)=\frac{1}{|T|}=\sum_{t\in T}\lambda(t),$$

其中 $\lambda(t)$是 T 中置换 t 的不动点之个数;而 $\lambda(t_i)=m^{\lambda(g_i)}$,其中 $\varphi_1\cdot g_i=\varphi_2$ 时,$t_i(\varphi_1)=\varphi_2$,$\varphi_1,\varphi_2\in A$,$t_i\in T$,$i=1,2,\cdots,p$.故

$$P(G,m)=\frac{1}{|G|}(m^{\lambda(g_1)}+m^{\lambda(g_2)}+\cdots+m^{\lambda(g_p)}).$$

又因为 $m^{\lambda(g_i)}=m^{\lambda_1(g_i)+\lambda_2(g_i)+\cdots+\lambda_n(g_i)}$，其中 $\lambda_j(g_i)$ 是置换 g_i 中长为 j 的轮换的个数，$i=1,2,\cdots p$，$j=1,2,\cdots,n$. 故

$$P(G,m)=\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{p}m^{\lambda_1(g_i)+\lambda_2(g_i)+\cdots+\lambda_n(g_i)},$$

证毕.

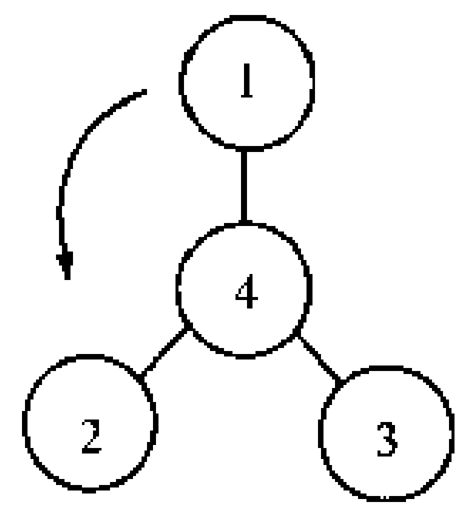


图 3.4

例 1 电风扇(吊扇)由三个全等的风叶和中心处的电机包组成，每两个风叶间的夹角 120°，见图 3.4. 今欲把两种花样不同的商标贴在风叶或电机包上，每个风叶上和电机包上至多贴一个商标，问有几种贴法？

解 此题相当于用 $m=2$ 种颜色对 $n=4$ 个对象进行上色，上色映射的个数为 $|A|=2^4=16$，其中 A 是上色映射集合，设想把 16 个贴好商标的风扇排成一横排，每个上面有一种上色方式，且 16 个风扇上对应的风叶平行，见图 3.5.

考虑置换群 $\langle G,\circ\rangle$，$G=\{g_1,g_2,g_3\}$，

$$0°:\quad g_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=(1)(2)(3)(4),$$

$$120°: g_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3)(4),$$

$$240°: g_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2)(4),$$

$\lambda(g_1)=4$，$\lambda(g_2)=2$，$\lambda(g_3)=2$，代入 Pólya 公式(1)得

$$P(G,m)=\frac{1}{|G|}(m^{\lambda(g_1)}+m^{\lambda(g_2)}+m^{\lambda(g_3)})$$
$$=\frac{1}{3}(2^4+2^2+2^2)=8,$$

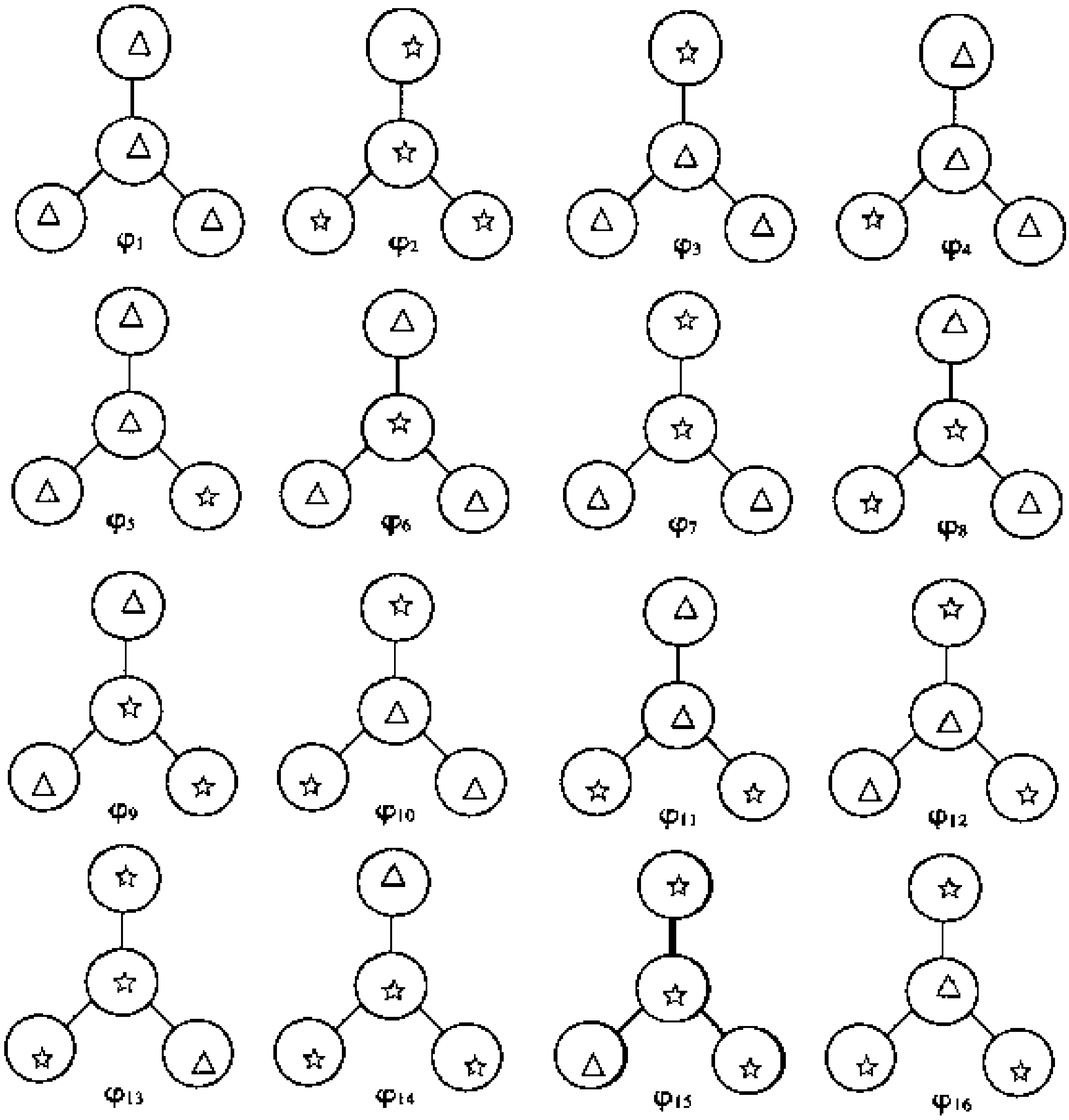


图 3.5

即不同的贴法有 8 种(能重合者算一种)见图 3.6:

例 2 求已标志的完全图 K_3 的所有不同构的生成子图.

解 设 $V(K_3)=\{v_1,v_2,v_3\}$, $E(K_3)=\{e_1=v_1v_2, e_2=v_1v_3, e_3=v_2v_3\}$,见图 3.7. 考虑用两种颜色对 $E(K_3)$进行着色,取置换群$\langle S_3^{(2)},\circ\rangle$,其中 $S_3^{(2)}=\{(e_1)(e_2)(e_3),(e_1e_2e_3),(e_3e_2e_1),(e_1e_3)(e_2),(e_1e_2)(e_3),(e_2e_3)(e_1)\}$,每种"上色方案"中染了第一种颜色(或第二种颜色的边)的边构成的生成子图即为所求.

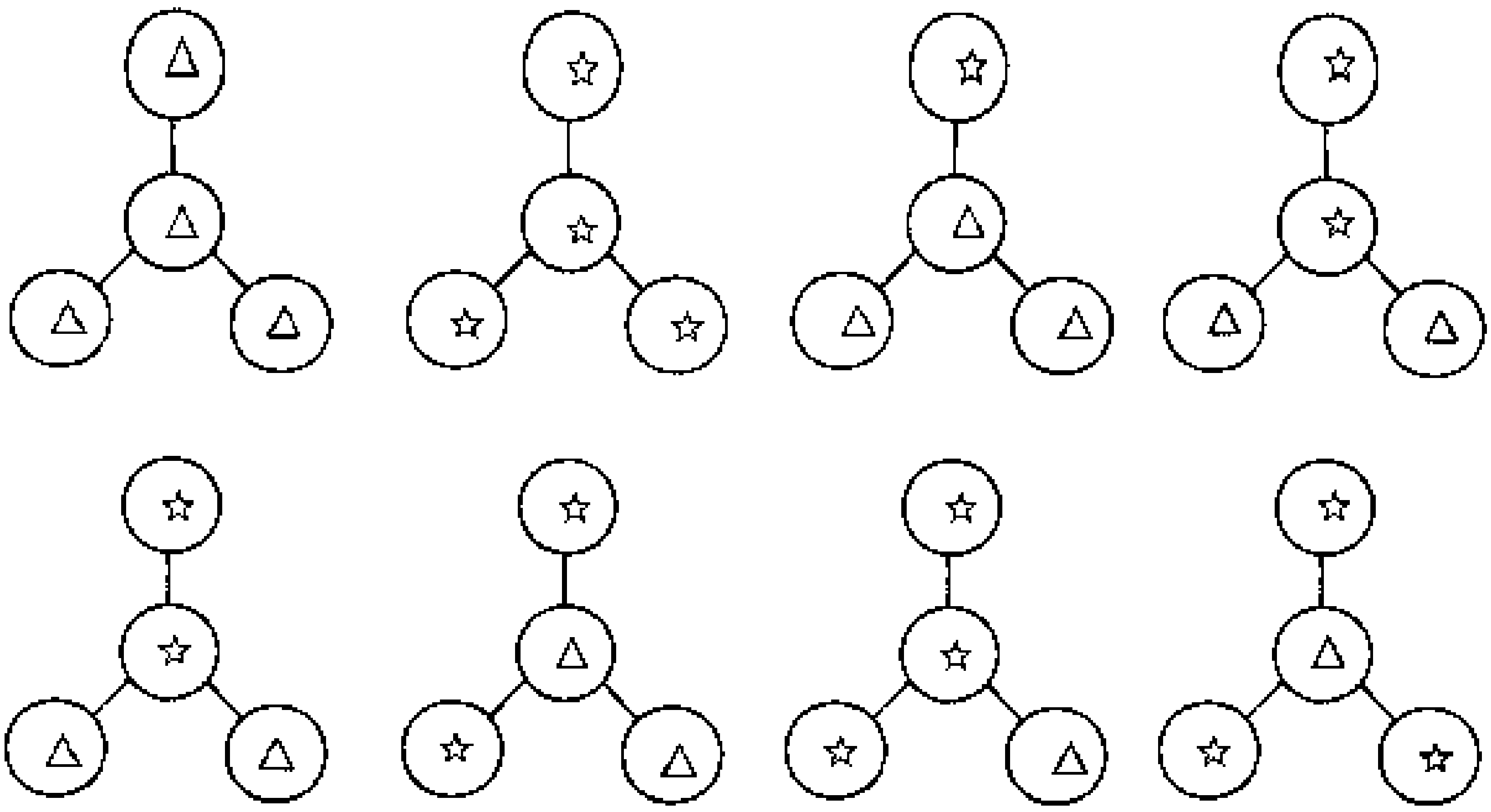


图 3.6

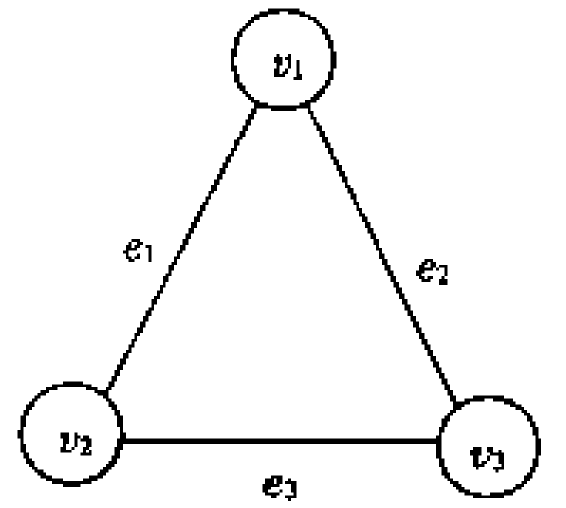


图 3.7

$|S_3^{(2)}|=6, m=2, \lambda((e_1)(e_2)(e_3))=3, \lambda((e_1e_2e_3))=1, \lambda((e_3e_2e_1))=1, \lambda((e_1e_3)(e_2))=2, \lambda((e_1e_2)(e_3))=2, \lambda((e_2e_3)(e_1))=2$,代入 Pólya 公式得

$$P(G,m)=\frac{1}{|G|}(m^{\lambda(g_1)}+m^{\lambda(g_2)}+\cdots+m^{\lambda(g_p)})$$

$$=\frac{1}{6}(2^3+2^1+2^1+2^2+2^2+2^2)=4,$$

即不同构的生成子图有四个,见图 3.8.

一般而言,若求已标志的完全图 K_n 的所有不同构的生成子图,则应考虑用两种颜色 $\{C_1, C_2\}$ 对 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边进行着色,取置换群 $\langle G,\circ\rangle$ 为 $G=\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{\frac{n(n-1)}{2}}\}$,列出 $\langle G,\circ\rangle$ 中置换清单,且把它们表成轮换积的形式,且数出每个置换 g 的 $\lambda(g)$,再代入 Pólya 公式即可.

匈牙利杰出数学家 G·Pólya(1887—1985)关于相对于给定置

换群的不等价态的计数理论是离散数学中极为精彩的理论成果，但是，正如我们在例题中看到的，列出那个置换群的元素清单，往往要涉及到阶乘，于是欲具体执行这一计数过程，空间复杂度与时间复杂度都是致命的障碍，这里再一次暴露了理论的优美与其应用的乏力之间的矛盾！

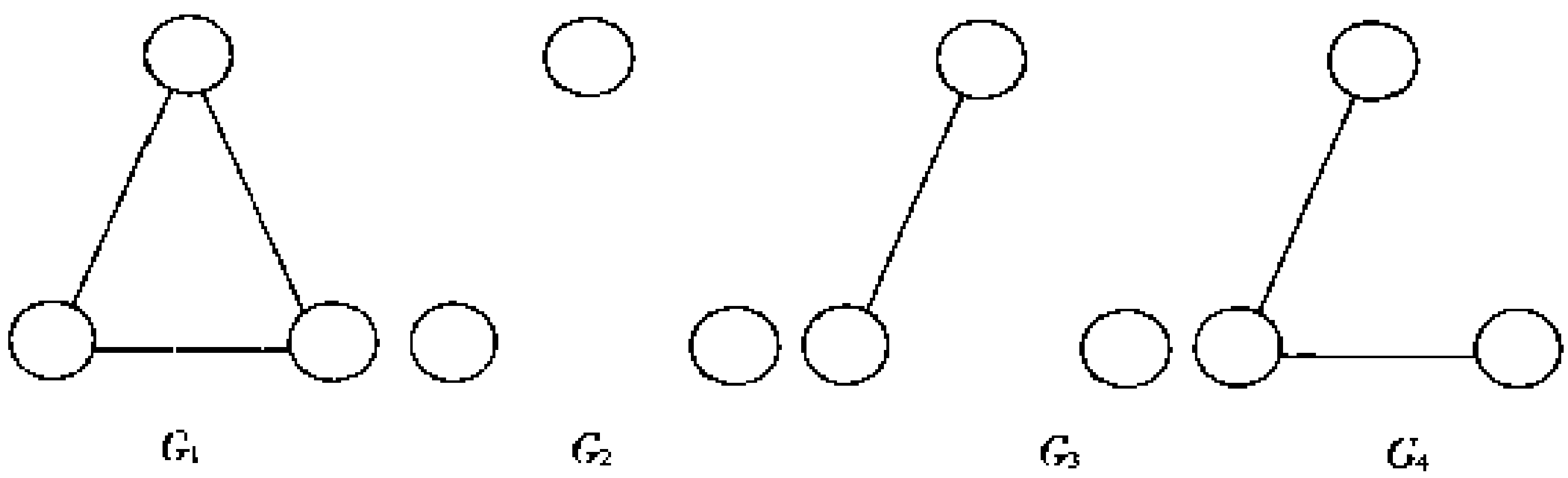


图 3.8

习题二

1. 证明：S_n 的每个子群或者全部由偶置换构成，或者奇偶置换各占一半.

2. A_4 是全体 4 元偶置换构成的群，列出 A_4 的元素清单.

3. 求 S_3 的一切子群.

4. 下列各群，是循环群吗？是，则列出其生成元.

$G_1=\langle \mathbf{Q},+\rangle$，$G_2=\langle 6\mathbf{Z},+\rangle$，$G_3=\langle \{6^n \mid n\in\mathbf{Z}\},\circ\rangle$. 其中 $\mathbf{Q}$ 是有理数集，$\mathbf{Z}$ 是整数集.

5. G 是 6 阶循环群，求其生成元和所有子群.

6. 证明：只有一个生成元的循环群，至多含两个元素.

7. 正方形 $ABCD$ 绕过其中心与此正方形所在的平面垂直的轴旋转 0°，90°，180°，270°所得到的全体置换是否构成置换群？如果以它的四条对称轴翻转 180°，所得的置换全体是否构成一个置

换群?

8. 指出对称群 S_4 的共轭类.

9. 求对称群 S_4 的轨道 O_4 和稳定核 H_4.

10. 已知等边三角形△ABC,用三种颜色对其顶上色,问有多少种上色方案?

11. 对正四面体的四个顶 A,B,C,D 用四种颜色上色,有多少种上色方案?

12. 求标志图 K_4 的不同构的生成子图的清单.

13. 对正六边形的六个顶点 A,B,C,D,E,F 用四种颜色进行着色,有多少种上色方案?

14. 一项链有十颗珍珠,用三种颜色对珍珠上色,有多少种上色方案?

3.6 图的群

3.6.1 图的自同构群

定义 1 设 $G(V,E)$ 与 $G'(V',E')$ 是两个有向图,若存在双射 $\sigma: V\to V'$ 和由 σ 导出的映射 $\bar{\sigma}: V\times V\to V'\times V'$,使得 $\bar{\sigma}(x,y)=(\sigma(x),\sigma(y))$, $x,y\in V$, $\bar{\sigma}(E)=E'$,则称 $(\sigma,\bar{\sigma})$ 为同构映射. $G(V,E)$ 到自身的同构映射称为自同构,它实际上是保持相邻关系的一个置换.

$G(V,E)$ 的全体自同构映射组成的集合上定义乘法为置换积,所成的置换群称为 $G(V,E)$ 的自同构群,记成 Aut $G(V,E)$. □

仿定义 1,可定义无向图的自同构群.

下面把 $(\sigma,\bar{\sigma})$ 简记成 σ.

定理 1 (i) $x,y\in V$, $\sigma\in$ Aut $G(V,E)$, $G(V,E)$ 是有向图,则 $d(x,y)=d(\sigma(x),\sigma(y))$,其中 $d(u,v)$ 表示 $G(V,E)$ 中从顶 u 到顶 v 的距离.

(ii) $x\in V,\sigma\in \text{Aut } G(V,E),V_i(x)=\{y|y\in V(G),d(x,y)=i\}$,则 $\sigma(V_i(x))=V_i(\sigma(x))$,从而 $V_i(x)$与 $V_i(\sigma(x))$ 导出同构子图.

(iii) $x\in V(G),\sigma\in \text{Aut } G(V,E)$,则 $d^+(x)=d^+(\sigma(x))$.

证 (i) 当 x 到 y 有一条长 m 的有向轨 $P(x,y)$时,$\sigma(x)$到 $\sigma(y)$也有一条长 m 的轨,所以 $d(\sigma(x),\sigma(y))\leqslant d(x,y)$.由于是自同构,所以反过来也有 $d(x,y)\leqslant d(\sigma(x),\sigma(y))$,故 $d(x,y)=d(\sigma(x),\sigma(y))$.

(ii) $\sigma(y)\in\sigma(V_i(x))\Leftrightarrow y\in V_i(x)\Leftrightarrow d(x,y)=i$,由(i),$d(\sigma(x),\sigma(y))=i\Leftrightarrow\sigma(y)\in V_i(\sigma(x))$,故知 $\sigma(V_i(x))=V_i(\sigma(x))$;由于 σ 保持相邻关系,所以 $V_i(x)$导出的子图在 σ 作用下变成$V_i(\sigma(x))$导出的子图.

(iii) 在(ii)中令 $i=1$ 则知 $d^+(x)=d^+(\sigma(x))$,因为 $d^+(x)=|V_1(x)|$,证毕.

定理 2 $\text{Aut } G(V,E)=\text{Aut } G(V,{}^tE)$,其中 G 是有向图,${}^tE$ 是把E 中每边之方向反向得到的有向边集.

证 $\sigma\in\text{Aut } G(V,E)$时,有

$$(x,y)\in{}^tE\Leftrightarrow(y,x)\in E\Leftrightarrow(\sigma(y),\sigma(x))\in E$$
$$\Leftrightarrow(\sigma(x),\sigma(y))\in{}^tE.$$

可见 $\sigma\in\text{Aut } G(V,{}^tE)$,$\text{Aut } G(V,E)\subseteq\text{Aut } G(V,{}^tE)$,同理可有 $\text{Aut } G(V,{}^tE)\subseteq\text{Aut } G(V,E)$,证毕.

定理 3 $G(V,E)$是无圈有向图时,$\text{Aut } G(V,E)=\text{Aut } G(V,{}^cE)$,其中 $G(V,{}^cE)$是 $G(V,E)$之补图.

证 设 $\sigma\in\text{Aut } G(V,E)$,由于$(x,y)\in{}^cE\Leftrightarrow(x,y)\notin E\Leftrightarrow(\sigma(x),\sigma(y))\notin E\Leftrightarrow(\sigma(x),\sigma(y))\in{}^cE$,所以 $\text{Aut } G(V,E)\subseteq\text{Aut } G(V,{}^cE)$;同理可有 $\text{Aut } G(V,{}^cE)\subseteq\text{Aut } G(V,E)$,证毕.

定理 3 对无向图亦成立.

定理 4 $|\mathrm{Aut}\ G(V,E)|\ \big|\ p!$,其中 $p=|V(G)|$,G 是有向图.

证 由 Lagrange 定理,定理 3 成立,证毕.

定理 5 $G(V,E)$是 p 顶有向图,把 V 中顶从 1 到 p 编号,互不相同的有标号的图共$\dfrac{p!}{|\mathrm{Aut}\ G(V,E)|}$个.

证 由于$|V(G)|=p$,对 $V(G)$中顶编号有 $p!$ 种不同的编法.但在 $\sigma\in\mathrm{Aut}\ G(V,E)$下相应顶有同样编号的两种编法所得的顶点有编号的图,事实上是完全相同的,所以定理 5 成立,证毕.

定义 2 设 $G(V,E)$与 $G(V',E')$是两个无向图,存在双射 $\varphi:E\to E'$,使得 $G(V,E)$中相邻的两边 e 与 f 在φ 作用下之象在 $G(V',E')$中仍相邻,反之,$G(V',E')$中相邻的边关于 φ 的原象在$G(V,E)$中也相邻,则称 $G(V,E)$与 $G(V',E')$是边同构的,φ 称为$G(V,E)$到 $G(V',E')$的一个边同构映射.

$G(V,E)$到自身的边同构称为边自同构.

在置换(边自同构即保持相邻关系的置换)乘法下,$G(V,E)$的全体边自同构构成的群,称为 $G(V,E)$的边自同构群,简称 $G(V,E)$的边群,记成 $\mathrm{Aut}_1 G(V,E)$. □

同构图必是边同构的,反之则未必成立.

例如 K_3 与 4 顶星是边同构图,但不是同构图.

定义 3 由无向图 $G(V,E)$的自同构导出的边自同构全体,在置换乘法下构成的群,称为 $G(V,E)$的导出边群,记之为 $\mathrm{Aut}^*\ G(V,E)$. □

定理 6 $G(V,E)$是无向连通图,则 $\mathrm{Aut}\ G(V,E)\cong\mathrm{Aut}^*\ G(V,E)$的充要条件是 $G(V,E)\ncong K_2$,其中$|V(G)|\geqslant 2$.

证 由于 $\mathrm{Aut}K_2\cong S_2$,$\mathrm{Aut}^*\ K_2\cong S_1$,所以必要性是明显的,为证充分性,必须考虑$|V(G)|\geqslant 3$.由连通性知$|E(G)|\geqslant 2$.

定义由 $\mathrm{Aut}\ G(V,E)$到 $\mathrm{Aut}^*\ G(V,E)$的映射 ϕ,$\forall\sigma\in\mathrm{Aut}\ G(V,E)$,则 $\phi(\sigma)=\sigma^*$,其中 σ^* 是由 σ 导出的$G(V,E)$的边自

同构，下面证明 ϕ 是一个群同构. 由 $\mathrm{Aut}^* G(V,E)$ 之定义，可知 ϕ 是满射. 下证 ϕ 是一一的. 事实上，若 $\sigma_1,\sigma_2\in \mathrm{Aut}\, G(V,E)$，且 $\sigma_1\neq\sigma_2$，则有 $v\in V(G)$，使得 $\sigma_1(v)\neq\sigma_2(v)$，再设 u 是 $G(V,E)$ 中与 v 相邻的顶，那么，若 $\sigma_1(u)\neq\sigma_2(v)$，或 $\sigma_1(v)\neq\sigma_2(u)$，对于边 $f=uv$ 会有 $\sigma_1^*(f)\neq\sigma_2^*(f)$，于是我们设 $\sigma_1(u)=\sigma_2(v)$ 及 $\sigma_1(v)=\sigma_2(u)$ 同时成立. 由对 $G(V,E)$ 的假设知，必有一顶 $w\in V(G)$，w 至少至 u,v 之一相邻，且 $w\notin\{u,v\}$. 若 $f_1=vw\in E(G)$，则 $\sigma_1^*(f_1)\neq\sigma_2^*(f_1)$；若 $f_2=uw\in E(G)$，则 $\sigma_1^*(f_2)\neq\sigma_2^*(f_2)$，从而 $\sigma_1^*\neq\sigma_2^*$，因此 ϕ 是一一的.

下面证明 ϕ 是保持运算的，即对任何 $f\in E(G)$，总有 $\phi(\sigma_1\sigma_2)(f)=(\phi(\sigma_1))(\phi(\sigma_2))(f)$；令 $f=uv$，且令 $\sigma_2(u)=u'$，$\sigma_2(v)=v'$，$\sigma_1(u')=u''$，$\sigma_1(v')=v''$，那么，

$$\begin{aligned}\phi(\sigma_1\sigma_2)(f)&=\phi(\sigma_1\sigma_2)(uv)=(\sigma_1\sigma_2)(u)(\sigma_1\sigma_2)(v)\\&=\sigma_1(u')\sigma_1(v')=u''v''.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\phi(\sigma_1))(\phi(\sigma_2))(f)&=(\phi(\sigma_1))(\phi(\sigma_2))(uv)\\&=(\phi(\sigma_1))(\sigma_2(u)\sigma_2(v))\\&=(\phi(\sigma_1))(u'v')\\&=\sigma_1(u')\sigma_1(v')=u''v'',\end{aligned}$$

可见 ϕ 保持运算，$\mathrm{Aut}\, G(V,E)\cong\mathrm{Aut}^* G(V,E)$，证毕.

推论 1 $G(V,E)$ 是 $|V|\geqslant 2$ 的无向图，则 $\mathrm{Aut}\, G(V,E)\cong\mathrm{Aut}^* G(V,E)$ 的充要条件是 $G(V,E)$ 无与 k_2 同构的连通片，也不含两个或两个以上的孤立顶.

定理 7（Whitney） 设 ϕ 是由连通无向图 $H_1(V(H_1),E(H_1))$ 到连通无向图 $H_2(V(H_2),E(H_2))$ 的一个边同构，H_1 不是图 3.9 中的图 G_1,G_2,G_3,G_4,G_5 的某一个，那末 ϕ 就是从 H_1 到 H_2 的某个同构映射导出来的.

证 分两种情形考虑.

第一种情形，设 $v_0\in V(H_1)$，$d(v_0)\geqslant 4$，$v_1,v_2,\cdots,v_{d(v_0)}$ 是

v_0 之邻顶;设 $\phi(v_0v_i)=e_i, i=1,2,\cdots,d(v_0)$,由于边子集$\{v_0v_i \mid i=1,2,\cdots,d(v_0)\}$中的边两两相邻,所以 $E(H_2)$中的边子集$\{e_i \mid i=1,2,\cdots,d(v_0)\}$)也是两两相邻的.由 $d(v_0)\geqslant 4$,故存在 $u_0 \in V(H_2)$与$\{e_i \mid i=1,2,\cdots,d(v_0)\}$中的每边相关联.记 $e_i=u_0u_i, i=1,2,\cdots,d(v_0)$.假设在 H_1 中 v_i 与 v_j 相邻($i,j\neq 0$),那么,H_2 中的边 $\phi(v_iv_j)$与 u_0u_i 及 u_0u_j 中的每边相邻,但不与 u_0u_k 相邻($k\neq i,j$),从而得 $\phi(v_iv_j)=u_iu_j$,令 $A_1=\{v_0,v_1,\cdots,v_{d(v_0)}\}$,$B_1=\{u_0,u_1,\cdots,u_{d(v_0)}\}$,$G(A_1,E(A_1))$与 $G(B_1,E(B_1))$分别是 A_1,B_1 在 H_1 与 H_2 的导出子图,那么,由 $\psi(v_i)=u_i(i=0,1,2,\cdots d(v_0))$所定义的映射 $\psi: A_1\to B_1$ 便是这两个子图间的一个同构,记 ϕ_1 是由 ψ 导出的这两个子图间的边同构,可以看出,ϕ_1 是 ϕ 在$E(A_1)$上的一个限制.如果 $G(A_1,E(A_1))$就是 H_1,我们的证明就完成了.不然,由 H_1 之连通性,在 $V(H_1)-A_1$ 中有一顶 $v_{d(v_0)+1}$,$v_{d(v_0)+1}$与 $G(A_1,E(A_1))$中某顶 v_r 相邻,又设 v_s 是 $G(A_1,E(A_1))$中与 v_r 相邻的一个顶,边 $\phi(v_rv_{d(v_0)+1})\notin E(B_1)$,但它与 $G(B_1,E(B_1))$中的边 $\phi(v_rv_s)=u_ru_s$ 相邻,因此在 H_2 中有一个 u_{d+1},它不属于 B_1 且能使 $\phi(v_rv_{d+1})$或是 u_ru_{d+1}或是 u_su_{d+1},可是边 $\phi(v_rv_{d+1})$同 u_ru_s 以及 $G(B_1,E(B_1))$中每条与 u_r 关联的边皆相邻,且除了 u_ru_s 外不同 $G(B_1,E(B_1))$中与 u_s 关联的别的边相邻,因为 u_r 与u_s 中至少一顶在$G(B_1,E(B_1))$的次数不小于 2,于是得 $\phi(v_rv_{d+1})=u_ru_{d+1}$.

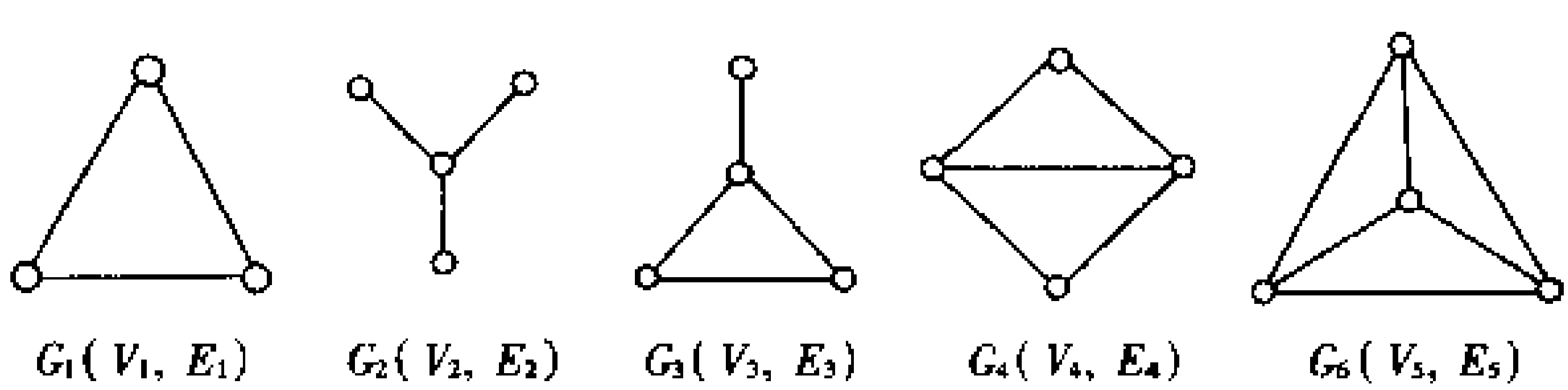


图 3.9

上述讨论可应用于 H_1 中连接 v_{d+1} 与 A_1 中某一顶点的每一条边. 因此，当 $v_ju_{d+1}\in E(H_1)$ 时 $(1\leqslant j\leqslant d(u_0))$，有 $\phi(v_jv_{d+1})=u_ju_{d+1}$. 令 $A_2=A_1\cup\{v_{d+1}\}$，$B_2=B_1\cup\{u_{d+1}\}$，并扩充上面定义过的映射 ψ，使 $\psi(v_{d+1})=u_{d+1}$，那么 ψ 是连通图 $G(A_2,E(A_2))$ 到连通图 $G(B_2,E(B_2))$ 的一个同构. 此外，ψ 还导出这两个子图间的边同构 ϕ_2，后者是 ϕ 在 $E(A_2)$ 上的限制. 如果 $G(A_2,E(A_2))=H_1$，证明已经完成，否则，可仿上一步步进行下去直至得到子图 $G(A_{p-d},E(A_{p-d}))$ 与 $G(B_{p-d},E(B_{p-d}))$，其中 $p=|V(H_1)|$，而 $H_1=G(A_{p-d},E(A_{p-d}))$，$H_2=G(B_{p-d},E(B_{p-d}))$；这时，$\psi$ 已扩充为由 H_1 到 H_2 的同构，而 ϕ 则是由 ψ 导出的边同构.

第二种情形. 假设 $\triangle(H_1)\leqslant 3$，$\triangle(H_1)$ 表示 H_1 的顶次数最大值. 这时我们可以假设有 $v_0\in V(H_1)$，$d(v_0)=3$，因为 H_1 是轨或不同于 C_3 的圈时，定理的结论显然已成立. 设 v_1,v_2,v_3 是 v_0 的邻顶. 由 $A_1=\{v_0,v_1,v_2,v_3\}$ 导出的子图要么是图 1 中的 G_2，要么是 $G_i(i=3,4,5)$ 之一. 由定理之假设，$G(A_1,E(A_1))$ 是 H_1 的真子图. 由 H_1 是连通图，H_1 至少有一顶 $v_4\notin A_1$，它与 A_1 中 v_0 以外的某顶相邻，不妨设与 v_1 相邻. H_2 中的边 $\phi(v_1v_4)$ 与边 $\phi(v_0v_1)$ 相邻，但与边 $\phi(v_0v_2)$，$\phi(v_0v_3)$ 都不相邻. 这说明在 H_2 中边 $\phi(v_0v_i)(i=1,2,3)$ 不形成三角形；而这三条边又是两两相邻的，所以它们都与 H_2 中的一个顶 u_0 相关联. 令 $\phi(v_0v_i)=u_0u_i$，$i=1,2,3$；对 $E(A_1)$ 中的每条边 $v_iv_j(i,j\neq 0)$，H_2 中的边 $\phi(v_iv_j)$ 同时与 u_0u_i，u_0u_j 相邻，但不与别的同 u_0 关联的边相邻，故 $\phi(v_iv_j)=u_iu_j$. 记 $B_1=\{u_0,u_1,u_2,u_3\}$，以 $\psi(v_i)=u_i$，$i=0,1,2,3$，来定义映射 $\psi:A_1\to B_1$，ψ 便是连通图 $G(A_1,E(A_1))$ 到连通图 $G(B_1,E(B_1))$ 的一个同构，此外，ψ 还导出 $G(A_1,E(A_1))$ 到 $G(B_1,E(B_1))$ 的一个边同构 ϕ_1，ϕ_1 是 ϕ 在 $E(A_1)$ 的限制. 与第一种情形一样地可知定理此时亦成立，证毕.

定理 8 无向图 $G(V,E)$ 中，$E(G)\neq\varnothing$，则 $\mathrm{Aut}_1 G(V,E)\cong$

$\mathrm{Aut}^* G(V,E)$的充要条件是

(1) 图1中的 G_1 与 G_2 不全是 $G(V,E)$的连通片,

(2) 图1中的 G_3,G_4,G_5 都不是 $G(V,E)$的连通片.

证 充分性的证明如下:设 $G(V,E)$满足条件(1)与(2),由于 $\mathrm{Aut}^* G(V,E)$是 $\mathrm{Aut}_1 G(V,E)$的子群,所以只要证明 $G(V,E)$的每个边自同构必定是从 $G(V,E)$的一个自同构导出就行了.如果 $G(V,E)$是连通图,由定理2至定理7立即得 $\mathrm{Aut}_1 G(V,E)\cong \mathrm{Aut}^* G(V,E)$.

若 $G(V,E)$是不连通图,设 α 是 $G(V,E)$的一个边自同构.因为对 $G(V,E)$的每个非平凡连通片 H, $G(V,E)$的由 $\alpha(E(H))$形成的子图$\langle\alpha(E(H))\rangle$仍是 $G(V,E)$的一个连通片.如果 $H\cong G_1(V_1,E_1)$或 $H\cong G_2(V_2,E_2)$,则由 $G(V,E)$满足条件(1)知 $H\cong\langle\alpha(E(H))\rangle$,因此,如果把 α 限制在H, α 就是从H的某个自同构导出的.如果 H 即不是 $G_1(V_1,E_1)$,又不是 $G_2(V_2,E_2)$,那么由条件(2), $H\ncong G_i(V_i,E_i)$, $i=1,2,3,4,5$;由定理7,如果把 α 限制在H上,则 α 是由H的某个自同构导出的.把上述讨论应用于 $G(V,E)$的每个非平凡连通片上,便知 α 是由 $G(V,E)$的某个自同构导出的,从而 $\mathrm{Aut}_1 G(V,E)\cong \mathrm{Aut}^* G(V,E)$,证毕.

推论2 设 $G(V,E)$是非空连通无向图,则 $\mathrm{Aut}_1 G(V,E)\cong \mathrm{Aut}^* G(V,E)$的充要条件是 $G(V,E)$不是 $G_i(V_i,E_i)$, $i=3,4,5$.

推论3 $G(V,E)$是连通无向图, $|V(G)|\geqslant 3$,则 $\mathrm{Aut}G(V,E)$, $\mathrm{Aut}_1 G(V,E)$和 $\mathrm{Aut}^* G(V,E)$互相同构的充要条件是 $G(V,E)$不是 $G_i(V_i,E_i)$, $i=3,4,5$.

3.6.2 有限群的 Cayley 图

前面已经看到,对于每个图,都联系着某些群,反过来想,对于每个给定的有限群,是否联系着某个图?一个阶数大于1的群 G 称为由非单位元$h_1,h_2,\cdots,h_k$ 生成的($h_1,h_2,\cdots,h_k$ 称为G 的生

成元)是指 G 的每个元素皆可表为这些生成元的一个有限积.显然,每个阶数大于1的有限群都是由有限个生成元生成的.

定义4 G 是阶数大于1的有限群,$\triangle=\{h_1,h_2,\cdots,h_k\}$是 G 的生成元集合,$D_\triangle(G)$是一个有向图,$D_\triangle(G)$的顶集由 G 中元素组成,把每个生成元 h_i 视为一种颜色,对于 $g_1,g_2\in G$,在 $D_\triangle(G)$中有一条 h_i 色的有向边(g_1,g_2),当且仅当 $g_2=g_1\circ h_i$;且 $D_\triangle(G)$中的边皆染成$\triangle$中的某种颜色,则称有向图 $D_\triangle(G)$是群 G 关于$\triangle$的 Cayley 色图,简称 Cayley 图.□

如果 $h_i^2=e$,e 是单位元,则当 $g_2=g_1\circ h_i$ 时,$g_1=g_2\circ h_i$,这时在 Cayley 图中同时含 h_i 色的两条边(g_1,g_2)与(g_2,g_1),这时可以把两条有向边写成一条无向边 g_1g_2 的形式.

例如 $G=S_3$,$\triangle=\{a,b\}$,其中 $a=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$,$b=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$,则 Cayley 图 $D_\triangle(G)$如图3.10所示.

如果阶数大于1的有限群 G 的生成元集合$\triangle$含 G 中全部非单位元,则 $D_\triangle(G)$中每二顶 g_1,g_2 间同时存在有向边(g_1,g_2)和(g_2,g_1)(两者未必同色),这时 $D_\triangle(G)$是一个完全有向图.

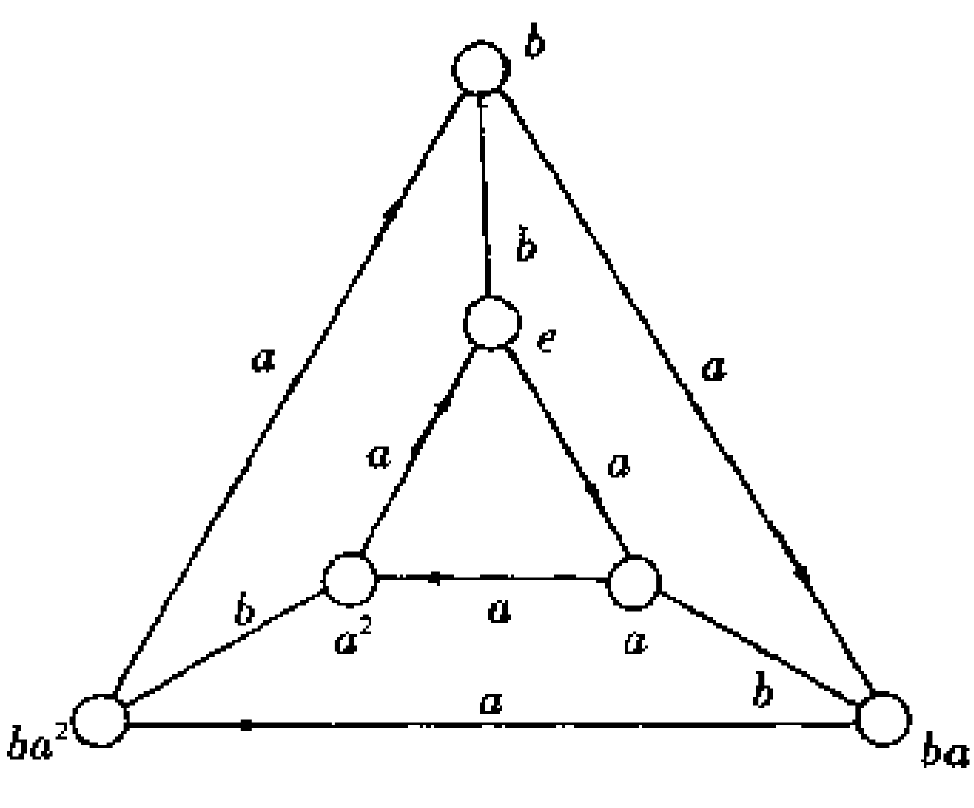


图3.10

对于 Cayley 图 $D_\triangle(G)$,它也有自同构群 $\mathrm{Aut}(D_\triangle(G))$,如果 $\alpha\in\mathrm{Aut}(D_\triangle(G))$,对$\forall(g_1,g_2)\in E(D_\triangle(G))$,使得$(g_1,g_2)$与$(\alpha g_1,\alpha g_2)$同色,则称 α 是保色的.

容易证明，$D_{\triangle}(G)$的一切保色的自同构组成 $\mathrm{Aut}(D_{\triangle}(G))$ 的子群；且不难证明下面定理.

定理 9 设 G 是阶数大于 1 的有限群，$\triangle$是 G 的生成元集合，又设 α 是$D_{\triangle}(G)$顶集的一个置换，α 是$D_{\triangle}(G)$的一个保色自同构的充要条件是，对每个 $g\in G$ 及$h\in\triangle$，$\alpha(gh)=(\alpha(g))h$.

定理 10 $D_{\triangle}(G)$的保色自同构群同构于群 G.

证 设 $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_p\}$，对于 $i=1,2,\cdots,p$，定义 $D_{\triangle}(G)$顶集的置换 α_i 如下：$\alpha_i(g_m)=g_ig_m$，$m=1,2,\cdots,p$. 由于 G 是群，所以 α_i 是一一的满射. 设 $h\in\triangle$，则对每个 i，$1\leqslant i\leqslant p$ 和每个 m，$1\leqslant m\leqslant p$，

$$\alpha_i(g_mh)=g_i(g_mh)=(g_ig_m)h=(\alpha_i(g_m))h,$$

因而，由定理 9，α_i 是$D_{\triangle}(G)$的一个保色自同构.

下面验证由 $\phi(g_i)=\alpha_i$ 定义的映射ϕ是由 G 到$D_{\triangle}(G)$的保色自同构群的一个同构. 这个映射显然是一一的，因为 $i\neq j$ 时，$\alpha_i\neq\alpha_j$.

为证明 ϕ 保持运算，令 $g_i,g_j\in G$，且 $g_ig_j=g_k$，则 $\phi(g_ig_j)=\phi(g_k)=\alpha_k$，而 $\phi(g_i)\phi(g_j)=\alpha_i\alpha_j$，可是对于每个 m，$1\leqslant m\leqslant p$，$\alpha_k(g_m)=g_kg_m$，此外，$g_kg_m=(g_ig_j)g_m=g_i(g_jg_m)=\alpha_i(g_jg_m)=\alpha_i(\alpha_j(g_m))=(\alpha_i\alpha_j)(g_m)$. 因此，对每个 m，$1\leqslant m\leqslant p$，$\alpha_k(g_m)=(\alpha_i\alpha_j)(g_m)$，所以 $\alpha_k=\alpha_i\alpha_j$，这就是说 $\phi(g_ig_j)=(\phi(g_i))(\phi(g_j))$.

最后证明 ϕ 是满射，设 α 是$D_{\triangle}(G)$的一个保色自同构，下面要证明必有某个 i，$1\leqslant i\leqslant p$，使得 $\alpha=\alpha_i$；假设 $\alpha(g_1)=g_i$(g_1 是 G 中单位元)，又设 $g_m\in G$，则 g_m 可以表成生成元的某个乘积，例如 $g_m=h_1h_2\cdots h_t$，$h_i\in\triangle$，$i=1,2,\cdots,t$. 于是

$$\alpha(g_m)=\alpha(g_1g_m)=\alpha(g_1h_1h_2\cdots h_t),$$

逐次应用定理 9 得

$$\begin{aligned}\alpha(g_m)&=(\alpha(g_1))h_1h_2\cdots h_t=(\alpha(g_1))g_m=g_ig_m\\&=\alpha_i(g_m),\end{aligned}$$

于是 $\alpha=\alpha_1$，证毕.

定理 11 Cayley 图弱连通.

证 设 $D_\triangle(G)$中$\triangle=\{h_1,h_2,\cdots,h_k\}$，$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_p\}$，其中 g_1 是单位元 e. $\forall g\in G$，则 $g^{-1}=h_{i_1},h_{i_2},\cdots,h_{i_t}$，于是 $e=gg^{-1}=gh_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_t}$，可见 g 和 e 做为 $D_\triangle(G)$的顶，存在从 g 到 e 的有向轨，由 g 的任意性，$D_\triangle(G)$弱连通，证毕.

定理 12（Frucht） 对每个有限群 G，存在一个无向图 $H(V,E)$，使得 $\mathrm{Aut}H(V,G)\cong G$.

证 G 是一阶群时，$\mathrm{Aut}(K_1)\cong G$. 下面考虑高于 1 阶的有限群$\langle G,\circ\rangle$，$G=\{g_1,g_2,\cdots,g_p\}$，$\triangle=\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$是有限群 G 的生成元集合，我们先构作 Cayley 图 $D_\triangle(G)$. 由定理 10，$D_\triangle(G)$ 的保色自同构群与 G 同构. 下面把 $D_\triangle(G)$转化成一个无向图 $H(V,E)$：把 $D_\triangle(G)$中颜色为 h_k 的有向边(g_i,g_j)用无向轨 $g_iu_{ij}u'_{ij}g_j$ 代替，且从顶点 u_{ij}起作一轨P_{ij}，其长为 $2k-2$，从顶 u'_{ij} 起作一轨 P'_{ij}，其长为 $2k-1$. 对 $D_\triangle(G)$的每条有向边皆如上处理，见图 3.11，容易看出，在上述构作出的无向图 H 中，可以读出 $D_\triangle(G)$中每边方向及颜色，且 $D_\triangle(G)$的每个保色自同构自然导出 $H(V,E)$的一个自同构，反之亦然，证毕.

定理 13 对于给定的 $n(\geqslant 3)$阶循环群 G，必存在三次正则图 $H(V,E)$，使得 $\mathrm{Aut}H(V,E)\cong G$.

证 构作 $H(V,E)$如下：$V(H)=\{u_i,v_i,w_i,x_i,y_i,z_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$. $u_iv_i,u_iy_i,u_iz_i,v_iw_i,w_ix_i,w_iz_i,y_iz_i\in E(H)$，$i=1,2,\cdots,n$，$v_ny_1,v_iy_{i+1}\in E(H)$，$i=1,2,\cdots,n-1$；$x_1x_n,x_ix_{i+1}\in E(H)$，$i=1,2,\cdots,n-1$.
可见 $d(v)\equiv 3$，$v\in V(H)$，即 $H(V,E)$是三次正则图.

设 $v\in H(V,E)$，v 与三边 e_1,e_2,e_3 相关联，记 μ_1 是含 v 的最小圈之长，μ_2 是含 v 的另一圈之长，μ_3 是含 v 的最大圈之长，把(μ_1,μ_2,μ_3)称为顶 v 在 $H(V,E)$中的类型，若只有两个圈含

v,则记成$(0,\mu_2,\mu_3)$类,若只有一个圈含 v,则记成$(0,0,\mu_3)$类,若无含 v 的圈,则记成(0,0,0)类.

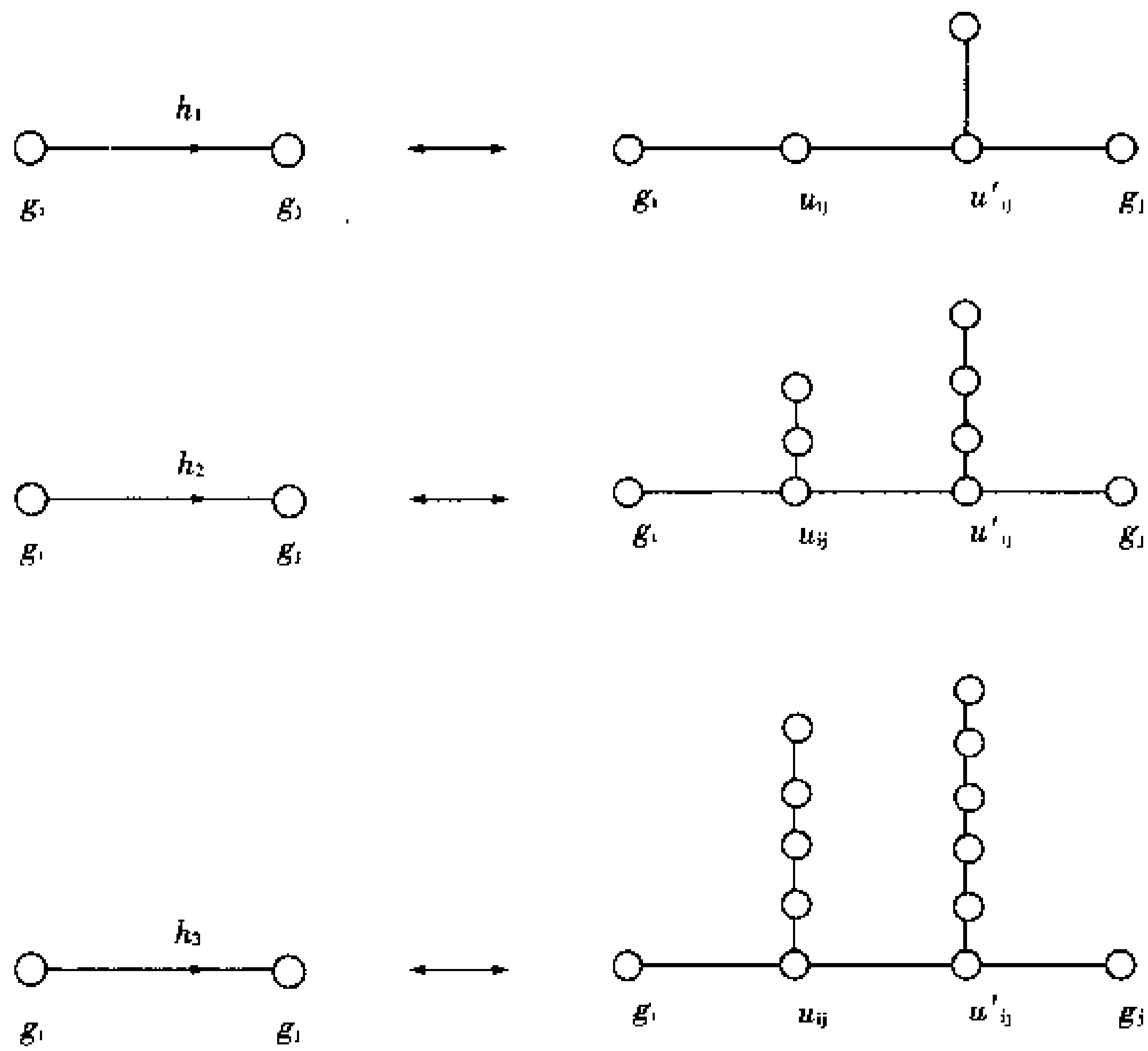


图 3.11

在我们构作的 $H(V,E)$中,

u_i,z_i 是(3,4,5)类型的;v_i 是(4,7,9)类型的;

w_i 是(4,7,7)类型的;y_i 是(3,7,8)类型的;

$$x_i\text{ 是}\begin{cases}(n,7,7)\text{类型的,当 } n\leqslant 7\text{ 时;}\\(7,7,n)\text{类型的,当 } 7<n<11\text{ 时;}\\(7,7,11)\text{类型的,当 } n\geqslant 11\text{ 时.}\end{cases}$$

由 $H(V,E)$的造法容易证明下面定义的映射 $\alpha\in\mathrm{Aut}H(V,E)$:

$$\alpha(u_n)=u_1,\alpha(u_i)=u_{i+1},$$

$$\alpha(v_n)=v_1,\alpha(v_i)=v_{i+1},$$
$$\alpha(w_n)=w_1,\alpha(w_i)=w_{i+1},$$
$$\alpha(x_n)=x_1,\alpha(x_i)=x_{i+1},$$
$$\alpha(y_n)=y_1,\alpha(y_i)=y_{i+1},$$
$$\alpha(z_n)=z_1,\alpha(z_i)=z_{i+1},$$

$i=1,2,\cdots,n-1$. 由此可推知 $\alpha^i\in \mathrm{Aut}H(V,E)$, $i=1,2,\cdots,n$, 且当且仅当 $i\equiv j(\mathrm{mod}n)$时,才有 $\alpha^i=\alpha^j$.

设 $\beta\in \mathrm{Aut}H(V,E)$,我们要证明对某个 i, $1\leqslant i\leqslant n$,有 $\beta=\alpha^i$,这就证实了 $\mathrm{Aut}H(V,E)$是由 α 生成的 n 阶循环群,为此,分两种情形讨论.

情形 1 $\beta(v_1)=v_1$,由于 u_1,w_1,y_2 与 v_1 相邻,且具有不同类型,因此在 β 作用下,它们不变;对 u_1 作同样论证,可得 $\beta(y_1)=y_1$, $\beta(z_1)=z_1$. 由于 v_1 与 z_1 同在 β 下不变的顶 w_1 相邻,且 v_1 与 z_1 在 β 下也不变,又知 $\beta(x_1)=x_1$,因此脚标为 1 的顶在 β 下都不变.

顶 u_1,z_1 与 v_n 都与 y_1 相邻;由于在 β 下 v_1,z_1,y_1 都不变,所以 v_n 也不变. 再从 v_n 开始,便可推知一切脚标为 n 的顶在 β 下不变. 由此可推出 $\beta(v_{n-1})=v_{n-1}$,如此下去,便可得 $H(V,E)$ 的全部顶在 β 下不变,从而 β 是 $\mathrm{Aut}H(V,E)$的单位元,或者说 $\beta=\alpha^n$.

情形 2 $\beta(v_1)\neq v_1$. 由于 v_1 的类型与其它顶不同,所以必定有 $\beta(v_1)=v_j$, j 是满足 $2\leqslant j\leqslant n$ 的某个整数. 但我们知道, $\alpha^{j-1}(v_1)=v_j$,因此, $(\alpha^{j-1})^{-1}\beta(v_1)=v_1$,由情形 1, $(\alpha^{j-1})^{-1}\beta=\alpha^n$,于是 $\beta=\alpha^{j-1}$,证毕.

习题三

1. 从$\{1,2,\cdots,n\}$中取编号,问 C_n(长为 $n\geqslant 3$ 的圈)与 P_n(长

为 $n\geqslant 2$ 的轨)各有多少种互不相同的顶点编号法?

2. 从$\{1,2,\cdots,n\}$中取编号,$K_{p,p}$有多少种互不相同的顶点编号法?

3. 无向图 $G(V,E)$中,$E\neq\phi$,证明:$\mathrm{Aut}_1G(V,E)$与 $\mathrm{Aut}^*G(V,E)$的确都是群.

4. 设无向图 $G(V,E)$中,$E\neq\phi$,求 $\mathrm{Aut}G(V,E)\cong\mathrm{Aut}_1G(V,E)\cong\mathrm{Aut}^*G(V,E)$的一个充要条件.

5. 对于尽可能多的自然数 n,求出图 $G(V_n,E_n)$,使得 $|\mathrm{Aut}G(V_n,E_n)|=n$.

6. 对于 4 阶循环群,分下面两种情形构作相应的 Cayley 图:(1)$\triangle$只一个元素;(2)$\triangle$含 3 个元素.

7. 证明定理 9.

8. 求图 3.12 中的 $G(V,E)$的 Cayley 图 $D_\triangle(G)$的$\mathrm{Aut}(D_\triangle(G))$.

9. 求最小自然数 $p>1$,使得存在一个 p 阶无向连通图 $G(V,E)$满足 $|\mathrm{Aut}G(V,E)|=1$.

10. 求一个 4 次正则无向图 $G(V,E)$,使得$|\mathrm{Aut}G(V,E)|=1$.

11. 求一个连通度为 1 的三次正则无向图 $G(V,E)$,使得$|\mathrm{Aut}G(V,E)|=1$.

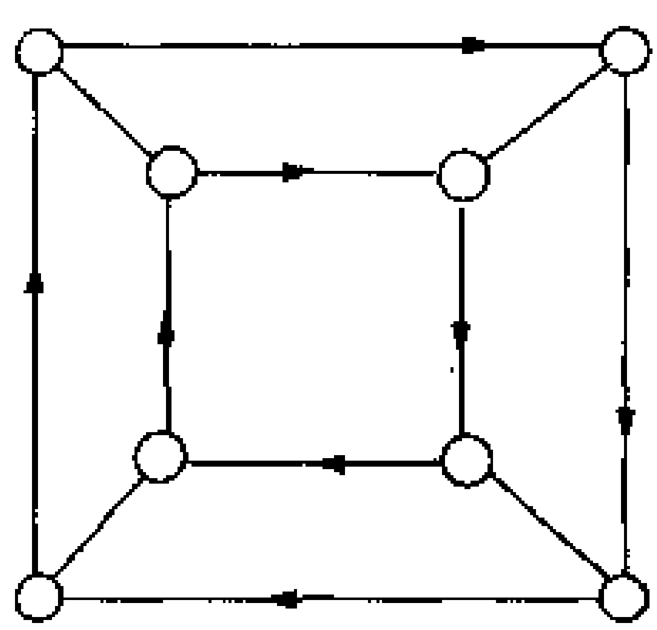


图 3.12

12. 对于一个给定的有限群 G,试定出无穷多个互不同构的图,它们的自同构群都与 G 同构.

第四篇　离散数学中的空间、矩阵和拟阵

4.1　圈空间和断集空间

4.1.1　圈空间

令 $F_2=\{0,1\}$，在 F_2 上定义$\oplus$与·两种运算如下：

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

即$\oplus$是 mod2 意义下运算，·是一般的算术乘，容易验证$\langle F_2,\oplus,\cdot\rangle$是一个域，称之为 0－1 二元域，简写成 F_2，在 F_2 上，$\oplus$与·满足结合律，分配律和交换律.

若$(q_1,q_2,\cdots,q_n)$与$(r_1,r_2,\cdots,r_n)$两向量中，分量皆属于 F_2，定义$(q_1,q_2,\cdots,q_n)\oplus(r_1,r_2,\cdots,r_n)=(q_1\oplus r_1,q_2\oplus r_2,\cdots,q_n\oplus r_n)$. 例如$(1,1,\cdots,1)\oplus(1,1,\cdots,1)=(0,0,\cdots,0)$.

设 $G(V,E)$是一个标志的无向图，$E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_\varepsilon\}$，$\forall Q\subseteq E(G)$，令

$$q_i=\begin{cases}1,e_i\in Q,\\0,e_i\notin Q,\end{cases}$$

记

$$Q=(q_1,q_2,\cdots,q_\varepsilon),$$

于是 Q 的全体组成 F_2 上的一个 ε 维的线性空间，记这个空间为 $\mathscr{E}(G)$，称为 G 的边空间，每个 Q 表示 $E(G)$ 的一个边子集. $\mathscr{E}(G)$ 有 2^{ε} 个向量，$(1,0,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots(0,0,\cdots,0,1)$ 是它的一组基.

定义 1 设 T 是连通图 $G(V,E)$ 的生成树，e 是余树的一条边(即 $e\notin E(T)$)，则 $T+e$ 上的唯一圈称为 G 的基本圈；关于生成树 T 的全部基本圈 $C_1,C_2,\cdots,C_{\varepsilon-\nu+1}$ 叫做 G 的一个基圈组，其中 $|V|=\nu$. □

定理 1 设 $C_1,C_2,\cdots,C_{\varepsilon-\nu+1}$ 是图 G 关于生成树 T 的一个基圈组，则 $E(C_1),E(C_2),\cdots,E(C_{\varepsilon-\nu+1})$ 做为 $\mathscr{E}$ 中的 $\varepsilon-\nu+1$ 个向量是线性无关的.

证 图为每个基圈含有其它基圈不含的边 e，(e 是余树上的一条边)，故

$$\sum_{i=1}^{\varepsilon-\nu+1} a_iC_i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, i = 1,2,\cdots,\varepsilon-\nu+1,$$

其中 $a_i\in F_2$，故 $E(C_1),E(C_2),\cdots,E(C_{\varepsilon-\nu+1})$ 是线性无关组，证毕.

我们把边子集 Q，Q 在 $\mathscr{E}$ 中的向量形式以及 Q 的导出子图 $G[Q]$ 混为一谈，认为是一件东西.

把图 $G(V,E)$ 中无公共边的圈之并与零向量组成的集合记成 $\mathscr{C}(G)$.

定理 2 $\mathscr{C}(G)$ 在 F_2 上构成线性空间.

证 $\forall B_1,B_2\in\mathscr{C}(G)$，若成立 $B_1\oplus B_2\in\mathscr{C}(G)$，则容易验证 $\mathscr{C}(G)$ 满足在 F_2 上构成线性空间的一切条件，下面证明 $B_1\oplus B_2\in\mathscr{C}(G)$ 是真的.

(1) B_1 或 B_2 是零向量时，命题自然成立.

(2) B_1 与 B_2 皆非零向量，分两种情形讨论.

(i) 对每个 i，$1\leqslant i\leqslant\varepsilon$，$B_1$ 与 B_2 的第 i 个分量不同时为 1，则 $B_1\oplus B_2$ 也是无公共边的圈之并，故 $B_1\oplus B_2\in\mathscr{C}(G)$.

(ii) 有些同位分量在 B_1 与 B_2 中皆为 1,则在 $B_1 \oplus B_2$ 中,与这几个分量 1 对应的边之端点次数,比在 B_1 与 B_2 中同一项的次数之和少一个偶数,故 $B_1 \oplus B_2$ 中同一项的次数和少一个偶数,故 $B_1 \oplus B_2$ 中的每顶皆偶次,其每个连通片皆 Euler 图,从而 $B_1 \oplus B_2$ 是一些无公共边的圈之并,即 $B_1 \oplus B_2 \in \mathscr{C}(G)$,证毕.

定理 3 G 是连通图,则 $\mathscr{C}(G)$是 $\varepsilon-\nu+1$ 维线性空间,关于任一生成树的基圈组是 $\mathscr{C}(G)$的一个基底.

证 只欠证 $\forall B \in \mathscr{C}(G)$, B 是关于任一生成树 T 的基圈组的线性组合(组合系数取自 F_2).事实上,B 是零向量时,结论自然成立,下面考虑 B 是非零向量,于是 B 图中至少一条边是余树边.设 $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}$是 B 图中余树边全体,它们对应的基圈分别为 $C_{i_1}, C_{i_2}, \cdots, C_{i_k}$,令

$$B' = \sum_{j=1}^{k} C_{i_j},$$

这里$\sum$中加法是$\oplus$;由定理2,$B' \in \mathscr{C}(G)$,$B' \oplus B \in \mathscr{C}(G)$;若 $B \oplus B'$ 是非零向量,$B \oplus B'$ 对应的图只含生成树上的边,由 $\mathscr{C}(G)$ 之定义,这是不可能的,故 $B \oplus B'$ 是零向量,进而 $B = B' = \sum_{j=1}^{k} C_{i_j}$,证毕.

以后我们称 $\mathscr{C}(G)$是图 G 的圈空间.

若 G 有 ω 个连通片,则 $\mathscr{C}(G)$的维数是 $\varepsilon-\nu+\omega$;连通图 G 的圈空间中有 $2^{\varepsilon-\nu+\omega}$个向量,不连通图的 $\mathscr{C}(G)$中向量个数是 $2^{\varepsilon-\nu+\omega}$个.事实上,对连通图而言,因为 $\mathscr{C}(G)$ 中每个向量由 $\varepsilon-\nu+1$个基向量线性表出,而线性表达式中,每个基向量的组合系数有 0 与 1 两种选择,故$|\mathscr{C}(G)| = 2^{\varepsilon-\nu+1}$.

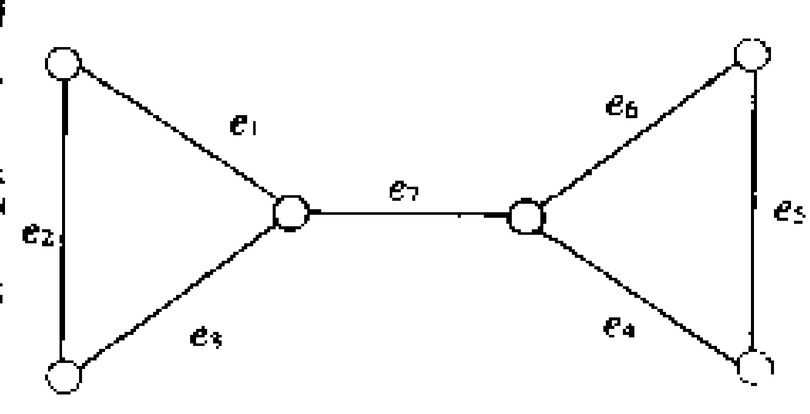


图 4.1

例 1 求图 4.1 中 $\mathscr{C}(G)$的全集向量,且画出相应子图.

解 $\varepsilon=7,\nu=6$, $\mathscr{C}(G)$中有 $2^{\varepsilon-\nu+1}=2^2=4$ 个向量.取生成树为 $T=G-\{e_2,e_5\}$,则有$\varepsilon-\nu+1=2$ 个基圈:$C_1=(1,1,1,0,0,0,0)$,$C_2=(0,0,0,1,1,1,0)$,除 C_1 与 C_2 外,$\mathscr{C}(G)$中还有零向量$(0,0,0,0,0,0,0)$.第四个向量是 $B=C_1\oplus C_2=(1,1,1,1,1,1,0)$.

$\mathscr{C}(G)$中三个非零向量如图 4.2 所示.

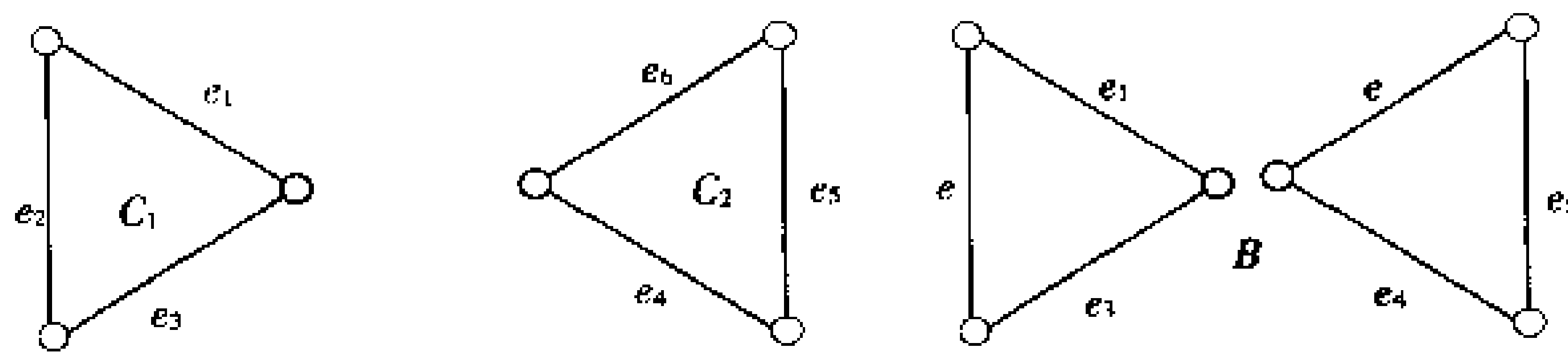


图 4.2

4.1.2 断集空间

定义 2 $S\subseteq E(G)$,G 为连通图,$G-S$ 有两个连通片,但从 G 中删除S 的真子集仍得连通图,则称 S 是G 的一个割集.□

在割集的定义中,要特别注意它的极小性,即 S 这个集合再缩小就割不断连通图G 了.

例如图 4.3 中,$\{e_1,e_2,e_3\}$不是割集,因为 $G-\{e_1,e_2,e_3\}$有三个连通片;$\{e_1\}$,$\{e_3\}$,$\{e_5\}$也不是割集,因为 $G-\{e_1\}$,$G-\{e_3\}$,$G-\{e_5\}$仍连通,而 $G-\{e_1,e_3\}$有两个连通片,$\{e_1,e_3\}$已极小化,$\{e_1,e_3\}$是一个割集.事实上,在此图上,任意两边皆构成一个割集.

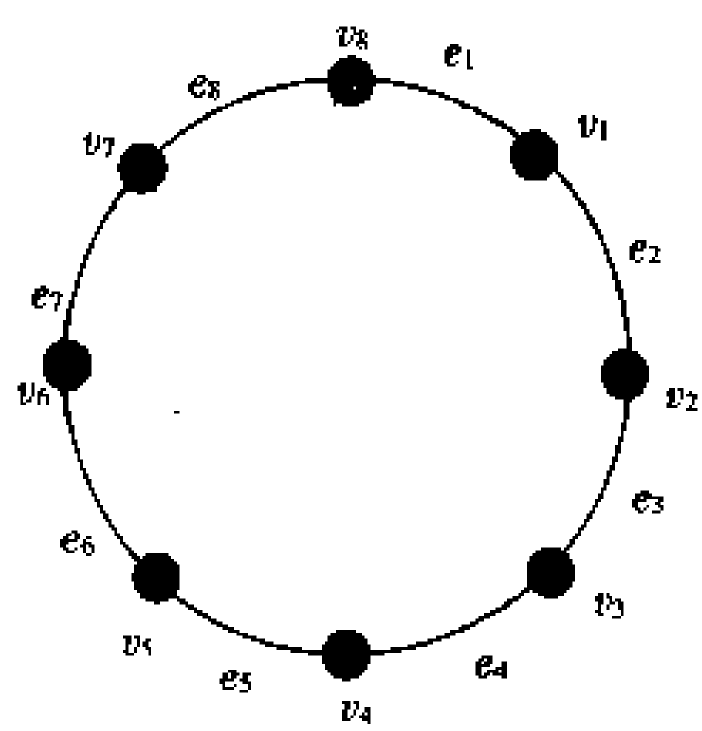


图 4.3

定义 3 V_1 是连通图 $G(V,E)$的非空顶真子集,即 $V_1\subset V(G)$,$V_1\neq\varnothing$,一端在 V_1,另一端在 $V-V_1=\overline{V_1}$的边组成的集

合,记成$(V_1,\overline{V_1})$,$(V_1,\overline{V_1})$称为 G 的一个断集.□

由定义3和定义2知,割集是一个断集,反之未必成立.例如图4.3中

$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}=(\{v_1,v_3\},\{v_2,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\})$,但$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$不是割集,"大"了一些.

我们把连通图 G 中一切断集与零向量组成的 $\mathscr{E}(G)$中的向量集合记成 $\mathscr{S}(G)$.

定理4 $\mathscr{S}(G)$在域 F_2 上构成线性空间.

证 只需证明,若 $S_1,S_2\in\mathscr{S}(G)$,则 $S_1\oplus S_2\in\mathscr{S}(G)$,不妨设 $S_1\neq S_2$,不然,$S_1\oplus S_2$ 是零向量,自然有 $S_1\oplus S_2\in\mathscr{S}(G)$.令 $S_1=(V_1,\overline{V_1})$,$S_2=(V_2,\overline{V_2})$,$V_{11}=V_1\cap V_2$,$V_{22}=\overline{V_1}\cap\overline{V_2}$,$V_3=V_{11}\cup V_{22}$,由图4知 $S_1\oplus S_2=(V_3,\overline{V_3})\in\mathscr{S}(G)$.事实上,$S_1$ 中的边有图4.4中上半部分的四种类型,S_2 中的边有图4中下半部分的四种类型,经$\oplus$运算后,$S_1\oplus S_2$ 中的边只能是图4.4中粗实线类型的,它们恰为$(V_3,\overline{V_3})$,证毕.

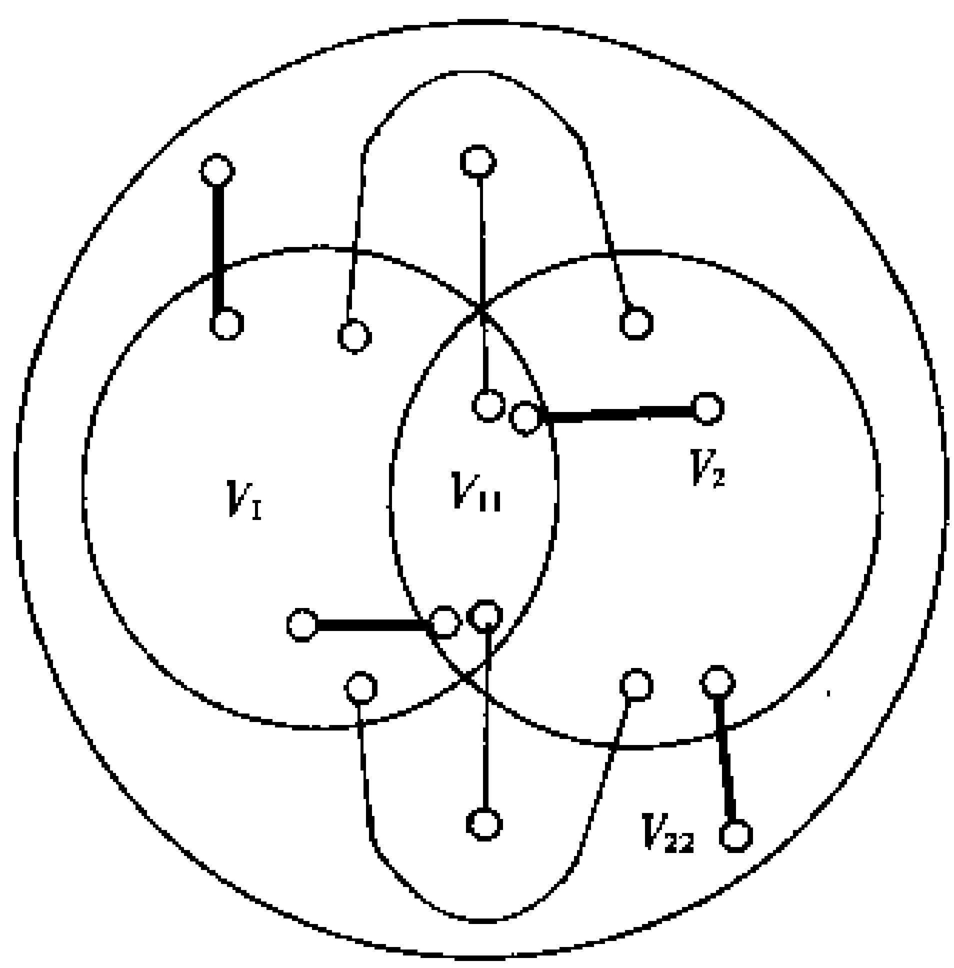


图4.4

以后把 $\mathscr{S}(G)$称为连通图 G 的断集空间.

显然,割集与断集之中至少有一条边是生成树上的边.

定义4 连通图 G 中只含生成树 T 上一条边的割集叫做关于T 的基本割集,关于 T 的基本割集 $S_1,S_2,\cdots,S_{\nu-1}$叫做关于生成树 T 的基本割集组.□

定理 5　连通图 G 中的断集空间 $\mathscr{S}(G)$ 的维数是 $\upsilon-1$；对于任意给定的生成树 T，关于 T 的基本割集组 $S_1,S_2,\cdots,S_{\upsilon-1}$ 是 $\mathscr{S}(G)$ 的一组基.

证　与定理 1 相似，容易证明 $S_1,S_2,\cdots,S_{\upsilon-1}$ 是线性无关的，只欠证 $\forall S\in\mathscr{S}(G)$，$S$ 可由 $S_1,S_2,\cdots,S_{\upsilon-1}$ 线性表出.事实上，因 S 是断集，S 上有 T 的边，令 $S=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k},e_{i_{k+1}},\cdots,e_{i_n}\}$，前 k 条边是生成树 T 上的边.令 $S_{i_j}(j=1,2,\cdots,k)$ 是含 e_{i_j} 的基本割集，由于 $\mathscr{S}(G)$ 是线性空间，$S_{i_j}\in\mathscr{S}(G)$，故

$$S'=\sum_{j=1}^{k}S_{i_j}\in\mathscr{S}(G),$$

$$S''=S\oplus S'\in\mathscr{S}(G),$$

但 S'' 中已不含 T 上之边，则 S'' 不是断集，因为断集中至少有一条树边，所以 S'' 是零向量，从而 $S=S'=\sum_{j=1}^{k}S_{i_j}$，证毕.

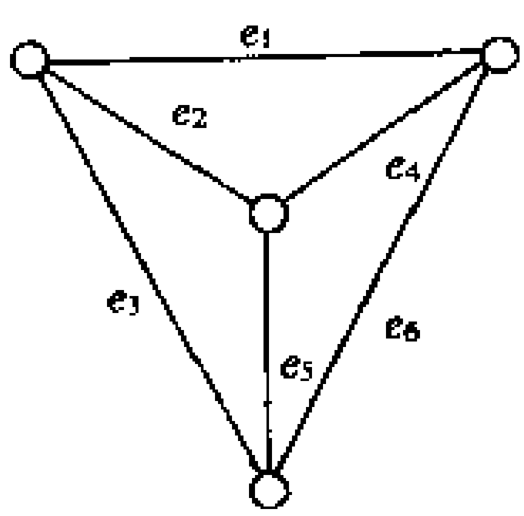


图 4.5

例 2　求图 4.5 中 $\mathscr{S}(G)$ 的基底和 $\mathscr{S}(G)$ 的一切向量.

解　$\upsilon=4$，$\varphi(G)$ 中有 $2^{\upsilon-1}=2^3=8$ 个向量，其中 3 个是基向量，一个是零向量，取生成树为 $G[\{e_1,e_2,e_3\}]$，相应的基向量为 $S_1=(1,0,0,1,0,1)$，$S_2=(0,1,0,1,1,0)$，$S_3=(0,0,1,0,1,1)$.由基底 $\{S_1,S_2,S_3\}$ 线性表出的其它五个向量是

$$S_4=S_1\oplus S_2=(1,1,0,0,1,1),$$

$$S_5=S_1\oplus S_3=(1,0,1,1,1,0),$$

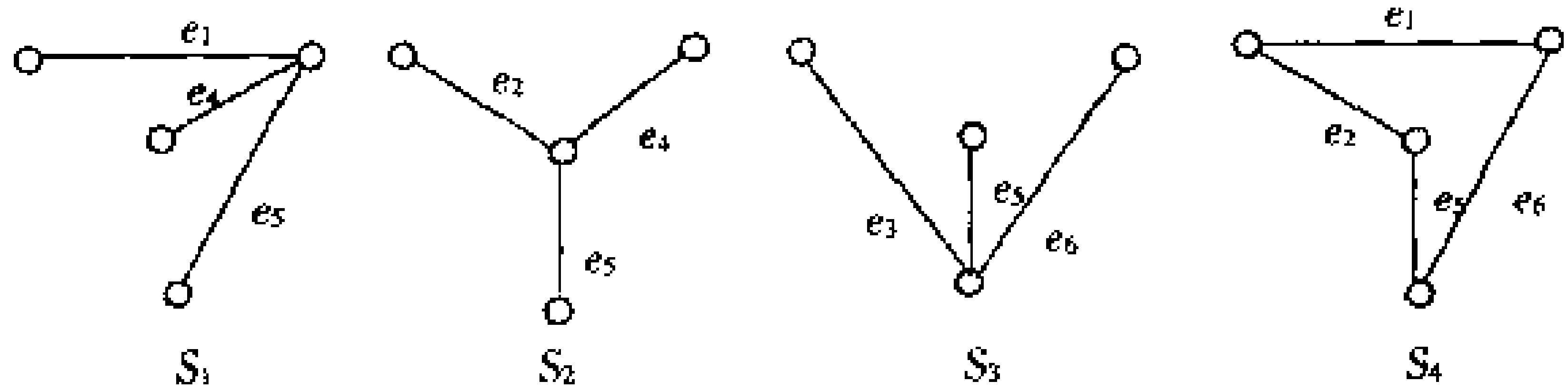
$$S_6=S_2\oplus S_3=(0,1,1,1,0,1),$$

$$S_7=S_1\oplus S_2\oplus S_3=(1,1,1,0,0,0),$$

$$S_8=O\cdot S_1\oplus O\cdot S_2\oplus O\cdot S_3=(0,0,0,0,0,0).$$

S_1 至 S_7 见图 4.6：

我们看到,$\mathscr{C}(G)$与$\mathscr{S}(G)$可能有相同的向量,断集可能是圈,例如例 2 中的 S_4,S_5,S_6.



作为$\mathscr{E}(G)$的两个子空间,$\mathscr{C}(G)$与$\mathscr{S}(G)$是正交的.

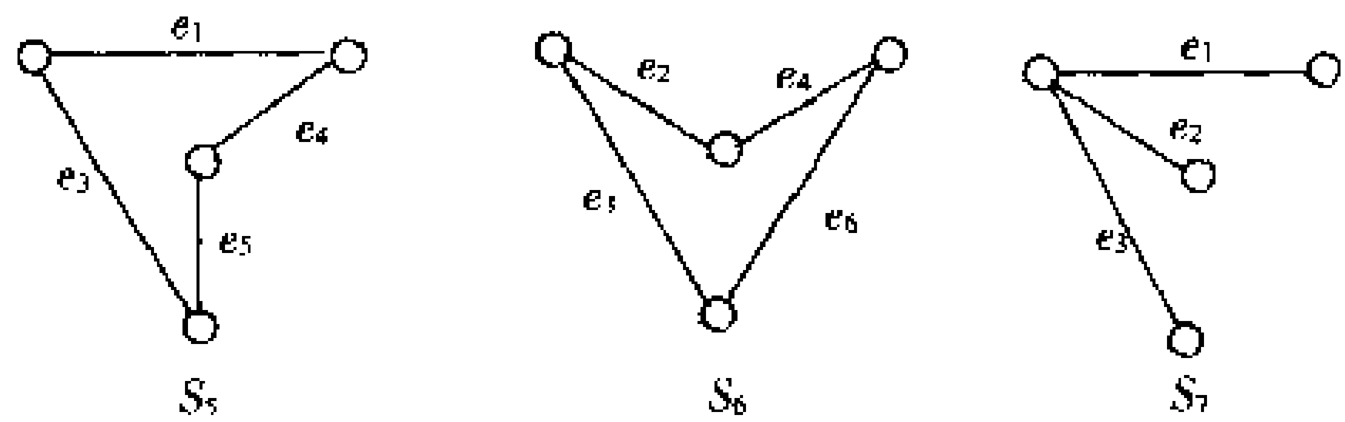


图 4.6

定理 6　$\forall B\in\mathscr{C}(G)$, $\forall S\in\mathscr{S}(G)$,则 $B\perp S$,即 $B\cdot S$ 是零向量,其中 G 是连通图,$\cdot$是 F_2 中的数量积.

证　若 B 与 S 中有零向量,结论自然成立.若 B 与 S 皆非零向量,因为圈若与断集有公共边,则公共边之条数是偶数,所以 B 与 S 中同序号分量皆为 1 的现象发生偶数次,从而 $B\cdot S$ 是零向量;事实上,这时,$B\cdot S$ 的运算只发生同序号皆为 1 的两分量积为 1 的求和,同序号有零时只能算出 0,而偶数个 1$\oplus$后为零.证毕.

4.2　关联矩阵和邻接矩阵

4.2.1　关联矩阵

定义 5　设 G 是无向单图,G 的关联矩阵 $B(G)$ 是如下矩阵 $B(G)=(b_{ij})_{v\times\varepsilon}$,其中

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{ 与 }e_j\text{ 相关联},\\ 0, & v_i\text{ 与 }e_j\text{ 不关联},\end{cases}$$

$v_i \in V(G), e_j \in E(G)$. □

例如 K_4 的关联矩阵为(见图 4.7):

$$B(K_4)=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\end{array}$$

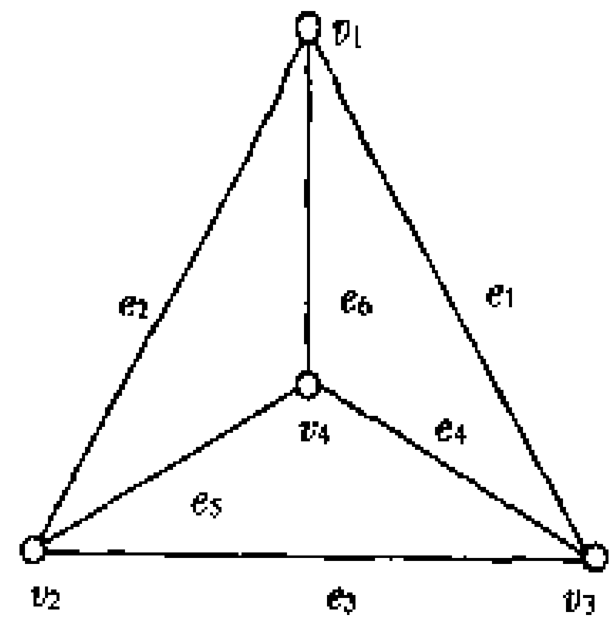


图 4.7

每个标志图有唯一的关联矩阵;反之,若给出一个图的关联矩阵,则可由此关联矩阵画出相应的图,关联矩阵含有图的一切信息,原则上,通过对图的关联矩阵的研究,可以得到图的一切性质.

关联矩阵每列恰两个 1,其每行的 1 的个数是该行对应的顶的次数;关联矩阵的每一行向量皆 $\mathscr{S}(G)$中的向量.

定义 6 从单图 G 的关联矩阵中任删除一行所得之矩阵叫做G 的基本关联矩阵;记之为 $B_f(G)$. □

定理 7 连通图 G 的关联矩阵的秩为$\upsilon-1$.

证 因为 $B(G)$的每一行皆 $\mathscr{S}(G)$的向量,所以 $r(B)\leqslant \upsilon-1$,下证 $r(B)\geqslant \upsilon-1$,这里 $r(G)$表示矩阵 $B(G)$的秩.反证之,若 $r(B)<\upsilon-1$,则 $B(G)$中任 $\upsilon-1$ 行线性相关,即对行向量 $B_{i_1}, B_{i_2},\cdots,B_{i_{\upsilon-1}}$,存在不全为 0 的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{\upsilon-1}\in F_2$,使得

$$\sum_{j=1}^{\upsilon-1} k_j B_{i_j} = (0,0,\cdots,0).$$

不妨设 $k_1,k_2,\cdots,k_{\upsilon-1}$中前 m 个皆为 1,后面的皆零,$2\leqslant m\leqslant \upsilon-1$;不难看出,以 $B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_m}$为行组成的$m$ 行ε 列的子矩阵 $\bar{B}$ 每列恰两个 1 或每列皆 0.

我们把 $V(G)$划分成两个子集:$V_1=\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_m}\}$, $V_2=V-V_1$,由 B 结构知,$(V_1,V_2)=\phi$, $V_1\cap V_2=\phi$,于是 G 是不连通图,与 G 为连通图矛盾,证毕.

定理 8 G 是连通图,则 $r(B_f(G))=\upsilon-1$.

定理 8 的证明与定理 7 的证明雷同.

推论 1 G 有 ω 个连通片,则

$$r(B(G))=r(B_f(G))=\upsilon-\omega.$$

推论 2 G 是连通图的充要条件是

$$r(B(G))=r(B_f(G))=\upsilon-1.$$

定理 9 $e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_{\upsilon-1}}$是图 G 的生成树的边,当且仅当这 $\upsilon-1$条边在 $B_f(G)$中对应的列构成的行列式不为零.

证 设定理 9 所称的行列式对应的矩阵为 B_1,以 B_1 为基本关联矩阵的图为 $G[\{e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_{\upsilon-1}}\}]$,它有 υ 个顶,$\upsilon-1$条边.又行列式$|B_1|\neq0$,即 $r(B_1)=\upsilon-1$,由推论 2,$G[\{e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_{\upsilon-1}}\}]$是连通图.又它的边数是其顶数减 1,故 $G[\{e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_{\upsilon-1}}\}]$是树,它是 G 的生成树.

反之,若 $e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_{\upsilon-1}}$是 G 的生成树之边,$G[\{e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_{\upsilon-1}}\}]$的基本关联矩阵是 B_1,故 $r(B_1)=\upsilon-1$,B_1 是满秩方阵,故$|B_1|\neq0$,证毕.

对于比较小的图,用定理 9 可以得出生成树的清单.

例 3 求图 4.7 中所有的生成树.

解 基本关联矩阵为

$$B_f(K_4)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\\1&0&1&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix}e_1&e_2&e_3\end{matrix}\qquad\qquad\begin{matrix}e_1&e_2&e_4\end{matrix}\qquad\qquad\begin{matrix}e_1&e_2&e_5\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=0,\qquad\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=1,\qquad\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{vmatrix}=1,$$

$$\overset{\begin{matrix}e_1&e_2&e_6\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{vmatrix}}=1,\quad \overset{\begin{matrix}e_1&e_3&e_4\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}}=1,\quad \overset{\begin{matrix}e_1&e_3&e_5\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}}=1,$$

$$\overset{\begin{matrix}e_1&e_3&e_6\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}}=-1=1,\quad \overset{\begin{matrix}e_1&e_4&e_5\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}}=-1=1,\quad \overset{\begin{matrix}e_1&e_4&e_6\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&1&0\end{vmatrix}}=0,$$

$$\overset{\begin{matrix}e_1&e_5&e_6\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}}=-1=1,\quad \overset{\begin{matrix}e_2&e_3&e_4\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}}=1,\quad \overset{\begin{matrix}e_2&e_3&e_5\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&0\end{vmatrix}}=1,$$

$$\overset{\begin{matrix}e_2&e_3&e_6\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{vmatrix}}=1,\quad \overset{\begin{matrix}e_2&e_4&e_5\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}}=-1=1,\quad \overset{\begin{matrix}e_2&e_4&e_6\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}}=1,$$

$$\overset{\begin{matrix}e_2&e_5&e_6\end{matrix}}{\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&0\end{vmatrix}}=0,\quad \overset{\begin{matrix}e_3&e_4&e_5\end{matrix}}{\begin{vmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}}=0,\quad \overset{\begin{matrix}e_3&e_4&e_6\end{matrix}}{\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&1&0\end{vmatrix}}=1$$

$$\overset{\begin{matrix}e_3&e_5&e_6\end{matrix}}{\begin{vmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}}=-1=1,\quad \overset{\begin{matrix}e_4&e_5&e_6\end{matrix}}{\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}}=-1=1.$$

上述 20 个行例式中取非零 者共 16 个,相应的边子集:

$$\{e_1,e_2,e_4\},\{e_1,e_2,e_5\},\{e_1,e_2,e_6\},\{e_1,e_3,e_4\},$$
$$\{e_1,e_3,e_5\},\{e_1,e_3,e_6\},\{e_1,e_4,e_5\},\{e_1,e_5,e_6\},$$
$$\{e_2,e_3,e_4\},\{e_2,e_3,e_5\},\{e_2,e_3,e_6\},\{e_2,e_4,e_5\},$$

$\{e_2,e_4,e_6\},\{e_3,e_4,e_6\},\{e_3,e_5,e_6\},\{e_4,e_5,e_6\}$,
这16个边子集导出16棵生成树，这一结果正是Cayley公式 $\tau(G)=v^{v-2}=4^{4-2}=16$ 的结果.

下面讲有向图的关联矩阵.

定义7 设 G 是有向图，称矩阵 $B(G)=(b_{ij})_{v\times\varepsilon}$ 为有向图 G 的关联矩阵，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}1, v_i \text{ 是 } e_j \text{ 之尾},\\ -1, v_i \text{ 是 } e_j \text{ 之头},\\ 0, e_j \text{ 的头尾皆非 } v_i.\end{cases}\square$$

例如图4.8中的有向图 G 的关联矩阵为

$$B(G)=\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & -1 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & -1 & -1\end{matrix}.$$

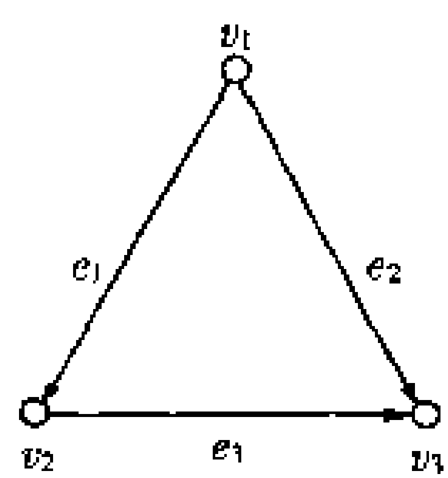


图4.8

与无向图相似地，把 $B(G)$ 的任一行删除，得到的 $B(G)$ 的子矩阵记成 $B_f(G)$，称 $B_f(G)$ 为有向图 G 的基本关联矩阵，且有结论：

(1) G 是弱连通图，则 $r(B(G))=r(B_f(G))=v-1$.

(2) G 的底图有 ω 个连通片，则

$$r(B(G))=r(B_f(G))=v-\omega.$$

与无向图不同的是在有向图中，计算在实数域中进行.

定理10 有向图 G 的关联矩阵 $B(G)$ 的任意子行列式取值范围是 $\{0,-1,1\}$.

证 设 B_0 是 $B(G)$ 中第 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 行与第 $j_1,j_2,j_3,\cdots,j_m$ 列的元素构成的 $m\times m$ 的子矩阵.

(1) 若 B_0 中每列1与-1各出现恰一次，则 B_0 各行向量之和为零，则 $|B_0|=0$.

(2) 若 B_0 中有一列元素皆0，则 $|B_0|=0$.

(3) 若 B_0 中有一列只一个非零元素,我们按上述这一列的代数余子式展开行列式 $|B_0|$,得 $|B_0| = \pm|B_1|$,B_1 比 B_0 的阶数少 1;若 $|B_1| = 0$,则 $|B_0| = 0$;若 $B_1 \neq 0$,则 B_1 中有一列只有一个非零元素,可继续用 $|B_1|$ 的代数余子式表示 $|B_1|$,直至得 $|B_0| \in \{0, -1, +1\}$,证毕.

定理 11 $e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_{v-1}}$ 是 G 的生成树的边的充要条件是这 $v-1$ 条边在 $B_f(G)$ 中对应的列组成的行列式等 1 或 -1,其中 G 是有向图.

定理 11 的证明与定理 9 证明相似.

下面给出求有向图 G 生成树数目的公式,为此,引用线性代数中的 Binet-Cauchy 公式:

已知 $P = (p_{ij})_{m\times n}, Q = (q_{ij})_{n\times m}$,且 $m \leqslant n$,则

$$\det(PQ) = \sum_{1\leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n} \begin{vmatrix} p_{1j_1} & \cdots & p_{1j_m} \\ p_{2j_1} & \cdots & p_{2j_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{mj_1} & \cdots & p_{mj_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_{j_11} & \cdots & q_{j_1m} \\ q_{j_21} & \cdots & q_{j_2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{j_m1} & \cdots & q_{j_mm} \end{vmatrix}.$$

例如 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $PQ = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$\det(PQ) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 13$. 如果用 Binet-Cauchy 公式则为

$$\det(PQ) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 13.$$

定理 12 G 是弱连通有向图,则 G 的生成树的数目为 $\det(B_f(G) \cdot B_f^T(G))$.

证 对 $B_f(G)$ 与 $B_f^T(G)$ 用 Binet-Cauchy 公式,再由定理 11 得

$$\det(B_f(G)B_f^T(G)) = \tau(G)(\pm)^2 = \tau(G),$$

其中 $\tau(G)$是 G 的生成树的数目,证毕.

例 4 求竞赛图 K_v 的生成树的数目.

解 设 $B_f(K_v)$的元素是 b_{ij},则

$$B_f(K_v)B_f^T(K_v) = (b'_{ij})_{(v-1)\times(v-1)},$$

其中 $b'_{ij} = \sum_{k=1}^{\varepsilon} b_{ik}b_{jk}, i,j = 1,2,\cdots,v-1$. 当 $i = j$ 时,

$$b'_{ij} = b'_{ii} = \sum_{k=1}^{\varepsilon}(b_{ik})^2, i = 1,2,\cdots,v-1.$$

由于 K_v 是完全图,每顶与 $v-1$ 条边相关联,故

$$b'_{ii} = v-1, i = 1,2,\cdots,v-1.$$

当 $i \neq j$ 时,$b'_{ij} = -1$,故得

$$B_f(K_v)B_f^T(K_v) = \begin{pmatrix} v-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & v-1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots\cdots & & & & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & v-1 \end{pmatrix}.$$

下面计算 $\det(B_f(K_v)B_f^T(K_v))$. 为此考虑 $v-1$ 阶方阵 T,其元素为

$$t_{ii} = 2, i < v-1; t_{v-1,v-1} = 1, t_{ij} = 1, i \neq j.$$

易知 $\det T = 1$. 于是

$$\det(TB_f(G)B_f^T(G)) = \begin{vmatrix} v & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots v & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = v^{v-2}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\det(TB_f(G)B_f^T(G)) &= \det T \cdot \det(B_f(G)B_f^T(G)) \\ &= \det(B_f(G)B_f^T(G)),\end{aligned}$$

所以

$$\tau(K_v)=\det(B_f(G)B_f^T(G))=v^{v-2}.$$

这正是 Cayley 定理的结论.

例 5 求图 4.9 中的生成树个数$\tau(G)$.

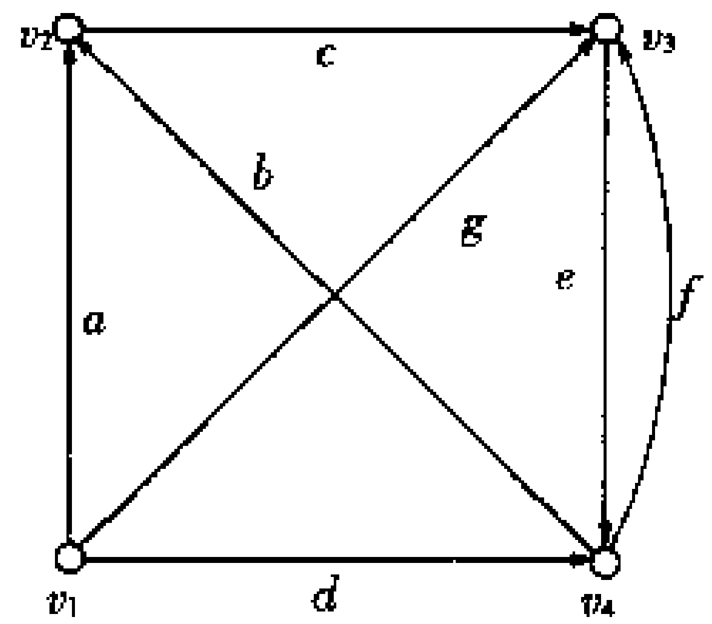


图 4.9

解

$$B_f(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$B_f(G)B_f^T(G)=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

故得

$$\tau(G)=det(B_f(G)B_f^T(G))=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=24.$$

4.2.2 邻接矩阵

本节的计算在实数域上进行.

定义 8 G 是标志的无向图,称矩阵 $A=(a_{ij})_{v\times v}$为 G 的**邻接矩阵**,其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, v_iv_j\in E(G),\\ 0, v_iv_j\notin E(G).\end{cases}\qquad \square$$

无向图的邻接阵是对角线全 0 的对称阵，每行和每列之和是对应顶的次数. 和关联阵一样，$A(G)$中含有 G 的一切性质.

定理 13 $A(G)$是无向图 G 的邻接阵，则 G 中从 v_i 到 v_j 的长为 k 的道路的条数是 $A^k(G)$中的 ij 号元素.

证 对 k 进行归纳证明，$k=1$ 时，$A^k_{(G)}=A(G)$，由 $A(G)$的定义，定理成立. 假设 $k\leqslant n$ 时，定理已真，往证 $k=n+1$ 时，定理仍真.

令 a_{ij}是$A(G)$的 ij 号元素，$a_{ij}^{(n)}$是$A^n(G)$的 ij 号元素，则 $A^{n+1}(G)$的 ij 号元素为

$$a_{ij}^{(n+1)}=a_{i1}^{(n)}a_{1j}+a_{i2}^{(n)}a_{2j}+\cdots+a_{iv}^{(n)}a_{vj}.$$

而从 v_i 到 v_j 长 $n+1$ 的道路无非是从 v_i 经 n 步到某顶 v_k，$1\leqslant k\leqslant v$，再由 v_k 走一步到 v_j，由归纳法假设，从 v_i 到 v_k 长 n 的道路共计$a_{ik}^{(n)}$条，从 v_k 到 v_j 长 1 的道路 a_{kj}条，所以长 $n+1$ 的道路 $v_i\cdots v_kv_j$ 共$a_{ik}^{(n)}a_{kj}$条；令 $k=1,2,\cdots,v$，于是长 $n+1$ 的从 v_i 中经 v_k (共 v 个中转顶 v_k) 到达 v_j 的道路共计 $\sum\limits_{k=1}^{v}a_{ik}^{(n)}a_{kj}$ 条，这正是 $A^{(n+1)}(G)$ 中第 ij 号元素，证毕.

注意，定理 13 中说的是道路，未必是轨道.

例 6 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$A^k=?\ k\in\mathbf{N}$.

解 考虑 $V(G)=\{v_1,v_2\}$的连通图 K_2，则 $A(G)$恰为 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，于是，当 k 是奇数时，从 v_1 到 v_1 和从 v_2 到 v_2 的长 k 的道路不存在，从 v_1 到 v_2 的长 k 的道路恰 1 条，故 $A^k=A$.

当 k 为偶数时，从 v_1 到 v_2 长 k 的通路不存在，从 v_1 到 v_1 和从 v_2 到 v_2 的长 k 的道路恰 1 条，故 $A^k=I$(I 是单位阵).

例 7 我方两名军事人员与敌方两名军事人员同到某现场视察，途中须过一河，仅一只小船，每次最多乘二人，为安全起见，敌我双方同时在场时，我方人员不能少于敌方人员，船过河一次要 10 分钟，问最短多少时间双方人员都渡过河去？

解 用(m,n,l)与(m,n,r)分别表示左岸与右岸有我 m 人，敌 n 人；欲从左岸到右岸去，全部可能状态为：$v_1=(2,2,l)$，$v_2=(2,1,l)$，$v_3=(1,1,l)$，$v_4=(2,0,l)$，$v_5=(0,2,l)$，$v_6=(0,1,l)$；$v_7=(2,2,r)$，$v_8=(2,1,r)$，$v_9=(1,1,r)$，$v_{10}=(2,0,r)$，$v_{11}=(0,2,r)$，$v_{12}=(0,1,r)$.

渡河即上述状态的转换，以 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_{12}\}$ 为顶集，仅当两种状态可以转换时，在相应的顶之间连一边，得一个二分图如图 4.10. 此图 G 的邻接阵为

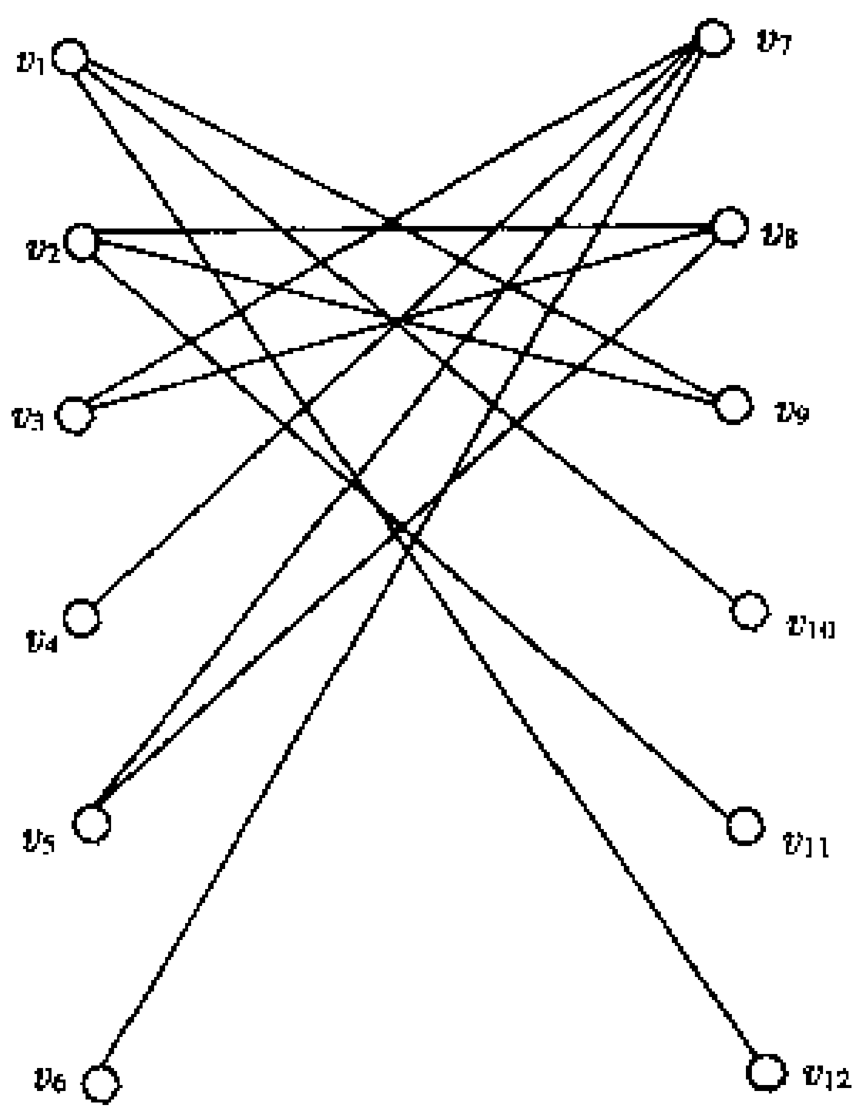


图 4.10

$$A(G)=\begin{pmatrix}0 & \bar{A}\\ \bar{A} & 0\end{pmatrix}_{12\times 12},$$

其中

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是

$$A^k=\begin{cases}\begin{pmatrix}\bar{A}^k&0\\0&\bar{A}^k\end{pmatrix}, k\text{ 是偶数;}\\\begin{pmatrix}0&\bar{A}^k\\\bar{A}^k&0\end{pmatrix}, k\text{ 是奇数.}\end{cases}$$

用 a_{ij} 表示 $A(G)$ 中元素，$a_{ij}^{(k)}$ 表示 A^k 中元素，我们的目标是求使得 $a_{17}^{(k)}\neq 0$ 的最小自然数 k，经计算，$a_{17}^{(1)}=a_{17}^{(3)}=0$，$a_{17}^{(5)}=4$，即小船至少五次渡河才能把 4 人全运到右岸，共需 50 分钟，$a_{17}^{(5)}=4$ 说明有四种不同的过河方案.

下面用 $1+1=1$ 的逻辑运算及 $A(G)$ 引入道路矩阵的概念.

定义 9 无向图 G 的道路矩阵是指

$$P(G)=\bigvee_{k=1}^{v}A^{(k)}(G),$$

其中 $\bigvee_{k=1}^{v}$ 是逻辑和，$A^{(k)}$ 是 A 的逻辑 k 次方，$A(G)$ 是 G 的邻接阵. □

如果只关心从顶 v_i 到 v_j 有无道路，而对 v_i 到 v_j 之间的道路多少及长度不感兴趣，则 $P(G)$ 可以回答我们关心的问题. $P(G)$ 中 ij 号元素为 1 的充要条件是 v_i 到 v_j 有道路，G 是连通图的充要条件是 $P(G)$ 是全 1 阵.

下面讨论有向图的邻接矩阵.

定义 10 设 G 是有向图，矩阵 $A(G)=(a_{ij})_{v\times v}$ 为 G 的邻接

矩阵，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, v_iv_j\in E(G),\\ 0, v_iv_j\notin E(G).\end{cases}\quad\square$$

例如图 4.8 中的图 G 之邻接阵为

$$A(G)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

定理 14 有向图 G 中从顶 v_i 到 v_j 的长 k 的有向道路的条数为 $A^k(G)$中的 ij 号元素.

定理 14 的证明与定理 13 的证明相似.

例 8 图 4.11 中是 7 个城市的道路网络，问从 v_1 到 v_7 有无道路？若有，至少多长？(任两城间的距离为 1).

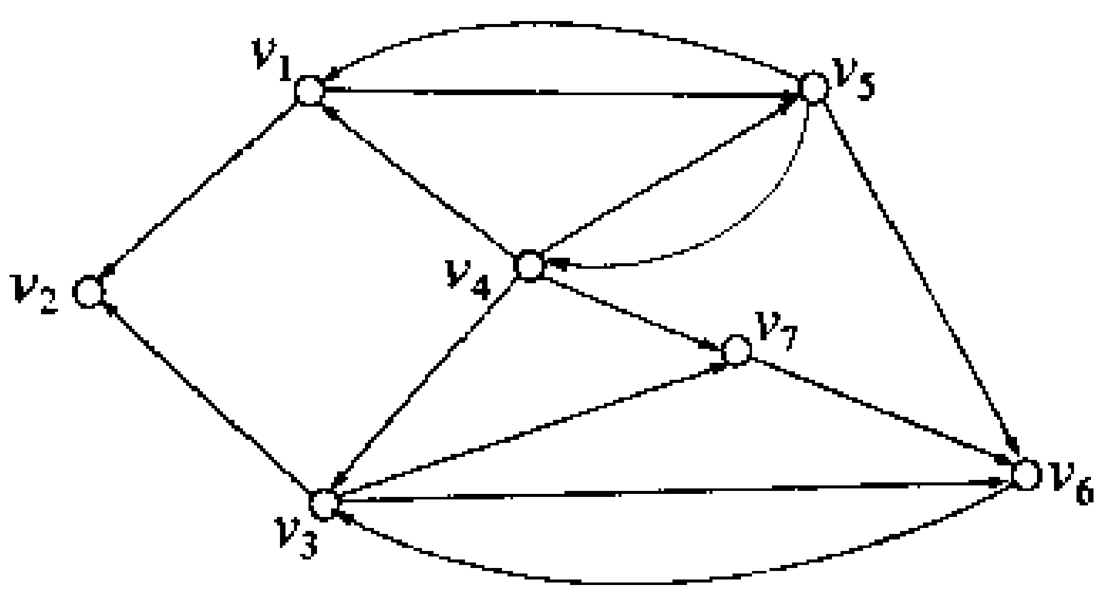


图 4.11

解 图 4.11 中的有向图之邻接阵 $A(G)$为

$$A(G)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\\1&0&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

从 $A(G)$知 $a_{17}=0$,即从 v_1 到 v_7 无长 1 的道路,从 v_1 到 v_7 要绕行.

$$A^2(G)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0\\1&2&0&1&1&3&1\\1&1&2&0&2&0&1\\0&1&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

A^2 的 1,7 号元素为 0,即从 v_1 到 v_7 无长 2 的路.

$$A_3(G)=\begin{pmatrix}1&1&2&0&2&0&1\\0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&1\\2&1&4&1&2&2&1\\2&3&0&2&1&5&2\\0&0&1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1&1\end{pmatrix},$$

A^3 中 1,7 号元素为 1,即从 v_1 到 v_7 只有 1 条长 3 的道路,这是一条从 v_1 到 v_7 最短的道路,它是 $v_1v_5v_4v_7$.

定义 11 设 $A(G)$是有向图 G 的邻接矩阵,则称矩阵

$$P(G)=\bigvee_{k=1}^{v}A^{(k)}(G)$$

为 G 的道路矩阵,其中 $\bigvee_{k=1}^{v}$ 是逻辑和$(1+1=1)$,$A^{(k)}$是 $A(G)$的逻辑 k 次方.

证明省去.

有向图是强连通的充要条件是 $P(G)$元素皆 1.

定理 15 设 $P(G)$是有向图 G 的道路矩阵,

$$P\cdot P^T=\begin{pmatrix} p_{11}^2 & p_{11}p_{12} & \cdots & p_{1v}p_{v1} \\ p_{21}p_{12} & p_{22}^2 & \cdots & p_{2v}p_{v2} \\ & \cdots\cdots & & \\ p_{v1}p_{1v} & p_{v2}p_{2v} & \cdots & p_{vv}^2 \end{pmatrix},$$

其中 p_{ij}是$P(G)$的元素,若 $P\cdot P^T$ 中第 i 行的非零元素为

$$p_{ij_1}p_{j_1i},p_{ij_2}p_{j_2i},\cdots p_{ij_k}p_{j_ki},$$

则 $G[\{v_i,v_{j_1},v_{j_2},\cdots,v_{j_k}\}]$是 G 的极大强连子图.

证 因为 $p_{ij_1}p_{j_1i},\cdots,p_{ij_k}p_{j_ki}$皆非零,故 $p_{ij_l}=p_{j_li}=1,l=1,2,\cdots,k$,于是 v_i 与 v_{j_l}在一个有向回路上,从而 v_i 与 $v_{j_1},v_{j_2},\cdots,v_{j_k}$ 在一个有向回路 W_0 上;另一方面,若 $v_j\in V(W_0),i\neq j$,则 $p_{ij}p_{ji}=1$,从而 $v_j\in\{v_{j_l}\mid l=1,2,\cdots,k\}=V(W_0)$,所以 $G_1=G[\{v_i,v_{j_1},\cdots,v_{j_k}\}]$是强连通子图.

下证 G_1 之极大性. $\forall v_m\in V(G),v_m\notin V(W_0)$,若 $G[\{v_m\}\cup V(W_0)]$仍是强连通子图,则 v_i 与 v_m 在一个有向回路上,于是 $p_{im}p_{mi}=1$,即 $v_m\in\{v_{j_l}\mid l=1,2,\cdots,k\}$,此与 $v_m\notin V(W_0)$矛盾,可见 G_1 是极大强连通子图,证毕.

例 9 一群小朋友,有些很要好,有些则不太要好. 甲对乙很要好时在“要好矩阵”A 中的“甲乙”位置上写 1,否则写零,注意,甲对乙很要好时,乙未必对甲很要好,问哪些孩子经常在一起玩?有无比较孤独的孩子? 其中 A 已知.

$$A=\begin{array}{c|cccccc} & 甲 & 乙 & 丙 & 丁 & 戊 & 己 \\ \hline 甲 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 乙 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 丙 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 丁 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 戊 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 己 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$P\cdot P^T=\begin{array}{c|cccccc} & 甲 & 乙 & 己 & 丙 & 丁 & 戊 \\ \hline 甲 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 乙 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 己 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 丙 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 丁 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 戊 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

解 视要好矩阵 $A=A(G)$，G 是一个有向图，由 $P(G)=\bigvee_{i=1}^{6} A^{(k)}$ 得由定理 15 知｛甲，乙，己｝，｛丙｝，｛丁，戊｝导出三个极大强连通子图，可见甲、乙、己三个孩子经常在一起玩，丁与戊经过在一起玩，而丙则比较孤独.

4.3 圈矩阵和割集矩阵

定义 12 G 是通连无向图，由 G 中每个圈在 $\mathscr{E}(G)$ 中的向量为行构成的矩阵叫做 G 的圈矩阵，记之为 $C(G)$；取定生成树 T，由一切基本圈组成的矩阵叫做 G 的基圈阵，记之为 $C_f(G)$.□

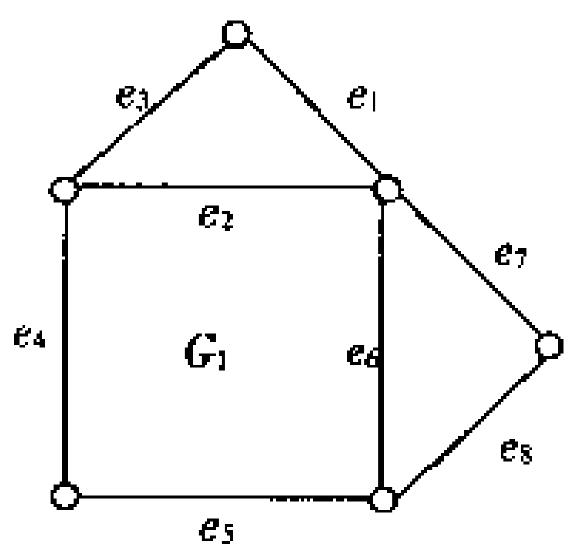


图 4.12

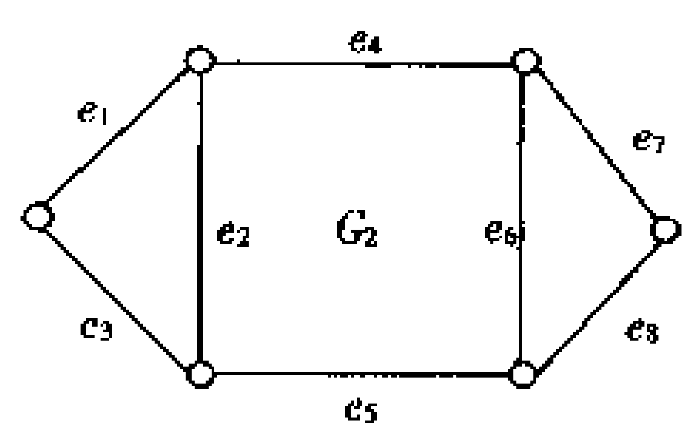


图 4.13

例如图 4.12 和 4.13 两个图都以｛e_2,e_3,e_4,e_6,e_8｝导出生成树.

$$C(G_1)=C(G_2)=\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{matrix}\overset{\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}},$$

这个矩阵的前三行是 $C_f(G_1)=C_f(G_2)$.

我们看到，$G_1 \not\cong G_2$，但却有相同的圈矩阵和基圈阵．可见，凭圈阵或基圈阵不能确定图到同构的程度，这是 $C(G)$ 与 $C_f(G)$ 的缺点，但它仍不失为研究图的有力工具之一．

因为 $\varepsilon-\nu+1$ 个基本圈是 $\mathscr{C}(G)$ 的一个基底，故有

$$r(C_f(G))=r(C(G))=\varepsilon-\nu+1.$$

由于 $B(G)$ 的行属于 $\mathscr{S}(G)$，而 $\mathscr{S}(G)$ 与 $\mathscr{C}(G)$ 有正交性，故

$$B\cdot C^T=C\cdot B^T=0(0\text{ 阵}).$$

若把边的号码调整成余树边从 1 号到 $\varepsilon-\nu+1$ 号，且把含第 i 边的基圈记成 C_i，则图 G 的基本圈矩阵为

$$C_f(G)=[I \vdots C_{f_{12}}],$$

其中 I 是 $\varepsilon-\nu+1$ 阶单位阵，$C_{f_{12}}$ 的列对应着生成树的边．

定理 16 若 G 是连通图，关于生成树 T，

$$C_f(G)=[I \vdots C_{f_{12}}],B_f(G)=[B_{11} \vdots B_{12}],$$

其中 $C_{f_{12}}$ 与 B_{12} 的列对应着 T 的边，则

$$C_f=[I \vdots B_{11}^T(B_{12}^T)^{-1}].$$

证 由 $\mathscr{C}(G)$ 与 $\mathscr{S}(G)$ 的正交性得

$$O=C_fB_f^T=[I \vdots C_{f_{12}}]\begin{bmatrix}B_{11}^T\\ \cdots \\ B_{12}^T\end{bmatrix}=B_{11}^T+C_{f_{12}}B_{12}^T,$$

所以有

$$B_{11}^T=C_{f_{12}}B_{12}^T,$$

又 B_{12} 的列对应生成树 T 的边，由定理 9，$|B_{12}^T|\neq 0$，于是 $(B_{12}^T)^{-1}$ 存在，故

$$C_{f_{12}}=B_{11}^T(B_{12}^T)^{-1},$$

$$C_f(G)=[I \vdots B_{11}^T(B_{12}^T)^{-1}],$$

证毕．

定理 16 给出由基本关联矩阵原则上可以求基本圈矩阵乃至

$\mathscr{C}(G)$中一切向量的一种计算方法.这种现象是可以理解的,因为由基本关联阵 $B_f(G)$可以求得关联阵 $B(G)$,从而把 G 画出来.可见,已知基本关联阵,就是知道了这个图,自然可以求得这个图的基本圈矩阵,定理 16 只是这种定性思考的定量化表达.

定义 13 G 是连通图,$\mathscr{S}(G)$的全体割集向量为行构成的矩阵为 G 的割集矩阵,记成 $S(G)$,全体基本割集向量为行组成的矩阵称为基本割集矩阵,记成 $S_f(G)$.□

例如图 4.7 中 $\varepsilon=6, \nu=4$,则基本割集有 $\varepsilon-\nu+1=3$ 个;对于$\{e_4,e_5,e_6\}$导出的生成树,基本割集为

$S_1=\{e_1,e_3,e_4\}, S_2=\{e_1,e_2,e_6\}, S_3=\{e_2,e_3,e_5\}$.基本割集矩阵为

$$S_f(G)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

除 S_1,S_2,S_3 外,割集还有四个:

$$S_4=\{e_4,e_5,e_6\}, S_5=\{e_2,e_3,e_4,e_6\},$$

$$S_6=\{e_1,e_3,e_5,e_6\}, S_7=\{e_1,e_2,e_4,e_5\}.$$

割集矩阵为

$$S(G)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\\0&0&0&1&1&1\\0&1&1&1&0&1\\1&0&1&0&1&1\\1&1&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

对割集阵与基割阵,显然有

$$r(S(G))=r(S_f(G))=\nu-1,$$

$$C(G)(S(G))^T=S(G)(C(G))^T=0,$$

$$C_f(G)(S_f(G))^T=S_f(G)(C_f(G))^T=0.$$

定理 17 设 G 是连通图,关于生成树 T,基本圈矩阵为

$$C_f=[I \vdots C_{f_{12}}],$$

基本割集阵为

$$S_f=[S_{f_{11}} \vdots I],$$

其中 $C_{f_{12}}$的列对应 T 的边,$S_{f_{11}}$的列对应余树边,则

$$S_{f_{11}}=C_{f_{12}}^T.$$

证 $O=S_f(C_f)^T=[S_{f_{11}} \vdots I]\begin{bmatrix} I \\ \cdots \\ C_{f_{12}}^T \end{bmatrix}=S_{f_{11}}+C_{f_{12}}^T$,由于是在 F_2 中计算,故有 $S_{f_{11}}=C_{f_{12}}^T$,证毕.

定理 17 告知,可以由基本圈阵求得基本割集阵,从而由基本关联矩阵求得基本割集矩阵.

下面讲有向图的圈阵与割集阵.

定义 14 设 G 是有向图,在其底图上,每个无向圈 C_i 任意规定一个循环方向,则称以 c_{ij}为元素的矩阵$C(G)=(c_{ij})_{k\times\varepsilon}$为有向图$G$ 的圈矩阵,其中 k 是圈数,

$$c_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{无向圈 } C_i \text{,中含边 } e_j \text{,且 } e_j \text{ 方向与} C_i \text{ 的循环方向一致;} \\ -1, & \text{无向圈 } C_i \text{ 中含边} e_j \text{,但 } e_j \text{ 方向与} C_i \text{ 的循环方向相反;} \\ 0, & \text{无向圈 } C_i \text{ 中不含边} e_j. \end{cases} \quad \square$$

例如图 4.14 中,其底图上有三个无向圈,规定顺时针为循环方向,于是这个有向图 G 的圈矩阵为

$$C(G)=\begin{matrix} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

定义 15 在有向图 G 中取定生成树 T,在 G 的圈矩阵中,提

取只含一条余树边的圈(基本圈),对应的行构成的子矩阵 $C_f(G)$ 称为有向图 G 的基本圈矩阵.□

例如图 4.14 中,若取 e_1, e_4, e_5 为生成树的边,则此有向图 G 的基本圈矩阵为

$$C_f(G)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

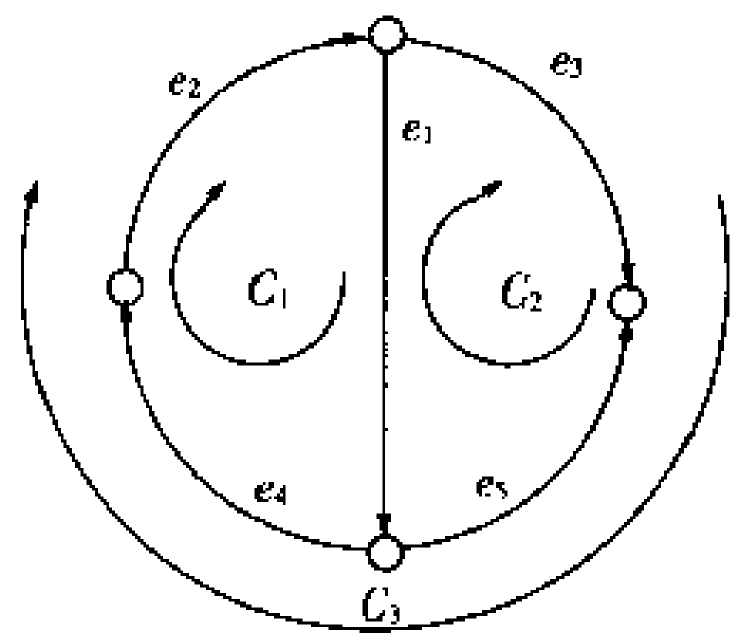


图 4.14

下面讨论有向图的割集和基本割集矩阵.

定义 16 设 G 是有向图,其底图连通,$V_1\subset V(G)$, $V_1\neq\phi$, $V(G)-V_1=\overline{V_1}\neq\phi$,规定边子集$(V_1,\overline{V_1})\cup(\overline{V_1},V_1)$的一个流向,此流向或与$(V_1,\overline{V_1})$中边的方向一致,或与$(\overline{V_1},V_1)$中的边方向一致,则称$(V_1,\overline{V_1})\cup(\overline{V_1},V_1)$连同规定的流向为 G 的一个有向断集;把 G 的底图中的割集对应的在有向图G 中的有向断集称为有向图 G 的有向割集;底图中的基本割集对应的有向割集称为有向图 G 的基本有向割集.

称 $S(G)=(s_{ij})_{l\times\varepsilon}$为有向图$G$ 的割集矩阵,其中 l 是G 的有向割集的数目,

$$s_{ij}=\begin{cases}1, & \text{有向割集 } S_i \text{ 中含边 } e_j\text{,且两者方向一致;}\\ -1, & \text{有向割集 } S_i \text{ 中含边 } e_j\text{,且两者方向相反;}\\ 0, & \text{有向割集 } S_i \text{ 中不含边 } e_j.\end{cases}$$

$S(G)$中基本有向割集对应的行构成的子阵 $S_f(G)$称为有向图 G 的基本割集矩阵.□

例如图 4.15 中有 6 个有向割集,它的割集矩阵为

$$S(G)=\begin{array}{c} \\ s_1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\\ s_5\\ s_6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4\end{array}\\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}.$$

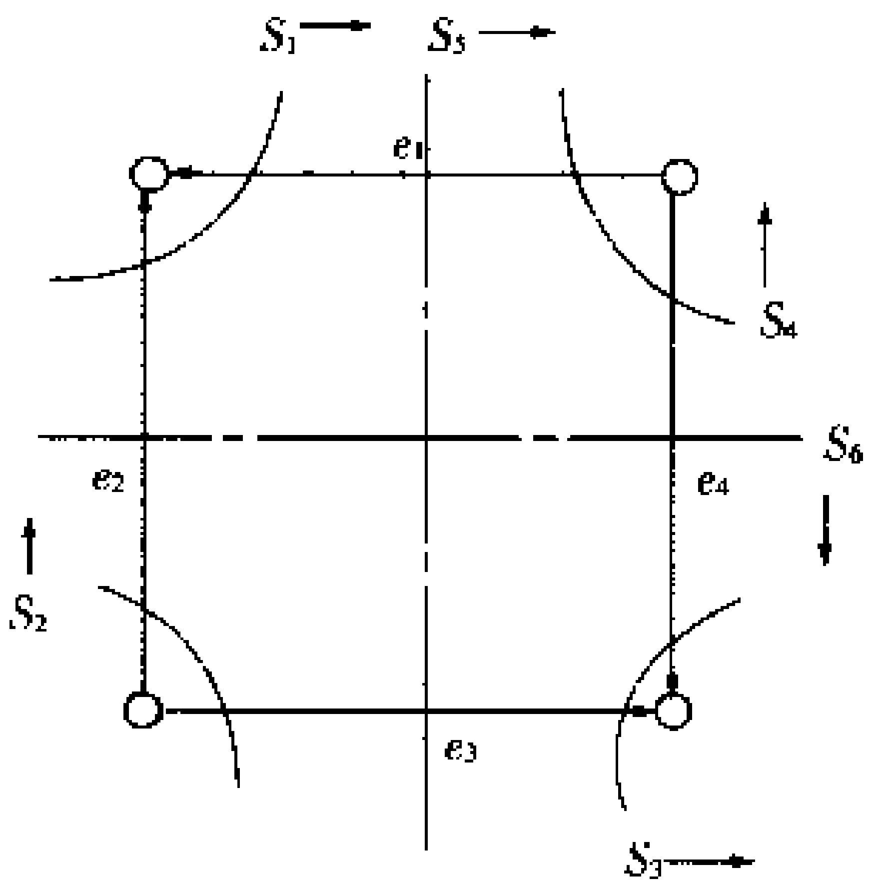


图 4.15

若取 e_1,e_2,e_3 为生成树的边,则有向图 G 的基本割集阵为

$$S_f(G)=\begin{array}{c} \\ s_3\\ s_4\\ s_6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}.$$

对于有向图,有公式

(1)$B(G)C^T(G)=C(G)B^T(G)=0$,

(2)$r(C(G))=r(C_f(G))=\varepsilon-\nu+1$($G$ 的底图连通),

(3)$C(G)S^T(G)=S(G)C^T(G)=0$,

(4)$r(S(G))=r(S_f(G))=\nu-1$.

(5)G 是弱连通有向图，T 为生成树，

$$C_f(G)=[I \vdots C_{f_{12}}],$$

$$B_f(G)=[B_{11} \vdots B_{12}],$$

其中 $C_{f_{12}}$ 与 B_{12} 的列对应生成树 T 之边，I 与 B_{11} 对应余树之边，则有公式

$$C_f(G)=[I \vdots -B_{11}^T(B_{12}^T)^{-1}].$$

(6)对于生成树 T，

$$S_f(G)=[S_{f_{11}} \vdots I],$$

$$C_f(G)=[I \vdots C_{f_{12}}],$$

其中 $C_f(G)$ 与 $S_f(G)$ 中列对应的边之序号一致，且 $S_{f_{11}}$ 对应余树边，$C_{f_{12}}$ 对应树边，则有公式

$$S_{f_{11}}=-C_{f_{12}}^T.$$

4.4 开关网络分析

开关网络是计算机设计与信息技术中的重要课题.

开关电路的数学模型是一个无向加权图，例如图 4.16 中的开关电路可以化成图 4.17 中的无向加权图，其中权为 x_i，

$$x_i=\begin{cases}1, \text{开关 } x_i \text{ 接通;} \\ 0, \text{开关 } x_i \text{ 断开}, i=1,2,3,4,5.\end{cases}$$

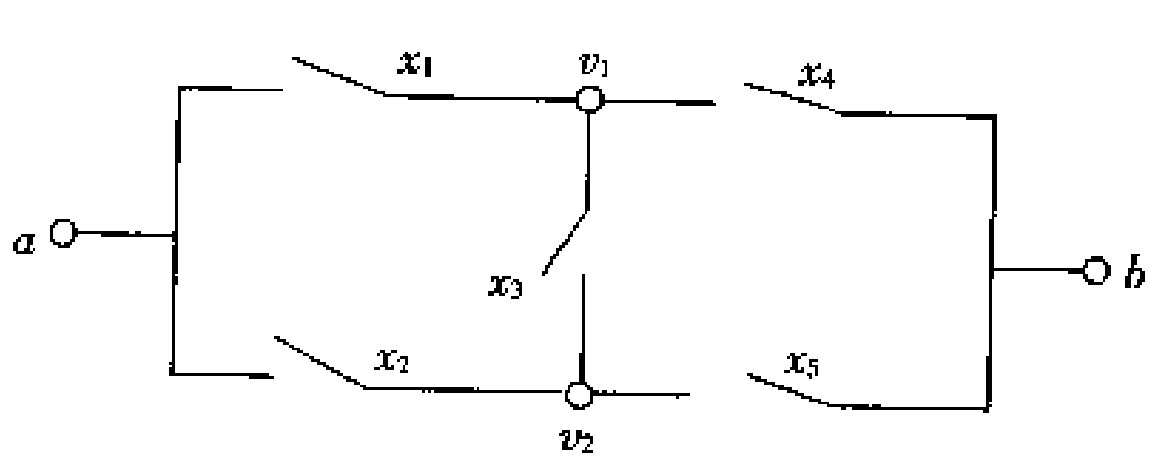


图 4.16

定义 1 开关网络是一个无向加权图 G，边之权 $w(e_i) = x_i, e_i \in E(G), i=1,2,\cdots,\varepsilon, x_i \in \{0,1\}$，把开关网络记成 $N(G,x_i)$；若 $a,b \in V(G)$，a,b 间共有 n 条不同的轨 $P_{ab}^{(k)}, k=1,2,\cdots,n$，令

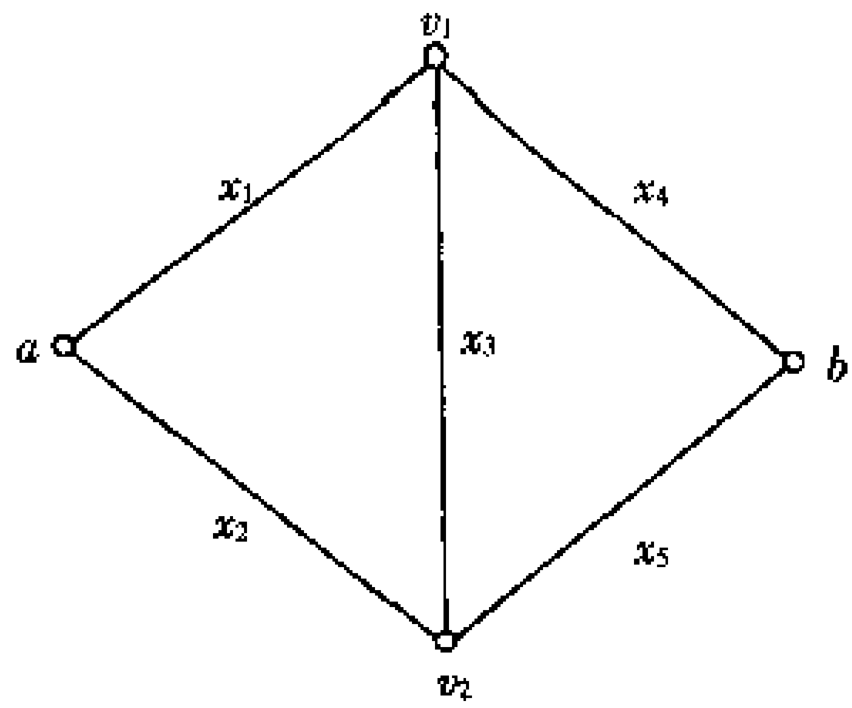


图 4.17

$$f_{ab} = \sum_{k=1}^{n} \Pi_{ab}^{(k)},$$

其中 $\Pi_{ab}^{(k)}$ 是轨 $P_{ab}^{(k)}$ 上边权之积，这里 $1+1=1$. 则称 f_{ab} 为关于 a 与 b 的开关函数. 当 $N(G,x_i)$ 中各边之权皆独立变量时，$N(G,x_i)$ 称为简单开关网络，否则称为非简单开关网络. □

例如图 4.17 中的开关网络为简单开关网络，它关于 a,b 的开关函数为

$$f_{ab} = x_1x_4 + x_1x_3x_5 + x_2x_5 + x_2x_3x_4. \tag{1}$$

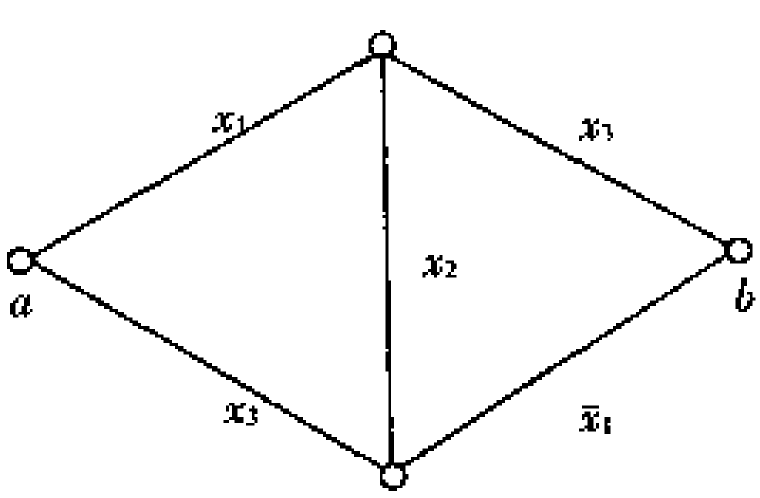


图 4.18

而图 4.18 中的开关网络为非简单开关网络，其开关函数为（$\overline{x_i}$ 是 x_i 之补，即 $x_1 = 0 \Leftrightarrow \overline{x_i} = 1$）

$$\begin{aligned} f_{ab} &= x_1x_3 + x_1x_2\overline{x_1} + x_3\overline{x_1} + x_3x_2x_3 \\ &= x_1x_3 + x_3\overline{x_1} + x_2x_3 \\ &= x_3(x_1 + \overline{x_1} + x_2) \\ &= x_3, \end{aligned}$$

$f_{ab} = x_3$ 表明，只要把开关 x_3 接通，则 a 与 b 已接通，只要把 x_3 断开，则 a 与 b 已断开.

如果我们关心的是 a 与 b 是否已接通，则应采用 $1+1=1$ 的逻辑运算；于是有

$$f_{ab}=\sum_{k=1}^{n}\Pi_{ab}^{(k)}=\begin{cases}1\Leftrightarrow \text{存在 } k=k_0\text{,使得} \\ \quad P_{ab}^{(k)}\text{的边权皆 }1\Leftrightarrow P_{ab}^{(k)}\text{接通;}\\ 0,\ \text{否则.}\end{cases}$$

f_{ab}的值称为a与b间的传输. f_{ab}的代数表达式表示了a与b接通的所有方式,例如图 4.16 与图 4.17 中 a 与 b 的接通方式有四种:$x_1x_4,x_1x_3x_5,x_2x_5,x_2x_3x_4$.

如果已知开关函数为(1)式所表达,除图 4.17 满足这一开关函数外,图 4.19 亦满足这一开关函数. 在图 4.19 中,有些边之权是一样的,按定义,图 4.19 中的网络并非简单开关网络;在节省开关的意义下,简单开关网络是最佳的. 如何根据开关函数设计简单开关网络? 为此,我们引入两个引理.

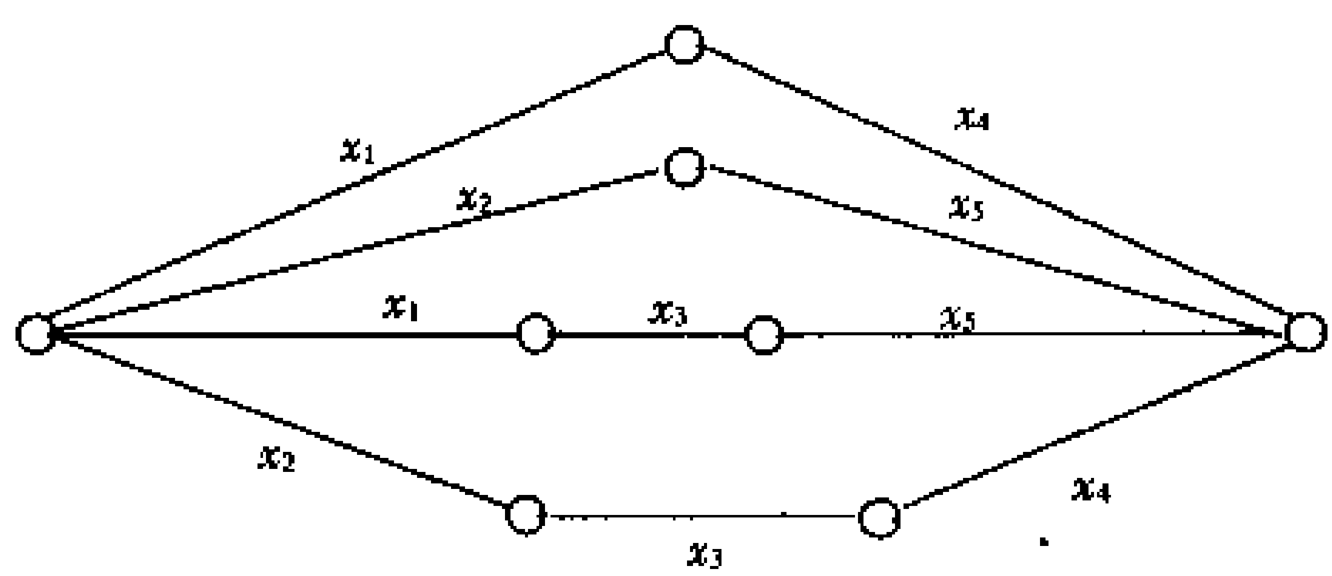


图 4.19

引理 1 设 $G=\bigcup_{i=1}^{m}P_{ab}^{(i)}$,$P_{ab}^{(i)}$是以$a,b$为起讫点的轨,$e_0=ab\in E(G)$,则对 G 中不含e_0 的圈 C,存在两条轨 P'_{ab},P''_{ab},使得

$$E(C)=E(P'_{ab})\oplus E(P''_{ab}).$$

证 (1)若 a,b 在C上,则引理显然成立,这时取圈 C 被a,b分隔的两个弧分别 P'_{ab}与P''_{ab}.

(2)若 a,b 中只一项在C上,不妨设 a 在C上. 设 $P(b,u)$是一条轨,u 在C上,但 $u\neq a$. 由 G 的构造特点,这种轨一定存在,不妨设 $P(b,u)$是这种轨中的最短者. a 与u 把C分成两条轨$P'(a,u)$与 $P''(a,u)$,取 $P'_{ab}=P(b,u)\cup P'(a,u)$,$P''_{ab}=P(b,$

$u)\bigcup P''(a,u)$，则 $E(C)=E(P'_{ab})\oplus E(P''_{ab})$，见图 4.20.

(3) a 与 b 皆不在 C 上，因 $G=\bigcup_{i=1}^{m}P_{ab}^{(i)}$，所以对于 C 上的边 e，存在一条轨 $P_{ab}^{(k)}$，$1\leqslant k\leqslant m$，使得 e 在 $P_{ab}^{(k)}$ 上. 令 $P_{ab}^{(k)}$ 与 C 的第一个公共顶为 v，最末一个公顶为 w，$P_{ab}^{(k)}$ 上从 a 到 v 的一段记成 $P_{av}^{(k)}$，$P_{ab}^{(k)}$ 上从 w 到 b 的一段记成 $P_{wb}^{(k)}$，C 被 v,w 划分成的两条轨分别为 P'_{vw}，P''_{vw}，见图 4.21. 令

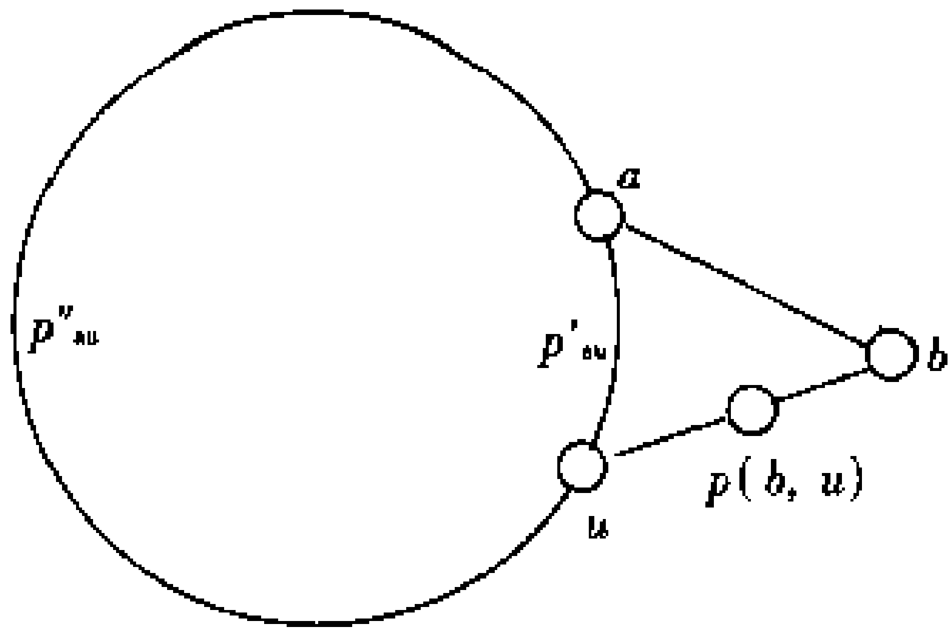


图 4.20

$$P'_{ab}=P_{av}^{(k)}\bigcup P'_{vw}\bigcup P_{wb}^{(k)},$$

$$P''_{ab}=P_{av}^{(k)}\bigcup P''_{vw}\bigcup P_{wb}^{(k)},$$

则

$$E(C)=E(P'_{ab})\oplus E(P''_{ab})$$，证毕.

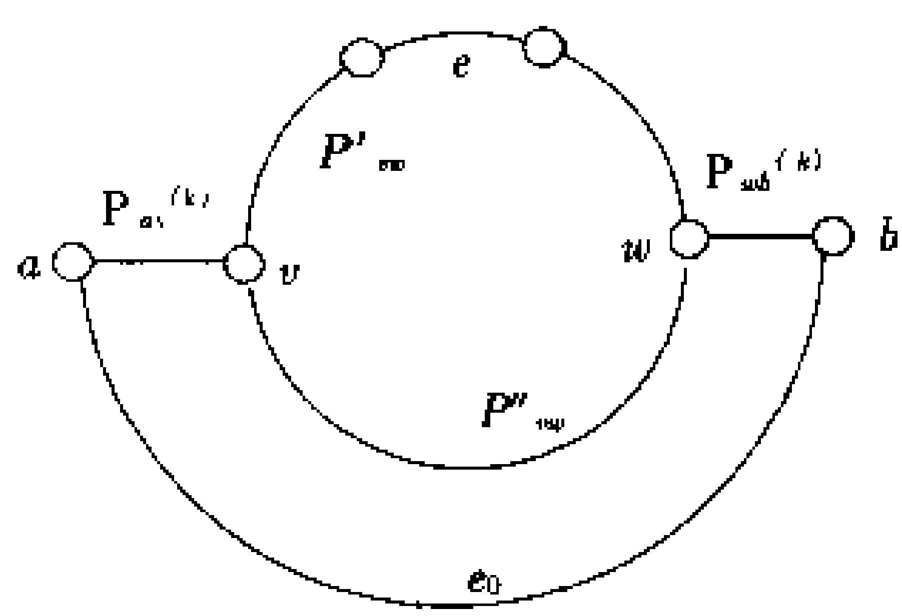


图 4.21

引理 2 G 是连通图，且 $\bar{C}=[I\ \vdots\ *]$是由 $\mathscr{C}(G)$的向量为行构成的 $\varepsilon-\nu+1$ 行，ε 列的矩阵，则存在一个生成树，相应的基本圈矩阵满足

$$\bar{C}=C_f(G).$$

且 $\bar{C}$ 中的单位阵 I 的列对应的边是余树边.

证 因 e_1 只含在 $\bar{C}$ 第一行所对应的无公共边的圈之并中，故 $G-e_1$ 仍连通，同理

$$G_0=G-\{e_1,e_2,\cdots,e_{\varepsilon-\nu+1}\}$$

也是连通图，但

$$|E(G_0)|=\varepsilon-(\varepsilon-\nu+1)=\nu-1,$$

故 G_0 是 G 的生成树，$e_1, e_2, \cdots, e_{\varepsilon-\nu+1}$是余树边. 下证 $\bar{C} = C_f(G)$.

事实上，$\bar{C}$ 显然是 $\mathscr{C}(G)$的一个基底，对于生成树 G_0，构做基本圈矩阵 $C_f(G)$得

$$C_f(G) = [I \vdots \cdot],$$

$C_f(G)$的行可由 $\bar{C}$ 的行线性表出，由 $\bar{C}$ 的构造特点，必有 $C_f(G)$ 的各行与 $\bar{C}$ 的对应行相等，即 $\bar{C} = C_f(G)$，证毕.

下面应用上述两个引理，举例说明如何由已知的开关函数绘制相应的简单开关网络.

例 1 已知 $f_{ab} = x_1x_2x_3x_5x_7 + x_1x_3x_4x_6 + x_1x_5x_6x_8 + x_2x_4 + x_2x_3x_5x_8 + x_3x_4x_6x_7x_8 + x_5x_6x_7$，

试绘出相应的简单开关网络图.

解 (1)写出 f_{ab}中各项对应的向量组成的矩阵P_{ab}.

因为 f_{ab}中每一项代表从 a 到 b 的一条轨，所以称上述矩阵为开关函数 f_{ab}的轨阵.

$$P_{ab} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(2)令 $x_0 = ab$，写出 $G + x_0$ 中含 x_0 的圈组成的矩阵 C_1.

$$C_1=\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_0\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&1&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&1&0&1&0&0&1\\1&0&0&0&1&1&0&1&1\\0&1&0&1&0&0&0&0&1\\0&1&1&0&1&0&0&1&1\\0&0&1&1&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&1&1&1&0&1\end{pmatrix}\end{array}.$$

C_1 就是 P_{ab} 右侧加一列，此列元素皆 1.

(3)在 F_2 中对 C_1 的行与列进行初等变换，求出 $C_f(G+x_0)$. 经行的初等变换及调整列的次序得

$$\overline{C_1}=\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_4 & x_8 & x_6 & x_2 & x_3 & x_5 & x_7 & x_0\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1&1&1&1\\0&1&0&0&1&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

按 $x_1,x_4,x_8,x_6,x_2,x_3,x_5,x_7,x_0$ 把 $G+x_0$ 的边排序，由引理 1, $G+x_0$ 的基本圈向量可以由 C_1 的行线性表出；而 $\overline{C_1}$ 是由 C_1 的行初等变换而得，故 C_1 的每行可由 $\overline{C_1}$ 的前四行线性表出，进而知用 $\overline{C_1}$ 的前四行可以线性表出 $G+x_0$ 的每一基圈向量，又 $\overline{C_1}$ 的前四行线性无关，可见 $\overline{C_1}$ 的前四行构成 $\mathscr{C}(G+x_0)$ 的基底阵，故知 $G+x_0$ 有 9 条边，$4=\varepsilon-\nu+1=9-\nu+1$，故 $\nu=6$；由引理 2，存在一个 $G+x_0$ 的生成树 T，使得关于 T 的基圈阵 $C_f(G+x_0)$ 就是 $\overline{C_1}$ 中前四行组成的矩阵. 且 x_1,x_4,x_8,x_6 是 $G+x_0$ 的余树边.

(4)由 $C_f(G+x_0)$求 $S_f(G+x_0)$.

由定理 17 得

$$
S_f(G+x_0)=\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_4 & x_8 & x_6 & x_2 & x_3 & x_5 & x_7 & x_0 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.
$$

(5)由 $S_f(G+x_0)$求 $B_f(G+x_0)$.

因为 $B_f(G+x_0)$的行可由 $S_f(G+x_0)$的行线性表出,我们对 $S_f(G+x_0)$进行初等变换,得到每列最多两个 1 的矩阵,即得到了 $G+x_0$ 的基本关联矩阵 $B_f(G+x_0)$:

$$
B_f(G+x_0)=\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_4 & x_8 & x_6 & x_2 & x_3 & x_5 & x_7 & x_0 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.
$$

(6)由 $B_f(G+x_0)$求 $B(G+x_0)$.

在 F_2 中把 B_f 的每列元素相加得 $B(G+x_0)$的最末一行:

$$
B(G+x_0)=\begin{array}{c} \\ a \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ b \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_4 & x_8 & x_6 & x_2 & x_3 & x_5 & x_7 & x_0 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.
$$

(7)根据 $B(G+x_0)$绘制开关网络.

从 $G+x_0$ 删去 x_0 即得满足函数 f_{ab}的简单开关网络,见

图 4.22.

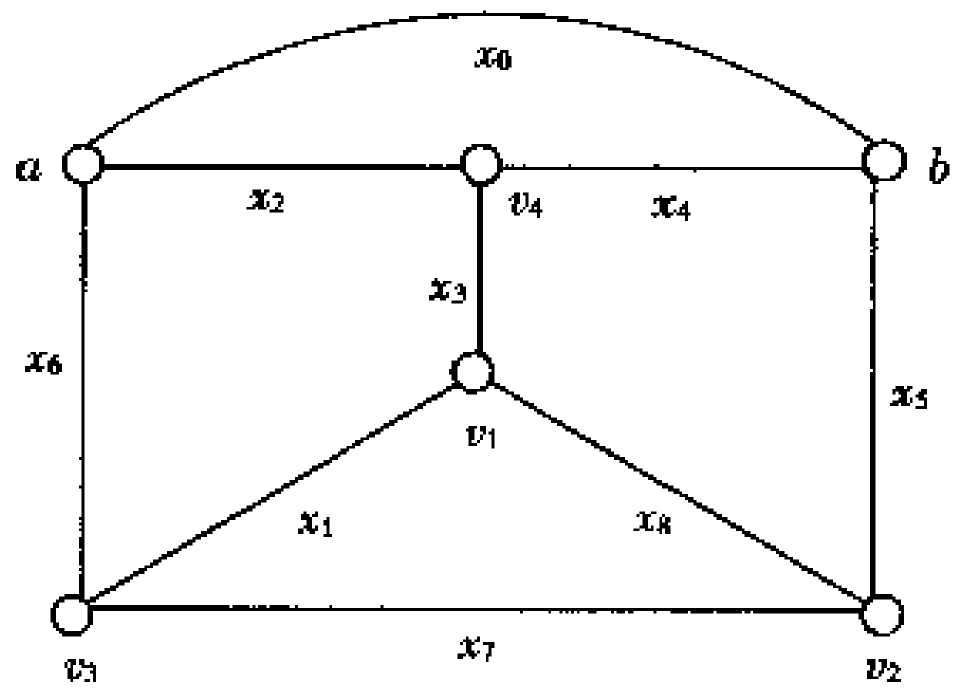


图 4.22

习题一

1. 求图 4.23 中图 G 的圈空间 $\mathscr{C}(G)$的全体向量，且求出 $\mathscr{C}(G)$的一个基底，画出相应图示.

2. 求图 4.23 中图 G 的断集空间 $\mathscr{S}(G)$中的全体向量，并求 $\mathscr{S}(G)$的一个基底，画出相应图示.

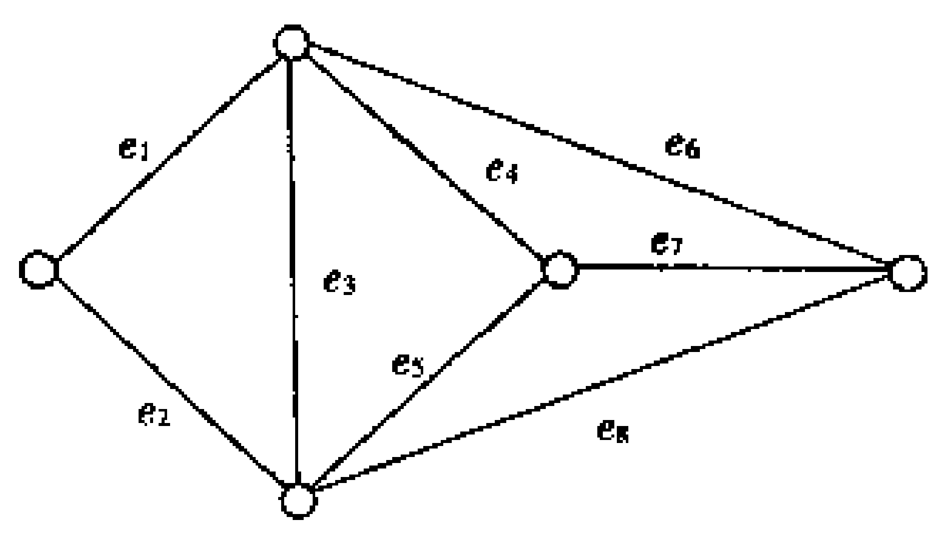


图 4.23

3. G 为 Euler 图的充要条件是：对任何 $S\in\mathscr{S}(G)$，S 中非零分量有偶数个.

4. 无向图邻接阵 $A(G)$ 每列之和与关联矩阵 $B(G)$的每行之和有何图论含义？

5. G 是 2 分图，证明 G 的顶可以适当编号，使得 $A(G)$呈如下形状：

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

其中子阵 $A_{21}=A_{12}^{T}$.

6. 已知一矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,求 A^{1001} 中 2,2 号元素.

7. 求 K_4 中任一顶到自己的长 3 的道路之数目,且在图上标出这些道路.

8. 已知图 G 的邻接距阵为

$$A(G)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

不许画图,论证 G 是否连通.

9. 已知图 G 的基本圈矩阵为

$$C_f(G)=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&1&0&1\\1&0&1&0&0&1&1&1\end{pmatrix},$$

求 G 的一个基本割集矩阵 $S_f(G)$.

10. 已知图 G 的基本关联阵为

$$B_f(G)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix},$$

求 $C_f(G)$ 与 $S_f(G)$.

11. 已知连通图 G 的基本圈矩阵为

$$C_f(G)=\begin{array}{c}\begin{matrix}a&b&c&d&e&f&g\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&1&1\end{pmatrix}\end{array},$$

不许画图，回答是否：

(1) $\{b,c,e,f\}$导出生成树.

(2) $\{a,c,e,f\}$导出生成树.

(3) $\{a,b,e,g\}$是割集.

(4) $\{b,f,c\}$是割集.

(5) $\{d,e,f,g\}$是割集.

(6) $\{a,b,c,d,g\}$导出一个圈.

(7) $\{a,c,d,e,g,f\}$导出一个圈.

12. 画出图 4.24 中的每棵生成树.

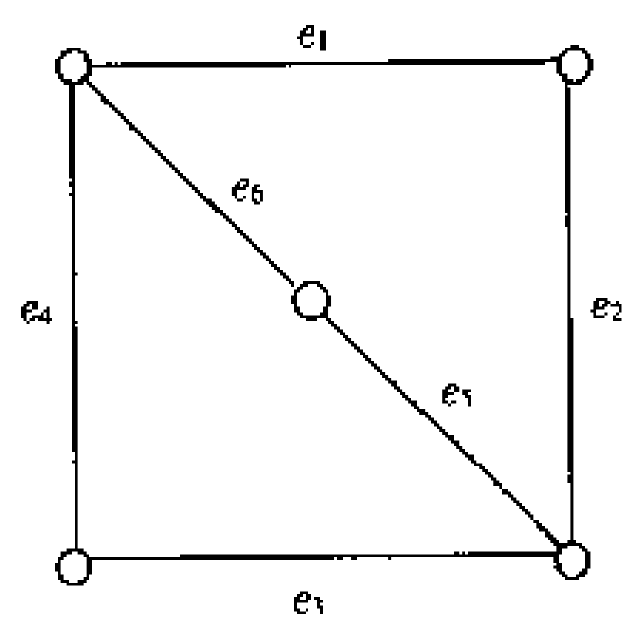


图 4.24

13. 已知开关函数 f_{ab}，画出相应的简单开关网络：

(1) $f_{ab}=x_1x_3+x_1x_2x_5+x_2x_3x_4+x_4x_5$.

(2) $f_{ab}=x_1x_2x_5+x_1x_4x_8+x_2x_3x_6+x_3x_4x_7+x_1x_2x_6x_7x_8+x_1x_4x_5x_6x_7+x_2x_3x_5x_7x_8+x_3x_4x_5x_6x_8$.

14. $A(G)$是图 G 的邻接矩阵.

(1)已知 $A^2(G)$主对角线之和是 100，求$|E(G)|$.

(2)已知 $A^3(G)$主对角线之和是 600，求 G 中三角形个数.

15. 已知 n 阶方阵 A 的左下角 $n1$ 号元素及主对角线右邻的元素为 1，其余元素为零，$k\in\mathbf{N}$，试用图论方法求：

(1) A^2 主对角线元素之和，

(2) A^3 主对角线元素之和，

其中 A 为

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\&&\cdots\cdots&&&\\0&0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

16. K_5 中存在 6 个圈 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$，使得 $E(K_5) = E(C_1) \oplus E(C_2) \oplus E(C_3) \oplus E(C_4) \oplus E(C_5) \oplus E(C_6)$.

17. V_0 是图 G 的独立集，求邻接矩阵 $A(G[V_0])$ 和道路矩阵 $P(G[V_0])$.

18. 图 G 的每个基本圈向量中，非零分量的个数皆为偶数，求 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A^{2i-1}$ 主对角线之和，其中 $A = A(G)$ 是 G 的邻接矩阵.

19. T_1, T_2 是图 G 的两个生成树，相应的基圈阵分别为 $C_f^{(1)}$ 与 $C_f^{(2)}$，求证：$C_f^{(2)}$ 可由 $C_f^{(1)}$ 经初等行变换而得.

20. $A = (a_{ij})_{\nu\times\nu}$ 是图 G 的邻接矩阵，

(1) 对 $\forall k \in \mathbf{N}$，A^{2k-1} 主对角线元素之和为零，$|E(G)| \neq 0$，求 $\chi'(G)$；

(2) 对 $\forall k \in \mathbf{N}$，A^{2k-1} 主对角线元素之和为零，$|E(G)| \neq 0$，求 $\chi(G)$.

21. 图 G 的基本关联矩阵为

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

不许画图，回答：

(1) G 是否连通？为什么？

(2) G 是否 Euler 图？为什么？

(3) G 是否可以“一笔画”？为什么？

(4) G 是否平面图？为什么？

(5) $\mathscr{C}(G)$ 是几维线性空间？

(6) G 中有几个圈？为什么？

(7) G 是否 Hamiltor 图？为什么？

(8) $\tau(G) = ?$

22. 已知有向图 G 的邻接阵为

$$A(G)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},$$

不许画图,回答 G 是否强连通? 为什么?

23. 求图 4.25 中有向图的极大强连通子图.

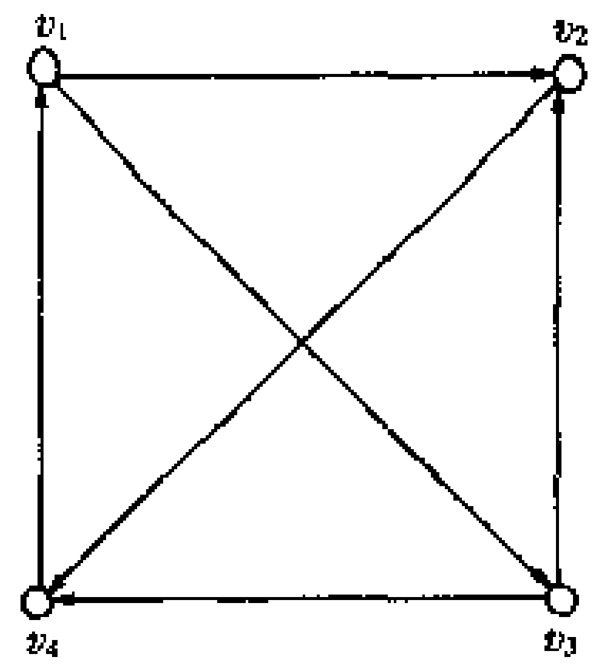


图 4.25

24. 有向图 G 的关联矩阵为

$$B(G)=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\-1&0&0&-1&0&1\\0&0&-1&0&-1&-1\\0&-1&0&1&1&0\end{pmatrix},$$

求 $\tau(G)$,并画出一切生成树.

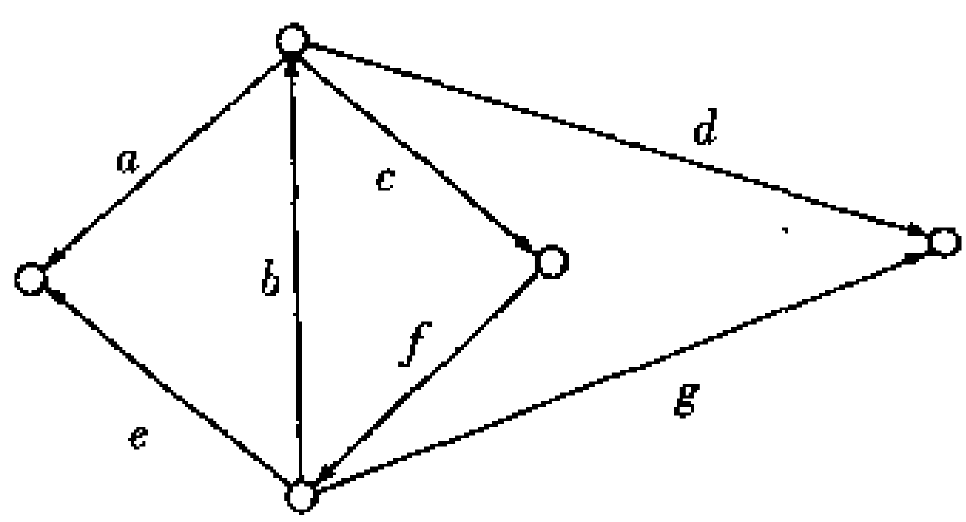


图 4.26

25. 写出图 4.26 中有向图 G 关于生成树 $T=G[\{a,b,c,d\}]$ 的基本圈矩阵与基本割集矩阵.

26. $B(G)$ 是有向图 $G(V,E)$ 的关联矩阵,求

$$\sum_{i=1}^{|V|}\sum_{j=1}^{|E|}b_{ij}=?$$

其中 b_{ij} 是 $B(G)$ 的元素.

又若 $G(V,E)$ 的邻接矩阵 $A(G)=(a_{ij})_{\nu\times\nu}$,说明 $\sum\limits_{i=1}^{|V|}\sum\limits_{j=1}^{|V|}a_{ij}$ 的图论意义.

4.5 拟阵

4.5.1 拟阵的概念

拟阵在计算机科学和系统理论中的应用日益增多,本节介绍

它的基本概念、性质和应用.

线性代数中有“替代定理”曰：V 是一个线性空间，B_1 与 B_2 是 V 的两组基，那么对 B_1 中任一向量 e，可以找到 B_2 中一个向量 f，使得 $(B_1-\{e\})\cup\{f\}$ 也是 V 的一组基.

图论中也有类似定理.

定理 1 G 是连通图，T_1 与 T_2 是 G 的两棵生成树，$\forall e\in E(T_1)$，则存在 $f\in E(T_2)$，使得 $(T_1-e)+f$ 是 G 的生成树.

证 若 $e\in E(T_2)$，定理自然成立；若 $e\notin E(T_2)$，则 e 的端点非一次顶，且 $E(T_2)-E(T_1)\neq\phi$，记 $T_2-T_1=E(T_2)-E(T_1)$，把 T_2-T_1 中的边分别添入 T_1 而得的各圈中必有一个圈 C 含 e；否则，分别删去所得各圈中不属于 T_2 的边得 T_2，但 $e\notin E(T_2)$，未被删去，这是不可能的. 显然，C 上必有一边 $f\in E(T_2)$，但 $f\notin E(T_1)$，于是从 C 上删除 e 后得 T_1-e+f 仍为 G 的生成树，证毕.

把定理 1 的事实抽象成集合论的语言，便引出拟阵的概念.

定义 1 (E,β) 为有序偶，其中 E 是非空有限集，β 是 E 的一些子集组成的非空族，称 β 中每个子集为基；且满足

(β_1) 每个基不是别的基的真子集；

(β_2) 若 B_1 与 B_2 是两个基，$\forall e\in B_1$，则存在 $f\in B_2$，使得 $(B_1-\{e\})\cup\{f\}$ 也是基，则称 (E,β) 是一个拟阵，记成 $M=(E,\beta)$. □

由定义知 M 中任两个基 B_1 和 B_2，必有 $|B_1|=|B_2|$，称 $|B_1|=|B_2|$ 这个数字为 M 的秩.

若 $G(V,E)$ 是一个无向图，由 G 的各个生成林的边集为基则构成一个拟阵 $M(G)=(E(G),\beta)$. 称 $M(G)$ 是图 G 的圈拟阵 (Circuit matroid).

若 E 是向量空间中一个非空有限向量集，$L(E)$ 是由 E 线性生成的子空间，则 E 的任何一个线性无关子集，当它能线性生成 $L(E)$ 时，便作为一个基，这样的基之全体记成 β，于是 (E,β) 也是

一个拟阵,称之为向量拟阵.

在拟阵中,E 的一个子集称为无关的,是指它是拟阵某个基的子集.基即极大无关集.任一拟阵,都可由它的极大无关集唯一确定.对于向量拟阵,E 的一个子集为无关集的充要条件是,当把 E 的这个子集的元素视为向量空间的向量时,它们是线性无关的.与此相仿地,若 $G(V,E)$ 是图,则 $M(G)$ 的无关集便是 G 的不含圈的边集,即导出 G 中的林的边集.

一个拟阵可以用它的无关集来描绘,所以可以用无关集来表述拟阵的定义.

定义 2 一个拟阵 M 是一个有序偶 (E,ϑ),其中 E 是非空有限集,ϑ 是 E 的一些子集的非空族,其中每个子集称为无关集,无关集满足

($\vartheta 1$) 无关集的子集是无关集.

($\vartheta 2$) I 与 J 是两个无关集,且 $|J|>|I|$,则 J 中有一个元素 e,它不在 I 中而能使 $I\cup\{e\}$ 是无关集.□

用定义 2 时,可把基定义为一个极大无关集;反复使用($\vartheta 2$)于任一无关集,便可把它扩充为一个基.

容易证明,在定义 1 中,规定每个基的子集为无关集,则 E 连同它的全体无关集自动地满足定义 2;反之,在定义 2 中,按上述(用($\vartheta 2$)扩充成基)的说明,E 连同全部基也满足定义 1;从而定义 1 与定义 2 是等价的.

若 $M=(E,\vartheta)$ 是拟阵,E 的一个子集不是无关集时,称之为相关集;极小的相关集称之为圈,对于 $M(G)$,它的每个圈正是图 G 中的圈.

若 $M=(E,\vartheta)$,$A\subseteq E$,则 A 所含的最大无关集的阶数称为 A 的秩,记为 $\rho(A)$.前面说的拟阵 M 的秩,用秩函数表示即为 $\rho(E)$.A 为无关集的充要条件是 $\rho(A)=|A|$.

定义 3 一个拟阵 M 是一个有序偶 (E,ρ),其中 E 是非空有限集合,ρ 是定义在 E 的幂集合上的整值函数,且满足

(ρ_1)　$0\leqslant\rho(A)\leqslant|A|$对 E 的每个子集 A 成立；

(ρ_2)　对 $A\subseteq B\subseteq E$，则 $\rho(A)\leqslant\rho(B)$；

(ρ_3)　对任何 $A,B\subseteq E$，$\rho(A\cup B)+\rho(A\cap B)\leqslant\rho(A)+\rho(B)$.

定理 2　定义 3 与定义 2 等价.

证　设 $M=(E,\vartheta)$是定义 2 中的拟阵，规定 $\rho(A)$为含于 A 的最大无关集中元素的个数，则(ρ_1)(ρ_2)成立. 下证(ρ_3)亦成立，设 X 是 $A\cap B$ 的极大无关子集，由于 X 是 A 的无关子集，它能扩充为 A 的一个极大无关子集 Y，再扩充为 $A\cup B$ 的一个极大无关子集 Z；因为 $X\cup(Z-Y)$是 B 的无关子集；由(ρ_2)，$\rho(B)\geqslant\rho(X\cup(Z-Y))=|X|+|Z|-|Y|=\rho(A\cap B)+\rho(A\cup B)-\rho(A)$，故($\rho_3$)成立.

反之，设 $M=(E,\rho)$是定义 3 中的拟阵，规定 E 的子集 A 是无关集的充要条件是 $\rho(A)=|A|$. 若 $A_1\neq\phi$，$A_1\subset A$，当 A 为无关集时，$A=A_1\cup(A-A_1)$，若 $\rho(A_1)<|A_1|$，因 $\rho(A-A_1)\leqslant|A-A_1|=|A|-|A_1|$，故 $|A|=\rho(A)=\rho(A_1\cup(A-A_1))=\rho(A_1\cup(A-A_1))+\rho(A_1\cap(A-A_1))\leqslant\rho(A_1)+\rho(A-A_1)<|A_1|+|A|-|A_1|=|A|$，矛盾，故 $\rho(A_1)=|A_1|$，A_1 是无关集，即(ϑ1)成立. 下证(ϑ2)成立. 设 I 与 J 是无关集且 $|J|>|I|$. 用反证法，设 $\rho(I)=k$，并设对每个属于 J 而不属于 I 的元素 e，皆有 $\rho(I\cup\{e\})=k$，那么，若 e 与 f 都属于 J 而不属于 I，则由(ρ_3)知

$$\rho(I\cup\{e\}\cup\{f\})\leqslant\rho(I\cup\{e\})+\rho(I\cup\{f\})-\rho(I)=k,$$

由此得 $\rho(I\cup\{e\}\cup\{f\})=k$，继续这种程序，每次添入 J 的一个新元素，由于每一步得到的集合秩皆为 k，最后得 $\rho(I\cup J)=k$. 由(ρ_2)知，$\rho(J)\leqslant k$，与 $\rho(J)=|J|>|I|=\rho(I)=k$ 矛盾，所以，在 J 中存在一个不属于 I 的元素 f，使得 $\rho(I\cup\{f\})=k+1=|I|+1$，证毕.

所谓拟阵 $M=(E,\rho)$的环(loop)，是指 E 中满足 $\rho(\{e\})=0$ 的元素 e；M 的一对平行元素是指 E 中一对元素 $\{e,f\}$，e,f 皆非

环，但 $\rho(\{e,f\})=1$. 在图的拟阵 $M(G)$ 中，这里说的环与平行元素分别是图的环与重边.

下面介绍几种重要的特殊拟阵.

(1) 平凡拟阵：只有空集这一个无关集的拟阵，它是一个秩为 0 的拟阵.

(2) 离散拟阵：E 的每个子集皆无关集的拟阵，离散拟阵只有一个基，它是 E 本身，$\forall A\subseteq E, \rho(A)=|A|$.

(3) 均匀拟阵：全部基即为 E 的全体 k 元子集时，称拟阵为 E 上的 k－均匀拟阵.

平凡拟阵与离散拟阵皆均匀拟阵的特例.

(4) 同构拟阵：$M=(E_1,\vartheta_1), M_2=(E_2,\vartheta_2)$ 称为同构拟阵，指存在可逆映射 $\varphi: E_1\to E_2$，使得 E_1 中的元素组成的子集在 M_1 中为无关集，当且仅当它在 E_2 中的象在 M_2 中是无关集.

(5) 可图拟阵：若拟阵 M 与一个图 G 的圈拟阵同构，则称拟阵 M 是可图拟阵.

例如在 $E=\{1,2,3\}$ 上，以 $\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\}$ 为无关集的拟阵 M 与图 4.27 中图 G 的圈拟阵 $M(G)$ 同构，此拟阵是可图拟阵.

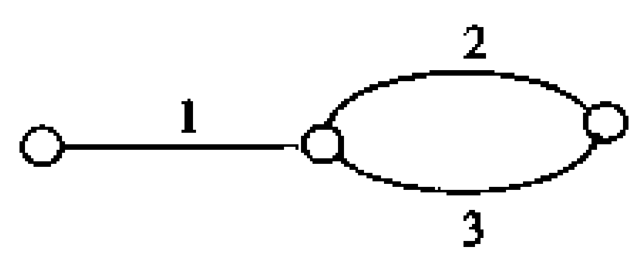


图 4.27

并非每个拟阵都是可图的，例如 4 元素集合上 2－均匀拟阵不可图.

(6) 图的割集拟阵与补可图拟阵

设 $G(V,E)$ 是一个图，拟阵 (E,ϑ) 中 ϑ 是 E 的如此子集族，其成员不以 G 的任何割集为子集，记之为 $M^*(G)$，称之为图 G 的割集拟阵；若一个拟阵与某图 G 的割集拟阵同构，则称此拟阵为补可图拟阵.

下面验证割集拟阵满足拟阵定义. (ϑ1) 自然成立. 下面证明 (ϑ2) 亦成立，设 I 与 J 都是 ϑ 的子集，且 $|I|<|J|$，$\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}=I\cap J$，$I=\{e_1,\cdots,e_k;e_{k+1},\cdots,e_p\}$，$J=\{e_1,e_2,\cdots,e_k;e_{p+1},\cdots,e_q\}$，于是由 $|I|<|J|$ 知 $q-p>p-k$. 若 $I\cup\{e_i\}(i=p+1,\cdots,$

q)皆不属于 ϑ,那么这 $q-p$ 个集合都以G 的割集为子集.由于 J 是无关集,故 $I\cup\{e_i\}$所含的 G 之割集不会是$\{e_1,e_2,\cdots,e_k,e_i\}$的子集,它必含有$\{e_{k+1},\cdots,e_p\}$中的某些边,而 $I\cup\{e_j\}$($j\neq i$, i,j 取$\{p+1,\cdots,q\}$中的值)中所含的 G 的割集与$I\cup\{e_i\}$所含者不同,即它所含的$\{e_{k+1},\cdots,e_p\}$中的边与 $I\cup\{e_i\}$所含者不同,但 $q-p>p-k$,矛盾,故必有 $e\in J$,$e\notin I$,使得 $I\cup\{e\}$仍为无关集.

(7) 可平面拟阵:既是可图的又是补可图的拟阵叫做可平面拟阵.

(8) 可表示拟阵

M 是集合E 上的拟阵,称 M 在域F 上是可表示的,指存在 F 上的向量空间 V 以及映射$\varphi:E\rightarrow V$,它有以下性质:$A\subseteq E$ 在M 中为无关的,即 φ 在A 上是一一对应且$\varphi(A)$在 V 中线性无关.当F 取 0-1 二元域时,称 M 为二分拟阵.在每个域上皆可表示的拟阵叫做正则拟阵;有的拟阵在任何域上皆不是可表示的.

图 $G(V,E)$的圈拟阵 $M(G)$是一个二分拟阵.事实上,在关联矩阵 $B(G)$中,每条边对应的列向量为 0-1 向量,一些边组成一个圈时,对应的向量之和为零向量(在 0-1 二元域上计算).

(9) 二部拟阵与 Euler 拟阵

一个拟阵的每个圈都是由偶数个元素组成,则称它为二部拟阵;若 E 是一些无公共元素的圈之并,则在集合 E 上的拟阵称为 Euler 拟阵.

(10) 子拟阵

M 是定义在集合E 上的拟阵,$A\subseteq E$,M 在A 上的限制记成$M\times A$,是指如下拟阵,它的圈恰好是 M 含于A 的圈.M 到A 的收缩记成$M\cdot A$,是指如下拟阵,它的圈是集族$\{C_i\cap A\}$的极小元,其中 C_i 是M 的圈,它们对应于在一个图中删去某些边及把某些边收缩掉.

某拟阵 M 经有限次限制与收缩得到的拟阵叫做 M 的子拟阵.

4.5.2 拟阵理论

定义 4 若 $M=(E,\rho)$是用秩函数定义的一个拟阵,M 的对偶拟阵M^*定义如下:$M^*=(E,\rho^*)$,对 $A\subseteq E$,ρ^*满足

$$\rho^*(A)=|A|+\rho(E-A)-\rho(E).\square$$

定理 3 $M^*=(E,\rho^*)$是 E 上的一个拟阵.

证 我们对 ρ^*验证定义 3 中的(ρ_1),(ρ_2),(ρ_3)三个条件.设 $A\subseteq B$,由 ρ^*的表达式得

$$\rho^*(B)-\rho^*(A)=|B|-|A|+\rho(E-B)-\rho(E-A),$$

令 $B_1=E-B$, $A_1=E-A$, $B_1\subseteq A_1$, $\rho(A_1)\leqslant\rho(A_1-B_1)+\rho(B_1)$,或 $\rho(B_1)-\rho(A_1)\geqslant-\rho(A_1-B_1)=-\rho(B-A)$,代回原式得

$$\begin{aligned}\rho^*(B)-\rho^*(A)&=|B|-|A|+\rho(B_1)-\rho(A_1)\\&\geqslant|B|-|A|-\rho(B-A),\end{aligned}$$

由(ρ_1)知此式不小于 0,从而 $A\subseteq B\subseteq E$ 时,$\rho^*(B)\geqslant\rho^*(A)$,即 ρ^*满足(ρ_2).

为了验证(ρ_1),首先易知 $\rho^*(A)\leqslant|A|$,又由$(\rho3)$,$\rho(E)+\rho(\phi)\leqslant\rho(A)+\rho(E-A)$,故 $\rho(E)-\rho(E-A)\leqslant\rho(A)\leqslant|A|$,因而 $\rho^*(A)\geqslant0$.

最后验证 ρ^*满足(ρ_3),对任何 $A,B\subseteq E$,

$$\begin{aligned}&\rho^*(A\cup B)+\rho^*(A\cap B)=|A\cup B|+|A\cap B|+\rho(E-(A\cup B))+\rho(E-(A\cap B))-2\rho(E)\\&=|A|+|B|+\rho((E-A)\cap(E-B))+\rho((E-A)\cup(E-B))-2\rho(E)\\&\leqslant|A|+|B|+\rho(E-A)+\rho(E-B)-2\rho(E)\\&=\rho^*(A)+\rho^*(B),\end{aligned}$$

证毕.

定理 4 M^*的基是 M 的基的补集.

证 若 B^*是 M^*的基,往证 $E-B^*$是 M 的基.由于 B^*在

M^*内是无关的，$|B^*|=\rho^*(B^*)$，因此$\rho(E-B^*)=\rho(E)$，于是只欠证$E-B^*$在M中是无关的. 由于B^*是M^*的基，故$\rho^*(B^*)=\rho^*(E)$，于是$\rho^*(E)=|E|+\rho(\phi)-\rho(E)=E-\rho(E)$，故$|B^*|+\rho(E-B^*)-\rho(E)=|E|-\rho(E)$，$\rho(E-B^*)=|E-B^*|$，证毕.

每个拟阵都有唯一的对偶，且$(M^*)^*=M$.

定理 5 G是一个图，$M^*(G)=(M(G))^*$.

证 由于$M^*(G)$的圈都是G的割集，我们须验证C^*是$(M(G))^*$的圈的充要条件是：C^*是G的割集. 若C^*是G的割集，而C^*在$(M(G))^*$中是无关集，那么C^*可以扩充为$(M(G))^*$的一个基B^*. 由此得$C^*\cap(E-B^*)=\phi$，而任何割集与生成林有公共边，这里$E-B^*$正是G的一个生成林，由此得矛盾. 于是C^*是$(M(G))^*$中的相关集，它含有$(M(G))^*$的一个圈.

反之，若D^*是$(M(G))^*$的一个圈，则D^*不含于$(M(G))^*$的任一基内. 由此，D^*与$M(G)$的每个基都有公共边，即D^*与G的每个生成林都有公共边，所以D^*含G的一个割集，证毕.

这里谈了不连通图的割集，是指此图一个连通片的割集.

若拟阵M的一些元素组成的集合形成M^*的一个圈，则称这个集合形成M的一个补圈. 由定理 5 知，则G的圈拟阵的补圈恰好是G的割集. 还可仿此定义M的一个补基为M^*的一个基，以及相应的补秩、补无关集等等. 还应指出，拟阵M是“补可图的”的充要条件是M^*是可图的. 引入“补概念”，便可以集中注意拟阵M，不必分心照顾M^*. 为说明这一点，我们证明下列命题在拟阵方面的类似结果.

命题 1 F是图G的生成林，则

(1) G的每个割集都与F有一条公关边；

(2) G的每个圈都与F关于G的补图(指从G中删去F的各边得到的图，即“余林边”导出的生成子图)有一条公共边.

与命题1的类似结论在拟阵中表述成：

定理6 拟阵的补圈与基相交.

证 设C^*是拟阵M的补圈，B是M的基，且$C^* \cap B = \emptyset$，即C^*含于$E-B$内，作为M^*的圈，C^*含于M^*的一个基内，矛盾，证毕.

推论1 拟阵的圈与补基相交.

我们看到，用拟阵的观点，上述命题1的(1)(2)实际上是一个结果的两种对偶形式，在拟阵中只需证明一个结果并用一下对偶性即可.

作为拟阵论引入简化的进一步的例子，我们考虑下面的命题：

命题2 (1)若图G的两个不同的圈都含有同一条边e，则G有一个不含e的圈；(2)把圈改成割集，(1)仍成立.

在拟阵论中，证明了关于圈的结果之后，再把它用于$M^*(G)$，立即得出关于割集的结果；反之，亦可利用对偶性，由关于割集的结果归结出关于圈的结果.

下面讨论有关平面图对偶图的问题，在第一篇中，我们已经给出平面图对偶图的概念，下面引入图的抽象对偶概念.

定义5 图G的抽象对偶，记成G^*，是指这样一个图，G与G^*的边之间一一对应，使得G中一个边子集构成G的一个圈的充要条件是，此边子集对应的G^*中之边子集形成G^*的一个割集. □

图4.28画的是一个图G和它的抽象对偶G^*.

定理7 G^*是图G的抽象对偶，则$M(G^*)$与$(M(G))^*$同构.

证 由于G^*是G的抽象对偶，$E(G)$与$E(G^*)$之间有一一对应关系，使G中的圈对应G^*中的割集，反之亦然. 由此得$M(G)$的圈对应于$M(G^*)$的补圈，由定理5，$M(G^*)$与$(M(G))^*$同构，证毕.

推论2 G^*是连通平面图的图论对偶，则$M(G^*)$与$(M$

$(G))^*$同构.

证 先证 G 的一个圈对应于 G^* 的一个割集,反之,G^* 中任一割集对应于 G 中一个圈.设 C 是 G 中一个圈,则 C 包围了 G 的一个或几个有界区域,故其内含 G^* 的非空顶子集;由此,G^* 与 C 交叉的那些边,形成 G^* 的割集;反之,把 G^* 的割集删除后,得到含两个连通片的图,其中一个连通片的顶集不含与 G 的无界区域对应的顶点时,围了这个顶点集所对应的 G 的各区域的外围边,即是此割集所对应的 G 中的圈,由定理 7 知,推论 2 成立,证毕.

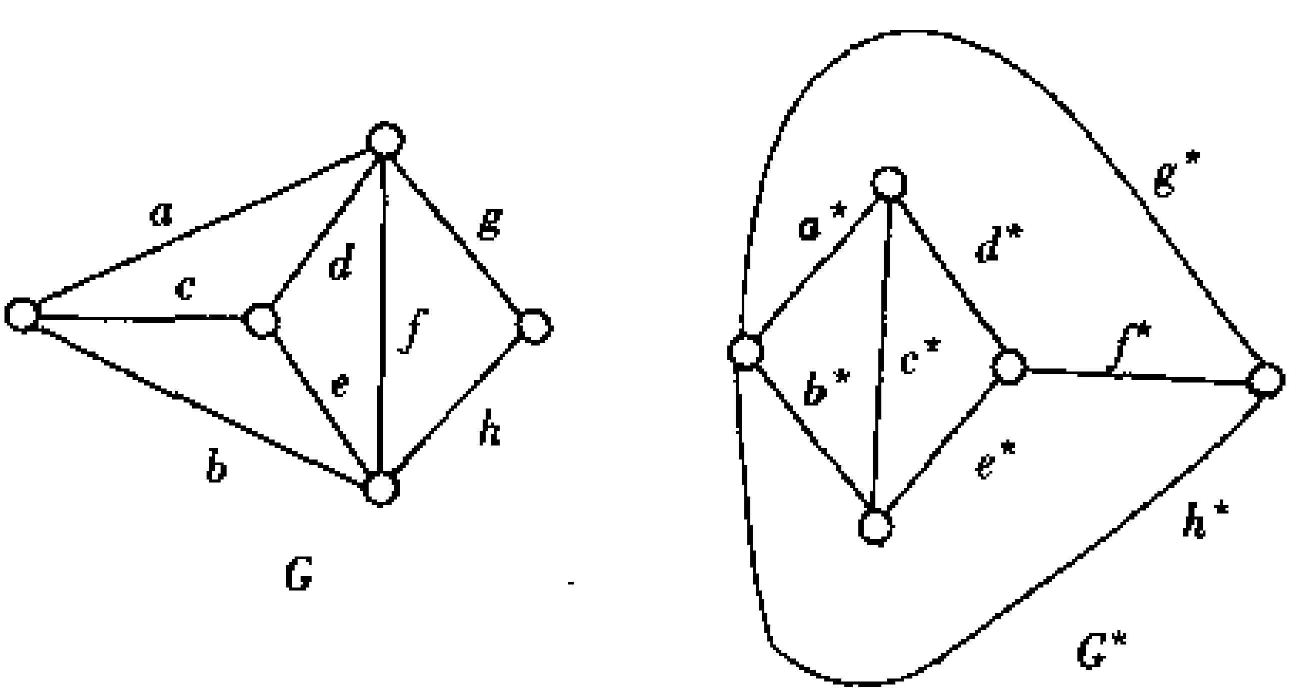


图 4.28

一个平面图可能有不止一个互不同构的对偶图,而拟阵的对偶是唯一的.可以验证,若 G^* 与 G' 是平面图 G 的两个对偶图,则 G^* 与 G' 的圈拟阵是同构的拟阵.

习题二

1. $E=\{a,b,c,d,e\}$,找出 E 上满足下列条件的拟阵:(1)E 有唯一的基,(2)空集是唯一的基;(3)E 的恰含三个元素的子集的全体组成基集合;对每个拟阵,写出它的无关集、圈(如果有)以及秩函数.

2. G_1, G_2 如图 4.29 所示，写出圈拟阵 $M(G_1)$ 与 $M(G_2)$ 的基、圈以及无关集.

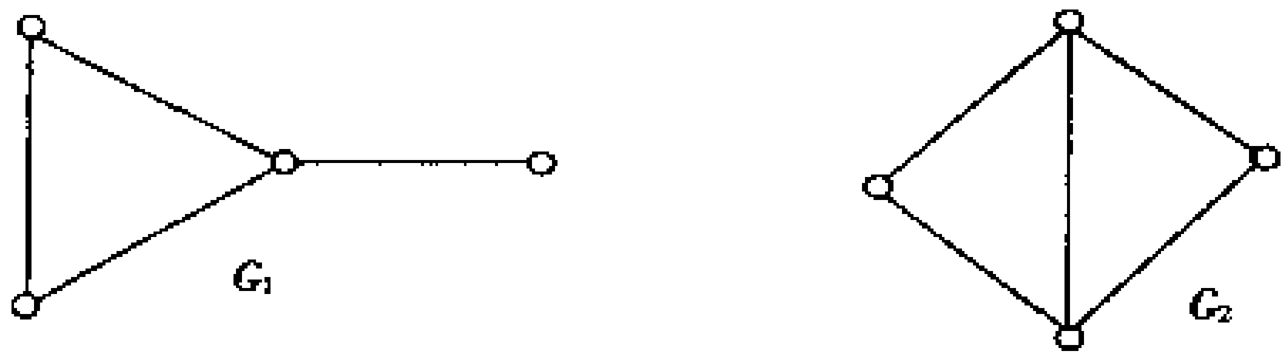


图 4.29

3. M 是 $E=\{a,b,c,d\}$ 上的拟阵，全部基为 $\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}$，写出 M 的全部圈，并引出结论：M 不是任何图 G 的圈拟阵.

4. 利用性质($\beta1$)($\beta2$)证明：(1)集合 E 上的拟阵任何两个基含有同样多的元素；(2) $A \subseteq E$，则 A 的任何两个极大无关子集内含有同样多个元素.

5. 怎样把图的基本圈集的定义推广到拟阵去？

6. 证明：拟阵 M 也可以定义为一个有序偶$(E, \mathscr{C})$，其中 E 为非空有限集，$\mathscr{C}$ 是 E 的非空子集的一个族（其中每个非空子集称为圈），它满足：(1)每个圈都不是圈的真子集；(2) C_1, C_2 是含边 e 的两个圈，则 $C_1 \cup C_2$ 中有一个圈，它不含 e.

7. $E=\{a,b\}$，若同构的拟阵不加区别，则 E 上恰有四个拟阵，试把它们的基、无关集和圈写出来.

8. $E=\{a,b,c\}$，若同构的拟阵不加区别，则 E 上恰有 8 个拟阵，写出它们的基、无关集与圈.

9. 证明：可图拟阵 $M(K_5)$ 与 $M(K_{3,3})$ 都不是补可图的.

10. M 是集合 E 上的拟阵，且 $A \subseteq B \subseteq E$，则 (1) $(M \times B) \times A = M \times A$；(2) $(M \cdot B) \cdot A = M \cdot A$.

11. 若拟阵 M 满足下列性质中任一性质，则 M 的任何子拟阵也满足同一性质：(1)可图的；(2)补可图的；(3)二分的；(4)正则的.

12. (1)证明：离散拟阵的对偶是平凡拟阵；(2) n 元素集合上

的k一均匀拟阵的对偶是什么?

13. 求第8题中8个拟阵的对偶.

14. 下列拟阵的补圈和补基是什么?

(1)九元素集上的3一均匀拟阵;(2)图3中G_1与G_2的圈拟阵.

4.6 倒称矩阵与层次分析

定义1 矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}, a_{ij}\in \mathbf{R}, n\in \mathbf{N}$,且$a_{ij}\cdot a_{ji}=1, i,j=1,2,\cdots,n$,则称$A$是倒称矩阵;若$A$是倒称矩阵,且$a_{ik}=a_{ij}a_{jk}$,则称$A$是相容的倒称矩阵.□

例如 n个运动员$v_1,v_2,\cdots,v_n$进行同一运动项目之比赛,在同一标准下,v_i与v_j的得分之比为a_{ij},问应如何排列这n个运动员的名次?且问每人的得分占n个人总分的百分之几?(设参赛选手至少得1分)

令$A=(a_{ij})_{n\times n}$,v_i得分为w_i,则

$$A=\begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ & \cdots & \cdots & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

矩阵A中关于对角线对称的位置上的两个数互为倒数,A是倒称矩阵.

设$\vec{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$,称$\vec{w}$是权向量(得分向量),则有

$$A\vec{w}=n\vec{w}, \tag{2}$$

即$\vec{w}$是A的以n为特征值的特征向量.于是求方程(2)的解$\vec{w}$即得各运动员之得分权重,按此权重由大到小排列名次.

$\dfrac{w_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j}$ 即为第 i 个运动员得分占 n 人总分的百分比.

而且(1)中的 A 是相容倒称矩阵.

考虑倒称阵:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ \frac{1}{6} & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

$a_{21}=\dfrac{1}{6}, a_{13}=4, a_{21}\cdot a_{13}=\dfrac{2}{3}\neq a_{23}=3$, 可见此矩阵 A 不是相容的倒称阵.

定理 1 如果 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是正的相容矩阵,即 $a_{ij}>0$,且 $a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$,则 A 是倒称矩阵.

证 由于 $a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$,则 $a_{ii}{}^2=a_{ii}$,从而 $a_{ii}=1, i,j,k=1,2,\cdots,n$;又 $a_{ii}=a_{ij}a_{ji}$,所以, $a_{ij}=\dfrac{1}{a_{ji}}$,故 A 是倒称矩阵,证毕.

定理 2 设 A 是正元素组成的矩阵, A 相容的充分必要条件是 A 的秩为 1,且主对角线元素皆为 1.

证 设 A 相容,由定理 1, $a_{ii}=1, i=1,2,\cdots,n$. 又

$$a_{ij}=\frac{a_{1j}}{a_{1i}}=\frac{1}{a_{1i}}\cdot a_{1j}, j=1,2,\cdots,n,$$

即第 i 行是第一行的 $\dfrac{1}{a_{1i}}$ 倍, $i=1,2,\cdots,n$. 所以 A 的秩为 1.

下证充分性. 已知 A 的秩是 1,则第 i 行是第一行的 c_i 倍,第 j 行是第 1 行的 c_j 倍, $c_i, c_j>0$,于是

$$a_{ij}a_{jk}=c_i a_{1j} c_j a_{1k}=c_i c_j \frac{a_{jj}}{c_j}\frac{a_{ik}}{c_i}=a_{jj}a_{ik},$$

又已知 $a_{jj}=1, j=1,2,\cdots,n$,所以 $a_{ij}a_{jk}=a_{ik}, i,j,k=1,2,\cdots,n$,故 A 是相容矩阵,证毕.

推论 正的相容矩阵 A 的形状如下：

$$\begin{bmatrix} \frac{a_{i1}}{a_{i1}} & \frac{a_{i2}}{a_{i1}} & \frac{a_{i3}}{a_{i1}} & \cdots & \frac{a_{in}}{a_{i1}} \\ \frac{a_{i1}}{a_{i2}} & \frac{a_{i2}}{a_{i2}} & \frac{a_{i3}}{a_{i2}} & \cdots & \frac{a_{in}}{a_{i2}} \\ & \cdots & & & \\ \frac{a_{i1}}{a_{in}} & \frac{a_{i2}}{a_{in}} & \frac{a_{i3}}{a_{in}} & \cdots & \frac{a_{in}}{a_{in}} \end{bmatrix}. \square$$

这种形状的转置恰为得分矩阵(1)的形式.

定义 2 A 是 $n \times n$ 矩阵，A 的模最大的特征值称为主特征值，相应的特征向量称为主特征向量；主特征值记成 Λ. □

根据 Perron 定理，对于所有元素皆正数的方阵 A，主特征值 Λ 是唯一的，$\Lambda>0$，Λ 是单重的，主特征向量的分量皆正数.

定理 3 正的 n 阶倒称阵相容的充要条件是 $\Lambda = n$.

证 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是正的倒称矩称，与 A 的主特值 Λ 对应的主特征向量为 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$. 于是 $Aw=\Lambda w$，其分量形式为

$$\Lambda w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j, i = 1,2,\cdots,n.$$

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i},$$

由于 $\sum_{j=1}^{n} \lambda_i = n$，$\lambda_1$ 是 Λ，于是

$$\Lambda - 1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i} - 1 = \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i}, i = 1,2,\cdots,n.$$

$$n\Lambda - n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i} a_{ij} \frac{w_j}{w_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j<i} a_{ij} \frac{w_j}{w_i} + \sum_{j>i} a_{ij} \frac{w_j}{w_i} \right)$$

$$= \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\left[a_{ij}\frac{w_j}{w_i}+a_{ji}\frac{w_i}{w_j}\right].$$

于是

$$\frac{n\Lambda-n}{n(n-1)}-1=\frac{\Lambda-n}{n-1}$$

$$=-1+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\left[a_{ij}\frac{w_j}{w_i}+a_{ji}\frac{w_i}{w_j}\right]. \tag{3}$$

记

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}\cdot\varepsilon_{ij}, \tag{4}$$

当且仅当 $\varepsilon_{ij}=1$ 时，A 就是比分阵(3)，是正的相容倒称阵.

由 A 的倒称性及 $a_{ji}\frac{w_i}{w_j}=\varepsilon_{ji}$ 得 $\frac{1}{\varepsilon_{ij}}=\varepsilon_{ji}$，于是(4)可写成

$$\frac{\Lambda-n}{n-1}=-1+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\left[\varepsilon_{ij}+\frac{1}{\varepsilon_{ij}}\right], \tag{5}$$

由(5)知当且仅当 $\varepsilon_{ij}=1$ 时，$\frac{\Lambda-n}{n-1}=0$，即当且仅当 $\Lambda=n$ 时 A 是正的相容倒称阵，证毕.

从定理3得出，$\frac{\Lambda-n}{n-1}$ 是否为零是 A 是否相容的判据，如果 A 不是相容的正矩阵，则 $\frac{\Lambda-n}{n-1}$ 越接近零，A 越接近于相容.

称 $\mu(A)=\frac{\Lambda-n}{n-1}$ 为正矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的相容指数.

美国橡树岑国家实验室对随机生成的各种阶数的正倒称阵，分别求得其 μ 的平均数 $\bar{\mu}(n)$，n 是矩阵阶数；一般用 $\frac{\mu(A)}{\bar{\mu}(n)}$ 来表示 A 的相容程度，当 $\frac{\mu(A)}{\bar{\mu}(n)}\leqslant 0.1$ 时，则认为 A 有满意的相容性.

$\bar{\mu}(1)=0.00$，　$\bar{\mu}(2)=0.00$，　$\bar{\mu}(3)=0.5\delta$，　$\bar{\mu}(4)=0.90$，
$\bar{\mu}(5)=1.12$，　$\bar{\mu}(6)=1.24$，　$\bar{\mu}(7)=1.32$，　$\bar{\mu}(8)=1.41$，
$\bar{\mu}(9)=1.45$，　$\bar{\mu}(10)=1.49$，$\bar{\mu}(11)=1.51$，$\bar{\mu}(12)=1.54$，
$\mu(13)=1.56$，$\bar{\mu}(14)=1.57$，$\bar{\mu}(15)=1.59$.

(以上各数据采自美国沃顿管理学院的统计结果)

若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是相容的正矩阵,如何求得主特征向量,我们有以下的迭代算法.

设 A 的特征为

$$\Lambda>|\lambda_2|\geqslant|\lambda_3|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|,$$

相应的特征向量为$\vec{v_1},\vec{v_2},\cdots,\vec{v_n}$,其中$\vec{v_1}$即主特征向量. 取$\vec{x_0}=(1,1,\cdots,1)^T$,可以找到 $c_i,i=1,2,\cdots,n$,使得$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}c_i\vec{v_i}$,从而

$$\begin{aligned}A\vec{x_0}&=\sum_{i=1}^{n}c_iA\vec{v_i}\\&=\Lambda(c_1\vec{v_1}+\frac{\lambda_2}{\Lambda}c_2\vec{v_2}+\cdots+\frac{\lambda_n}{\Lambda}c_n\vec{v_n}),\\A^2\vec{x_0}&=\Lambda(c_1A\vec{v_1}+\frac{\lambda_2}{\Lambda}c_2A\vec{v_2}+\cdots+\frac{\lambda_n}{\Lambda}Ac_n\vec{v_n})\\&=\Lambda^2(c_1\vec{v_1}+\frac{\lambda_2^2}{\Lambda^2}c_2\vec{v_2}+\cdots+\frac{\lambda_n^2}{\Lambda^2}c_n\vec{v_n}),\end{aligned}$$

如此递推得

$$A^n\vec{x_0}=\Lambda^n(c_1\vec{v_1}+(\frac{\lambda_2}{\Lambda})^nc_2\vec{v_2}+\cdots+(\frac{\lambda_n}{\Lambda})^nc_n\vec{v_n}),$$ $n\gg1$时,

$\left|\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right|^n\ll1,i=2,3,\cdots,n$,于是 $\Lambda^n\vec{x_0}\approx\Lambda^nc_1\vec{v_1},c_1\neq0$,即迭代足够多次之后,$A^n\vec{x_0}$ 与主特征向量$\vec{v_1}$ 方向近似一致. 由上述道理,可以建立下面的求主特征向量的算法.

主特征向量迭代算法:

(1) 取初始向量$\vec{x_0}=(1,1,\cdots,1)^T$,归一化,即$\vec{x_0}\leftarrow\frac{\vec{x_0}}{|\vec{x_0}|}$.

(2) 设$\vec{x_k}$已求得,且已归一化,即$\vec{x_k}\leftarrow\frac{\vec{x_k}}{|\vec{x_k}|}$,令 $A\vec{x_k}=\vec{x_{k+1}}$,且把$\vec{x_{k+1}}$归一化.

(3)对于事先规定的允许误差 $\varepsilon>0$,若

$\| \overrightarrow{x_{k+1}} - \overrightarrow{x_k} \| < \varepsilon$,止,$\overrightarrow{x_{k+1}}$即为所求的主特征向量的满意近似.

例 1 求正倒称阵 A 的主特征向量:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ \frac{1}{6} & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

解 取$\overrightarrow{x_0} = (1,1,1)^T$,则

$$A\overrightarrow{x_0} = (11, 4.167, 1.584)^T = \overrightarrow{x_1},$$

$\overrightarrow{x_1}$归一化得(仍记成$\overrightarrow{x_1}$):

$$\overrightarrow{x_1} = (0.657, 0.249, 0.094)^T;$$

$$A\overrightarrow{x_1} = (2.527, 0.641, 0.041)^T = \overrightarrow{x_2},$$

归一化得

$$\overrightarrow{x_2} = (0.720, 0.183, 0.097)^T;$$

$$A\overrightarrow{x_2} = (2.206, 0.594, 0.338)^T = \overrightarrow{x_3},$$

归一化得

$$\overrightarrow{x_3} = (0.703, 0.189, 0.108)^T;$$

$$A\overrightarrow{x_3} = (2.269, 0.630, 0.349) = \overrightarrow{x_4},$$

归一化得

$$\overrightarrow{x_4} = (0.699, 0.194, 0.107)^T;$$

$$A\overrightarrow{x_4} = (2.291, 0.632, 0.347)^T = \overrightarrow{x_5},$$

归一化得

$$\overrightarrow{x_5} = (0.701, 0.193, 0.106)^T;$$

$$A\overrightarrow{x_5} = (2.283, 0.628, 0.345)^T = \overrightarrow{x_6},$$

归一化得

$$\overrightarrow{x_6} = (0.701, 0.193, 0.106)^T,$$

至此发现$\overrightarrow{x_5} = \overrightarrow{x_6}$,止,主特征向量为

$$\overrightarrow{x_6}=(0.701,0.193,0.106)^T.$$

下面利用倒称阵的这些概念和理论建立所谓层次分析技术(*Analytical Hierarchy Process*,代号 AHP).AHP 是二十世纪七十年代,由美国数学家托马斯·萨迪(*Thomas Sacty*)提出的一种服务于经济管理的现代离散数学模型,之后在众多离散对象的计量问题中都有 AHP 的用武之地.

下面用一实例说明 AHP 的具体执行过程.

国家能源主要消耗于三个方面:

A_1:家庭;A_2:运输业;A_3:工矿.

对综合国力作用最大的有三个方面:

B_1:经济实力;B_2:环境质量;B_3:国防实力.

应依据 A_1,A_2,A_3 对 B_1,B_2,B_3 作用之大小,再考虑 B_1,B_2,B_3 对综合国力 C 重要性的大小,确定 A_1,A_2,A_3 的供给份额.

(1) 画出 $C-(B_1,B_2,B_3)-(A_1,A_2,A_3)$层次图,如图 4.30 所示:

最高层只一个顶(C),称为"目标层","中间层"是 B_1,B_2,B_3,中间层可以不只一层;A_1,A_2,A_3 所处的最底层叫做"方案层".有向边自下而上,每条有向边之头对其尾有控制,支配或要求的关系.

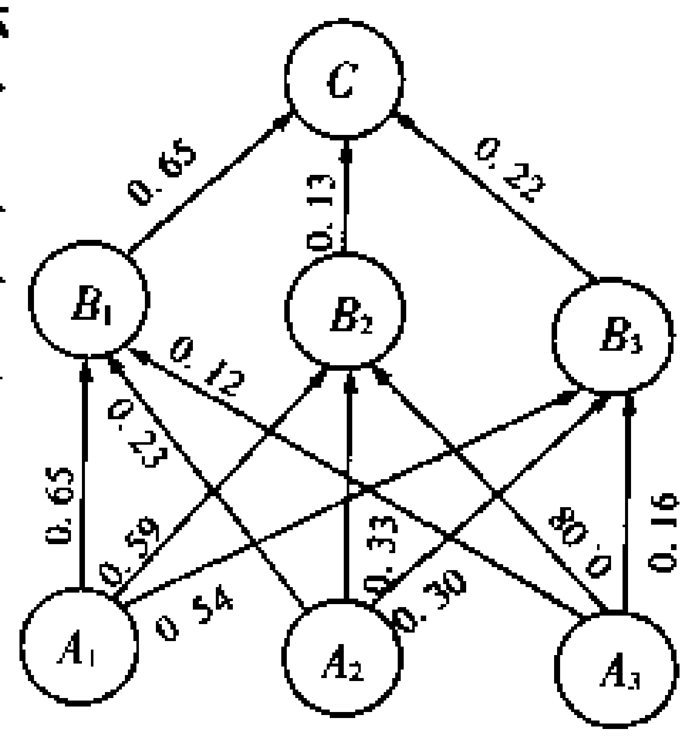


图 4.30

(2) 对层次图的边加权

(2.1) 设 B_1,B_2,B_3 对 C 的重要性的比分矩阵为 $A(C)$,根据历史统计资料和众专家的独立打分(给出 B_1,B_2,B_3 两两比分),得到 $A(C)$如下:

$$A(C)=\begin{matrix} & B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & 1 & 5 & 3 \\ B_2 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{3}{5} \\ B_3 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{matrix},$$

此矩阵的第 ij 号元素是 B_i 比 B_j 的比分.

用求主特征向量的迭代算法求得主特征向量为$(0.65,0.13,0.22)^T$,于是把边 B_1C,B_2C,B_3C 分别加权 0.65,0.13,0.22.

(2.2) 设 A_1,A_2,A_3 对 B_1 的重要性的比分矩阵为$A(B_1)$,与 $A(C)$类似地评比过程得

$$A(B_1)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

用求主特征向量算法求得 $A(B_1)$主特征向量为$(0.65,0.23,0.12)^T$;边 A_1B_1,A_2B_1,A_3B_1 的权分别为 0.65,0.23,0.12.

(2.3) 设 A_1,A_2,A_3 对 B_2 的重要性的比分矩阵为 $A(B_2)$,与 $A(B_1)$相似地过程得出

$$A(B_2)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 5 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix},$$

用求主特征向量的算法求得 $A(B_2)$的主特征向量为$(0.59,0.33,0.08)^T$;边 A_1B_2,A_2B_2,A_3B_2 的权分别为 0.59,0.33,0.08.

(2.4) 设 A_1,A_2,A_3 对 B_3 的重要性的比分矩阵为 $A(B_3)$,与 $A(B_1)$相似地得出

$$A(B_3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & 1 & 2\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix},$$

用求主特征向量的算法求得 $A(B_3)$的主特征向量为$(0.54,0.30,0.16)^T$;边 A_1B_3,A_2B_3,A_3B_3 的权分别为0.54,0.30,0.16.

(3) 分别计算从每个方案层顶到目标顶每个有向轨的权积，再求积之和得

$A_1=0.65\times0.65+0.59\times0.13+0.54\times0.22=0.62$;

$A_2=0.23\times0.65+0.33\times0.13+0.30\times0.22=0.26$;

$A_3=0.12\times0.65+0.08\times0.13+0.16\times0.22=0.12$.

(4) 方案:能源分配方案为:家用 62%，运输业 26%，厂矿 12%.

众多实际问题,诸如总经理的选聘、销售方案的确定、高考志愿的填报、利润成本之分析、冲突的调解、群体决策、商品进货决策等等,也可用 AHP 来解决,解决步骤与上面的能源配置雷同.

4.7 正交拉丁方

在科学与生产实践当中,免不了要进行试验,其中就有一个试验设计问题,希望试验次数不要太多,得到的试验结论又要足够可靠.下面介绍的正交拉丁方,一种特殊的 $n\times n$ 矩阵,正是满足上述要求的得力工具.

定义1 方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n},a_{ij}\in\{1,2,\cdots,n\}$,且 A 的每一行每一列皆$\{1,2,\cdots,n\}$的一个全排列,则称 A 是n 阶拉丁方.□

原始的方阵 A,每一元素都是某一拉丁字母,所以称其为拉丁方;后来把字母用其数码替代,例如 $a=1,b=2,c=3,\cdots$,则变成定义1中所述的拉丁方了.

由定义 1,任一拉丁方经行的任意调换或列的任意调换,仍是一个拉丁方,可见同阶拉丁方是不唯一的.

一般地,若 φ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到自身的映射(置换),$A=(a_{ij})_{n\times n}$是拉丁方,则$(\varphi(a_{ij}))_{n\times n}$也是拉丁方.

定义 2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$和$B=(b_{ij})_{n\times n}$是两个 n 阶拉丁方,且向量集$\{(a_{ij},b_{ij})\mid i,j=1,2,\cdots,n\}$的元素个数恰为 n^2 个,则称 A 与 B 是一对正交拉丁方,记成 $A\perp B$.□

例如 2 阶拉丁方仅两个:

$$A_2^{(1)}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\quad A_2^{(2)}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},$$

把 $A_2^{(1)}$ 与 $A_2^{(2)}$ 重合,(a_{ij},b_{ij})形向量仅有(1,2)与(2,1)两个,由定义 2,2 阶拉丁方无正交者.

1782 年,著名数学家 Euler 提出了一个所谓“36 军官问题”:

从 6 个兵团的每一兵团皆选出 A,B,C,D,E,F 六种军衔的军官各一名,问能否把这 36 名军官排成方阵,使得每行每列的六名军官均来自不同的兵团,且同行、同列的六名军官有不同的军衔?

1900 年,法国人 Tarry 证明 36 军官问题无解.

事实上,方阵的 36 个位置的军官亮出他们所在兵团的番号,则得一个拉丁方 A;军官们再亮出他们的军衔,又组成一个拉丁方 B,由于来自同一兵团的同种军衔仅一名,所以如果有解,就是要证明 $A\perp B$;而正交的 6 阶拉丁方是不存在的.

当 $n\neq 2,6$ 时,才存在 n 阶正交拉丁方.

定理 1 互相正交的 n 阶拉丁方不超过 $n-1$ 个.

证 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是互相正交的 n 阶拉丁方,且已无 $k+1$ 个互相正交的 n 阶拉丁方,往证 $k\leqslant n-1$. 设 $a_1a_2\cdots a_n$ 是$\{1,2,3,\cdots,n\}$的一个排列;当两个正交的 n 阶拉丁方中的一个通过“更名”置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

把 i 改写成a_i 后,这两个拉丁方仍正交.所以可以把这 k 个互相正交的 n 阶拉丁方更名,使得每个拉丁方的第一行都是 1,2,3,4,…,n.再考虑各拉丁方的 21 号元素 $a_{21}^{(1)},a_{21}^{(2)},\cdots,a_{21}^{(k)}$,它们都不是 1.由正交性,这 k 个元素两两相异;由上述讨论知,这组正交拉丁方至多 $n-1$ 个,证毕.

由 $n-1$ 个彼此正交的 n 阶拉丁方组成的拉丁方组称为完备的拉丁方正交组.对于 $\forall n\in\mathbf{N}$,是否存在完备正交组,是拉丁方理论中尚未彻底解决的问题.但对于一些特殊的 n,则可以构造出 n 阶完备正交组.

定理 2 若 p 为素数,$n=p^{\alpha},\alpha\in\mathbf{N}$,则存在 n 阶拉丁方的完备正交组.

证 我们知道,当 p 为素数时,对 $\forall \alpha\in\mathbf{N}$,存在 p^{α} 个元素组成的有限域F,例如伽洛瓦域 $F=GF[p^{\alpha}]$.令 $n=p^{\alpha}$,设 $t_0,t_1,\cdots,t_{n-1}$是 F 中的元素,(t_0 是零元素,t_1 是单位元),我们来构作拉丁方 $A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$:

$$A_k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n},k=1,2,\cdots,A_{n-1}.$$

其中

$$a_{ij}^{(k)}=t_k\cdot t_i+t_j,i,j=0,1,2,\cdots,n-1,$$
$$k=1,2,\cdots,n-1,$$

乘·与加+是 F 中的乘与加.则 A_k 都是拉丁方.事实上,若 A_k 不是拉丁方,则或者 $a_{ij}^{(k)}=a_{ih}^{(k)}$,或者 $a_{hj}^{(k)}=a_{ij}^{(k)}$,这两种现象必出现至少一种.即 $t_k\cdot t_i+t_j=t_kt_i+t_h,t_j=t_h$,于是 $j=h$,或者 $t_kt_h+t_j=t_kt_i+t_j,t_kt_h=t_kt_i,t_k$ 不是零元素.于是 $h=i$.上述论证显示,A_k 中任一行与任一列中皆无两元素相同.所以 A_k 皆拉丁方.

下证 $A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$两两正交.若其中有两个拉丁方 A_s,A_r 不正交,则会出现如下现象:

$$(a_{i_1j_1}^{(s)},a_{i_1j_1}^{(r)})=(a_{i_2j_2}^{(s)},a_{i_2j_2}^{(r)}),$$

于是 $a_{i_1j_1}^{(s)}=a_{i_2j_2}^{(s)},a_{i_1j_1}^{(r)}=a_{i_2j_2}^{(r)}$,故有

$$t_s\cdot t_{i_1}+t_{j_1}=t_s\cdot t_{i_2}+t_{j_2},\tag{1}$$

$$t_r\cdot t_{i_1}+t_{j_1}=t_r\cdot t_{i_2}+t_{j_2},\tag{2}$$

(1)-(2)得

$$t_{i_1}(t_s-t_r)=t_{i_2}(t_s-t_r).\tag{3}$$

而 $s\neq r$,于是 $t_{i_1}=t_{i_2},i_1=i_2$.考虑 A_s 与 A_r 的转置,则会得出 $j_1=j_2$,可见 A_s 与 A_r 正交,证毕.

定理 3 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两正交的 n 阶拉丁方,$B_1,B_2,\cdots,B_k$ 是两两正交的 m 阶拉丁方,则存在 nm 阶的两两正交的拉丁方 $C_1,C_2,\cdots,C_k$.

证 记 $A_r=(a_{ij}^{(r)})_{n\times n}$, $B_r=(b_{ij}^{(r)})_{m\times m}$, $r=1,2,\cdots,k$; $(a_{ij}^{(r)},B_r)$是 m 阶方阵,其第 p 行 q 列的元素为$(a_{ij}^{(r)},b_{pq}^{(r)})$, $p,q=1,2,\cdots,m$,令 mn 阶方阵

$$C_r=\begin{pmatrix}(a_{11}^{(r)},B_r) & (a_{12}^{(r)},B_r) & \cdots & (a_{1n}^{(r)},B_r)\\ (a_{21}^{(r)},B_r) & (a_{22}^{(r)},B_r) & \cdots & (a_{2n}^{(r)},B_r)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (a_{n1}^{(r)},B_r) & (a_{n2}^{(r)},B_r) & \cdots & (a_{nn}^{(r)},B_r)\end{pmatrix},$$

在 C_r 中同一行或同一列的任两个偶对$(a_{ij}^{(r)},b_{pq}^{(r)})$不是第一个分量相异,就是第二个分量相异,所以 C_r 都是拉丁方.

下证 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 两两正交.

若 C_h,C_l 不正交,$1\leqslant h,l\leqslant k$,且 $h\neq l$,则存在 i,j,p,q,f,g,t,s,使得$(i,j)\neq(f,g)$或$(p,q)\neq(t,s)$,且

$$((a_{ij}^{(h)},b_{pq}^{(h)}),(a_{ij}^{(l)},b_{pq}^{(l)}))=((a_{fg}^{(h)},b_{ts}^{(h)}),(a_{fg}^{(l)},b_{ts}^{(l)})),$$

于是

$$(a_{ij}^{(h)},b_{pq}^{(h)})=(a_{fg}^{(h)},b_{ts}^{(h)}),$$
$$(a_{ij}^{(l)},b_{pq}^{(l)})=(a_{fg}^{(l)},b_{ts}^{(l)}).$$

与 $A_h \perp A_l$, $B_h \perp B_l$ 矛盾，故 $C_h \perp C_l$，证毕.

由定理 2，我们可以造出阶数为 2,3,4,5,7,8,9,11,13,16,17 等等素数幂的完备正交拉丁方组.

由定理 3 可以造出更多的正交拉丁方组，例如 3 阶与 4 阶正交拉丁方各两个，可以造出两个正交的 $3\times4=12$ 阶正交拉丁方等等.

下面用一个例题说明如何运用正交拉丁方来进行试验设计，不但使试验次数足够少，而且使试验结果足够满意.

配制一种新药，必须进行试验，以确定各种成分配伍的最佳剂量. 用 A,B,C,D 表示该药的四种成分，每种成分分三个剂量进行试验，寻找满意的配方.

如果所有可能的组合都要试验一次，再比较疗效，则需 $3^4=81$ 次试验. 由于成本和接受试验的对象的限制，只能进行 9 次试验，则可如下安排试验：

设 A_1,A_2,A_3 是 A 的三种剂量，B_1,B_2,B_3 是 B 的三种剂量，A 与 B 各剂量之搭配共有 9 种：

$$A*B=\begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{pmatrix}.$$

再考虑 C 的三种剂量如何与 A,B 搭配，设 C 的三种剂量用其序号 1,2,3 来代表，用 1,2,3 构作一个拉丁方

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

于是 $A*B$ 与 C 是正交拉丁方，取 A,B,C 之搭配如下：

$$\langle A*B,C\rangle=\begin{pmatrix} A_1B_1C_1 & A_1B_2C_2 & A_1B_3C_3 \\ A_2B_1C_2 & A_2B_2C_3 & A_2B_3C_1 \\ A_3B_1C_3 & A_3B_2C_1 & A_3B_3C_2 \end{pmatrix}.$$

最后取 D 的三剂量之拉丁方为

$$D=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix},$$

则 $C\perp D$. 得试验方案为

$$\langle A*B,C,D\rangle=\begin{pmatrix}A_1B_1C_1D_1&A_1B_2C_2D_2&A_1B_3C_3D_3\\A_2B_1C_2D_3&A_2B_2C_3D_1&A_2B_3C_1D_2\\A_3B_1C_3D_2&A_3B_2C_1D_3&A_3B_3C_2D_1\end{pmatrix}.$$

$\langle A*B,C,D\rangle$中的各项 $A_iB_jC_kD_l$ 表示一次试验,用 A 的第 i 剂量,B 的第 j 剂量,C 的第 k 剂量,D 的第 l 剂量搭配进行. 再从这九个试验中选用疗效最好的那种处分.

我们看到,用上述正交拉丁方技术安排试验,各剂量间搭配均匀全面. 试验次数不多,程序简便易行. 对于 $n+1$ 个因子,每个因子分成 n 个水平的情形,用正交拉丁方安排,仅做 n^2 个试验即可,而若全面试验,则需做 n^{n+1}个试验,例如 8 个因子,每个分成 7 个水平,用 7 阶正交拉丁方试验,仅需 $7^2=49$ 次试验,而全面试验则需 $7^8=5764801$ 次!

4.8 区组设计与区组矩阵

区组设计是解决给定的有限对象集合的满足指定条件的子集族的存在性和它们的构作等问题,“区组”是指这些子集而言. 区组设计有完全区组设计与不完全区组设计两种,例如拉丁方就是一个完全区组设计,它的每一行或每一列,做为区组,其元素组成的集合恰为原来的对象集合,但对正交拉丁方的每行每列,每个区组的元素安置要按正交拉丁方的要求来排列. “完全”二字是指每个区组做为一个集合而言恰是原来的那个已知的对象集合,它当然也是已知对象集合的子集,但不是真子集,而是“全子集”,不是完全区组设计的区组设计称为不完全区组设计,它的区组当中有对象集合的真子集.

4.8.1 BIBD 问题

在不完全区组设计当中，最重要的是所谓平衡不完全区组设计，其代号为 BIBD(Balanced Incomplete Block Design).

定义 1 设 X 是对象集合，$|X| = v$，$B_1, B_2, \cdots, B_b$ 是 X 的 k 元素子集，$k < v$，且满足如下条件：

(1) $\forall x \in X$，x 在子集族 $\{B_1, B_2, \cdots, B_b\}$ 中恰出现 r 次；

(2) $\forall u, w \in X$，u 与 w 在 $\{B_1, B_2, \cdots, B_b\}$ 中恰同时出现 λ 次，即 $|B_i \cap \{u, w\}| = 2$ 的 B_i 的个数是 λ.

则称 $\{B_1, B_2, \cdots, B_b\}$ 为一个 (b, v, r, k, λ)—设计或称平衡不完全区组设计，λ 称为两个对象(元素)的相遇数. □

例如英格兰数学家 T·P·Kirkman 提出的 15 女生问题就是 $(35, 15, 7, 3, 1)$ – BIBD 问题：

15 名女生，每天分成 5 组，每组 3 人出外散步，为她们编制一份一周中的分组表，使得任两位女生在一周内恰好相伴在同一组仅一次.

定理 1 (b, v, r, k, λ) – BIBD 满足

$$bk = vr, r(k-1) = \lambda(v-1).$$

证 因为有 b 个区组，每组 k 个元素，元素出现的总次数为 bk，又 $|X| = v$，而每个元素在 $\{B_1, B_2, \cdots, B_b\}$ 中恰出现 r 次，故 $\{B_1, B_2, \cdots B_b\}$ 中元素出现的总次数为 vr，所以 $bk = vr$.

在集合 X 中，考虑 $x_i \in X$，由定义 1(1)，x_i 与其它元素相遇的总次数为 $r(k-1)$；另一方面，由定义 1(2)，x_i 与其它元素相遇的总次数为 $\lambda(v-1)$，故有 $r(k-1) = \lambda(v-1)$，证毕.

定义 2 在 (b, v, r, k, λ) – BIBD 中，若 $b = v$，$r = k$，则称这种 BIBD 为对称 BIBD，记成 (v, k, λ) – BIBD. □

4.8.2 区组关联矩阵

定义 3 设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_v\}$ 是对象集合，$B_i \subseteq X$，$i = 1, 2, \cdots, b$，所谓区组族 $\{B_1, B_2, \cdots, B_b\}$ 的关联矩阵是指矩阵 $B = (b_{ij})_{v \times b}$，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}1, x_i\in B_j, i=1,2,\cdots,v, j=1,2,\cdots,b;\\ 0, x_i\notin B_j.\square\end{cases}$$

关联矩阵给出之后，原则上就是给出了区组设计的一切信息.

例如已知一个区组设计的关联矩阵为

$$B=\begin{array}{c} \\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\\ x_8\\ x_9\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccccc}B_1&B_2&B_3&B_4&B_5&B_6&B_7&B_8&B_9&B_{10}&B_{11}&B_{12}\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array},$$

B 中每列三个 1，知 $k=3$；任意两行中在同一列上恰有两个 1 的情形仅出现 1 次，知 $\lambda=1$. B 中每行皆有四个 1，知 $r=4$；又 $v=9, b=12$，所以由 B 知，它表达的是 $(12,9,4,3,1)$ - BIBD.

具体地清单如下：

$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_9\}$，区组为

$B_1=\{x_1,x_2,x_3\}$　$B_2=\{x_4,x_5,x_6\}$　$B_3=\{x_7,x_8,x_9\}$，

$B_4=\{x_1,x_4,x_7\}$　$B_5=\{x_2,x_5,x_6\}$　$B_6=\{x_3,x_6,x_9\}$，

$B_7=\{x_1,x_5,x_9\}$　$B_8=\{x_2,x_6,x_7\}$　$B_9=\{x_3,x_4,x_8\}$，

$B_{10}=\{x_1,x_6,x_8\}$　$B_{11}=\{x_2,x_4,x_9\}$　$B_{12}=\{x_3,x_5,x_7\}$.

定理 2　设 B 是 (b,v,r,k,λ) - BIBD 的区组矩阵，则

$$BB^T=(r-\lambda)I+\lambda J,$$

其中 I 是 $v\times v$ 的单位阵，J 是 $v\times v$ 的全 1 阵.

证　设 $(c_{ij})_{v\times v}=BB^T$，则 c_{ij} 是 B 的第 i 行与第 j 行的数量积，于是 c_{ii} 是 B 的第 i 行非零元素的个数，所以 $c_{ii}=r$；$i\neq j$ 时，

C_{ij}是第 i 行与第 j 行对应分量皆为 1 的这种分量的个数，故 $c_{ij}=\lambda$，所以

$$BB^T=(r-\lambda)I+\lambda J,$$

证毕.

定理 3 对于(b,v,r,k,λ)－BIBD，$b\geqslant v$.

证 对于(b,v,r,k,λ)－BIBD，$k<v$，又 $r(k-1)=\lambda(v-1)$，所以 $r>\lambda$.

若 $b<v$；在 B 的右侧添加 $v-b$ 个零列向量，B 扩大成一个 $v\times v$ 的方阵B_1，由于添加的零列不改变 B 各行间的内积，故 $BB^T=B_1B_1^T$，从而

$$\det(BB^T)=\det(B_1B_1^T)=\det B_1\cdot\det B_1^T.$$

而 $\det B_1=\det B_1^T$，所以 $\det(BB^T)=0$.

由定理 2，

$$\det(BB^T)=\begin{vmatrix} r & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & r \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} r & \lambda-r & \lambda-r & \cdots & \lambda-r \\ \lambda & r-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 0 & r-\lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & r-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} r+(v-1)\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & r-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 0 & r-\lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & r-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=[r+(v-1)\lambda](r-\lambda)^{v-1}$$

$$=rk(r-\lambda)^{v-1}.$$

但 $r,k,r-\lambda$ 皆非零,故得出 $\det(BB^T)\neq 0$,与 $\det(BB^T)=0$ 相违,证毕.

4.8.3 Hadamard 矩阵

定义 4 称 $H=(h_{ij})_{n\times n}$ 为 Hadamard 矩阵,其中 $h_{ij}\in\{-1,1\}$,且满足 $HH^T=nI$.

若 H 的第一行与第一列没有元素 -1,则称 H 为规范 Hadamard 矩阵.□

由 Hadamard 矩阵的定义,可以证明以下简单性质:

(1) H 的不同两行向量内积为零.

(2) H 的任一行向量与自己的内积为 1.

(3) H^T 仍有性质(1)(2).

(4)用 -1 乘 H 的某行或某列,得到的矩阵仍为 Hadamard 矩阵.

例如

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

就是一个规范 Hadamard 矩阵.

利用性质(4)可以用 H 的某些行与列乘以 -1 的办法得到规范 Hadamard 矩阵.

定理 4 设 H 是 $n\times n$ 的 Hadamard 矩阵,$n>2$,则 m 可被 4 除尽.

证 把 H 规范化,由于任两行内积为零,除第一行外,每行与第一行之内积为零,于是知,从第二行起,每行 $\frac{n}{2}$ 个 1,$\frac{n}{2}$ 个 -1. 通过列置换,使第二行前 $\frac{n}{2}$ 个元素皆为 1. 设第三行前 $\frac{n}{2}$ 个元素中有 m 个 1,后 $\frac{n}{2}$ 个元素中有 m' 个 1,则

$$
\begin{cases}
m + m' = \dfrac{n}{2},\\
\left[m - \left(\dfrac{n}{2} - m\right)\right] + \left[\left(\dfrac{n}{2} - m'\right) - m'\right] = 0,
\end{cases}
$$

解得 $m = m' = \frac{n}{4}$,即 $n \equiv 0 \pmod 4$,证毕.

定理 5　$H_1 = (h_{ij}^{(1)})_{n\times n}$ 与 $H_2 = (h_{ij}^{(2)})_{n'\times n'}$ 是两个 Hadamard 矩阵,则 H_1 与 H_2 的笛卡儿积

$$
H_1 \times H_2 = \begin{bmatrix}
h_{11}^{(1)}H_2 & h_{12}^{(1)}H_2 & \cdots & h_{1n}^{(1)}H_2\\
h_{21}^{(1)}H_2 & h_{22}^{(1)}H_2 & \cdots & h_{2n}^{(1)}H_2\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
h_{n1}^{(1)}H_2 & h_{n2}^{(1)}H_2 & \cdots & h_{nn}^{(1)}H_2
\end{bmatrix}
$$

也是一个 Hadamard 矩阵.

证　显然,$H_1 \times H_2$ 的元素属于 $\{-1,1\}$,且 $h_{ij}^{(1)}H_2$ 的每行有 $\frac{n'}{2}$ 个 1,$\frac{n'}{2}$ 个 -1,$H_1 \times H_2$ 的每行含 $\frac{nn'}{2}$ 个 1,$\frac{nn'}{2}$ 个 -1,$H_1 \times H_2$ 的每一行与自身之内积为 nn';而 $H_1 \times H_2$ 中不同行的内积是零,由定义,$H_1 \times H_2$ 是 nn' 阶的 Hadamard 矩阵,证毕.

下面讨论如何由 Hadamard 矩阵产生对称的平衡不完全区组设计.

设 H 是 $n \geqslant 8$ 的规范 Hadamard 矩阵,删去 H 的第一行和第一列,把剩余的方阵 $H'_{(n-1)\times(n-1)}$ 中的 -1 改写成 0,把如此得到的矩阵记成 B,于是 B 的每一行有 $\frac{n}{2} - 1$ 个 1 和 $\frac{n}{2}$ 个 0,且 B 的两个不同的行之内积等于 $\frac{n}{4} - 1$,所以 B 是对称的 BIBD $\left(n-1, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{4}-1\right)$ - BIBD 的关联矩阵,从而可由 B 给出此对称 BIBD 的清单.

例如

$$H=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&-1&1&-1&-1&-1\\1&-1&1&1&-1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1&1&-1&1&-1\\1&-1&-1&-1&1&1&-1&1\\1&1&-1&-1&-1&1&1&-1\\1&-1&1&-1&-1&-1&1&1\\1&1&-1&1&-1&-1&-1&1\end{pmatrix},$$

删去第一行第一列，并把 -1 改写成 0，得

$$B=\begin{array}{c}\\x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}B_1&B_2&B_3&B_4&B_5&B_6&B_7\end{array}\\\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&1&0\\0&0&0&1&1&0&1\\1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0&1&1\\1&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array},$$

作为一个$(7,3,1)-$BIBD，清单如下：

$$B_1=\{x_1,x_5,x_7\},B_2=\{x_1,x_2,x_6\},$$
$$B_3=\{x_2,x_3,x_7\},B_4=\{x_1,x_3,x_4\},$$
$$B_5=\{x_2,x_4,x_5\},B_6=\{x_3,x_5,x_6\},$$
$$B_7=\{x_4,x_6,x_7\}.$$

4.8.4 区组设计的构作

从已知的对称 BIBD，可以构作出一些非对称的 BIBD.

定理 6 $(v,k,\lambda)-$BIBD 中，任两个区组有 λ 个公共元素.

证 对于$(v,k,\lambda)-$BIBD，$b=v$，$k=r$，其关联矩阵 B 是 $v\times v$ 的方阵. 由定理 3 的证明，$\det(BB^T)\neq0$，所以 $\det B\neq0$，B^{-1}

存在，由定理 2，

$$
\begin{aligned}
B^{-1}B &= (B^{-1}B)(B^TB) \\
&= B^{-1}(BB^T)B \\
&= B^{-1}[(k-\lambda)I+\lambda J]B \\
&= (k-\lambda)B^{-1}IB+\lambda B^{-1}JB \\
&= (k-\lambda)I+\lambda B^{-1}JB,
\end{aligned}
$$

因为 $k=r$，所以 B 的每行每列恰有 k 个 1，于是

$$BJ=kJ=JB, J=B^{-1}JB,$$

所以

$$B^TB=(k-\lambda)I+\lambda J=\begin{pmatrix} k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \cdots & \lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & k \end{pmatrix},$$

由此可知 B 的任两区组恰有 λ 个公共元素，证毕.

定理 7 $B_1, B_2, \cdots, B_v$ 是对象集合 $X=\{x_1, \cdots, x_v\}$ 的一个对称不完全区组设计 (v,k,λ) – BIBD，则对任一 B_i，$B_1-B_i, B_2-B_i, \cdots, B_{i-1}-B_i, B_{i+1}-B_i, \cdots, B_v-B_i$ 构成 $X-B_i$ 的一个平衡不完全区组设计.

证 这 $v-1$ 个区组 $B_1-B_i, B_2-B_i, \cdots, B_v-B_i$ 中占用了 $X-B_i$ 中的全部元素. $X-B_i$ 中的每个元素在这些区组中仍皆出现 k 次，由定理 6，$B_1, B_2, \cdots, B_{i-1}, B_{i+1}, \cdots, B_v$ 中每个区组与 B_i 有 λ 个公共元素，所以 $B_1-B_i, B_2-B_i, \cdots, B_{i-1}-B_i, B_{i+1}-B_i, \cdots, B_v-B_i$ 中每个区组有 $k-\lambda$ 个元素，故这些区组构成 $((v-1),(v-k),k,(k-\lambda),\lambda)$ – BIBD，证毕.

用定理 6 容易证明下面的定理.

定理 8 $B_1, B_2, \cdots, B_v$ 是 (v,k,λ) – BIBD，则对每个 B_i，$B_1 \cap B_i, B_2 \cap B_i, \cdots, B_{i-1} \cap B_i, B_{i+1} \cap B_i, \cdots, B_v \cap B_i$ 是 B_i 的 $(v-1, k, k-1, \lambda, \lambda-1)$ – BIBD.

定义 5 (b,v,r,k,λ) – BIBD 中，$k=3$ 时，称为三连系，$\lambda=$

1 的三连系叫做 Steiner 三连系. □

由定理 1, Steiner 三连系满足 $r=\frac{v-1}{2}$, $b=\frac{v(v-1)}{6}$, $v\equiv 1 \pmod 6$ 或 $v\equiv 3 \pmod 6$.

下面给出由 v 个元素的 Steiner 三连系和 w 个元素的 Steiner 三连系构作 $v\times w$ 个元素的 Steiner 三连系的方法.

设 $X=\{a_1,a_2,\cdots,a_v\}$, S_1 是用 X 为对象集构成的 Steiner 三连系, $Y=\{b_1,b_2,\cdots,b_w\}$, S_2 是用 Y 为对象集构成的 Steiner 三连系. 令

$$Z=\{c_{ij}\mid 1\leqslant i\leqslant v, 1\leqslant j\leqslant w\},$$

考虑矩阵

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_v \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_w \end{array} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1w} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2w} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{v1} & c_{v2} & \cdots & c_{vw} \end{pmatrix} \end{array}, \qquad (Z)$$

令 S_3 是用 (Z) 的元素组成的 Steiner 三连系; $\{c_{ir},c_{js},c_{kt}\}$ 是 S_3 的一个三元组的充要条件是下列规则之一成立:

(1) $r=s=t$, 且 $\{a_i,a_j,a_k\}$ 是 S_1 的一个三元组; 等价于, c_{ir},c_{js},c_{kt} 在矩阵 (Z) 的同一列, 它们所在的行对应 S_1 的一个三元组.

(2) $i=j=k$, $\{b_r,b_s,b_k\}$ 是 S_2 的一个三元组; 等价于, c_{ir}, C_{js}, C_{kt} 在矩阵 (Z) 的同一行, 它们所在的列对应 S_2 的一个三元组.

(3) i,j,k 两两相异; r,s,t 两两相异; $\{a_i,a_j,a_k\}$ 是 S_1 的一个三元组, $\{b_r,b_s,b_t\}$ 是 S_2 的一个三元组; 等价于在矩阵 (Z) 中, c_{ir},c_{js},c_{kt} 位于三个不同的行和不同的列中, 它们所在的行对应 S_1 的一个三元组, 所在的列对应 S_2 的一个三元组.

具体执行时,把(Z)矩阵写成由 $Z=\{1,2,\cdots,v\times w\}$组成的矩阵如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & w \\ w+1 & w+2 & \cdots & 2w \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (v-1)w+1 & (v-1)w+2 & \cdots & vw \end{pmatrix}. \qquad (Z)$$

例如欲构作 9 阶 Steiner 三连系 S_3,考虑(Z)矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

由规则(1),得 S_3 中的三元组为

$$\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6,9\}.$$

由规则(2),得 S_3 的另外三个三元组为

$$\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\}.$$

由规则(3),得 S_3 的最后一批三元组为

$\{1,5,9\},\{4,8,3\},\{7,2,6\},\{3,5,7\},\{2,4,9\},\{1,8,6\}.$

S_3 由以上 12 个三元组构成.

4.9 魔矩阵密码

我们设计一种魔矩阵,可用之编发密码,且给出友方抄收后的翻译公式.

令

$N_n=\{1,2,3,\cdots,2^n-1\},n\in\mathbf{N},T_n=(1,2^1,2^2,\cdots,2^{n-1}).$

引理 1 $\forall n\in\mathbf{N},\forall \alpha\in N_n$,则存在唯一的 n 个分量的 0-1 向量,使得 $\alpha=T_n\cdot h_n$.

证 对 n 进行归纳证明. $n=1$ 时,$N_1=\{1\}$,$T_1=(1)$,结论显然成立,这时取 $h_1=(1)$即可.

假设 $n\leqslant k(k\geqslant 1)$时引理已成立,往证 $n=k+1$ 时引理仍成

立.

事实上，$N_{k+1}=\{1,2,\cdots,2^k-1,2^k,2^k+1,\cdots,2^{k+1}-1\}$，$T_{k+1}=(1,2,2^2,\cdots,2^{k-1},2^k)$，$\forall \alpha\in N_{k+1}$，若 $\alpha\leqslant 2^k-1$，由归纳法假设，存在唯一的 $0-1$ 向量 h_k，使得 $\alpha=h_k\cdot T_k$，令 h_{k+1} 是 h_k 添加第 $k+1$ 个分量 0 得到的，则 $\alpha=T_{k+1}\cdot h_{k+1}$；又 $\alpha\leqslant\{\underbrace{1,1,\cdots,1}_{k个1}\}\cdot T_k=2^k-1$，即 $\alpha<2^k$，所以若另有一个 $0-1$ 向量 h'_{k+1}，使得 $\alpha=h'_{k+1}\cdot T_{k+1}$，则 h'_{k+1} 的第 $k+1$ 个分量必为零，进而知 $h'_{k+1}=h_{k+1}$，即上述 h_{k+1} 是唯一的.

若 $2^k\leqslant\alpha\leqslant 2^{k+1}-1$，令 $\alpha=2^k+m(0\leqslant m\leqslant 2^k-1)$，由归纳法假设，存在唯一的 $0-1$ 向量 $\bar{h}_k$，使得 $m=\bar{h}_k\cdot T_k$，进而取 $\bar{h}_{k+1}$ 为 $\bar{h}_k$ 添加第 $k+1$ 个分量 1 而得的 $k+1$ 个分量的 $0-1$ 向量，于是

$$\alpha=2^k+m=\bar{h}_{k+1}\cdot T_{k+1}.$$

下证 $\bar{h}_{k+1}$ 之唯一性. 由于

$$(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{k个1})\cdot T_k<2^k\leqslant\alpha,$$

所以，若存在另一个 $k+1$ 个分量的 $0-1$ 向量 $\bar{h}'_{k+1}$，亦成立 $\alpha=\bar{h}_{k+1}\cdot T_{k+1}$，则 $\bar{h}_{k+1}$ 的第 $k+1$ 个分量必为 1，把 $\bar{h}_{k+1}$ 中第 $k+1$ 个分量删除得 $\bar{h}'_k$，则必有 $m=\bar{h}'_k\cdot T_k$，由归纳法假设，$\bar{h}'_k=\bar{h}_k$，进而 $\bar{h}'_{k+1}=h_{k+1}$，唯一性得证，证毕.

引理 2 若 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 是 T_n 的 m 个分量，$1\leqslant m\leqslant n$，则 $\sum\limits_{i=1}^{m}t_i\in N_n$.

证 因 T_n 所有分量之和为

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1,$$

所以

$$1\leqslant\sum_{i=1}^{m}t_i\leqslant 2^n-1,$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{m}t_i\in N_n$，证毕.

我们对 $F_2=\{0,1\}$定 $+ - \times \div$ 四则运算，$1+1=0$，其它运算同一般算术，则 $F_2=\{0,1\}$是域.

构作 0－1 矩阵 $W_{n\times 2^n}$如下：

第 k 个行向量（$1\leqslant k\leqslant n$）是连续 2^{k-1}个 0 分量，接着出现 2^{k-1}个 1 分量，再交替地出现 2^{k-1}个 0 分量，2^{k-1}个 1 分量，即第 k 个行向量为

$$(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{2^{k-1}个},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{2^{k-1}个},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{2^{k-1}个}\cdots,\underbrace{1,1,\cdots,1}_{2^{k-1}个}),$$

该向量共 2^n 个分量.

约定 $W_{n\times 2^n}$的列号码从 0 编起，下称 $W_{n\times 2^n}$是一个 0－1 魔矩阵.

定理 1 设 $S_j^{(n)}$ 是 $W_{n\times 2^n}$的第 j 列向量，则

$$j=T_n\cdot(S_j^{(n)})^T. \tag{A}$$

证 对 n 进行数学归纳法证明.

$n=1$ 时，$W_{1\times 2}=(01)$，$T_1=(1)$，公式（A）显然成立. 假设 $n\leqslant k$ 时，公式（A）已成立，往证 $n=k+1$ 时公式（A）仍成立.

若 $0\leqslant j\leqslant 2^{k-1}$，这时，$S_j^{(k+1)}$ 是 $S_j^{(k)}$ 添加一个第 $k+1$ 分量 0 而得的 $k+1$ 分量的向量，由归纳法假设，

$$j=T_k\cdot(S_j^{(k)})^T=T_{k+1}\cdot(S_j^{(k+1)})^T.$$

若 $2^k\leqslant j\leqslant 2^{k+1}-1$，则由 $W_{(k+1)\times 2^{k+1}}$的构造，

$$S_j^{(k+1)}=\underbrace{(1,1,\cdots,1)}_{k+1个1}-\left(S_{2^{k+1}-1-j}^{(k+1)}\right)^T,$$

从而有

$$T_{k+1}\cdot(S_j^{(k+1)})^T=T_{k+1}\cdot\underbrace{(1,1,\cdots,1)}_{k+1个1}-T_{k+1}\cdot\left(S_{2^{k+1}-1-j}^{(k+1)}\right)^T,$$

由于 $0\leqslant 2^{k+1}-1-j\leqslant 2^k-1$，由上面的论证知

$$T_{k+1}\cdot(S_j^{(k+1)})^T=1+2+\cdots+2^k-(2^{k+1}-1-j)=j,$$

证毕.

定理 2　$W_{n\times 2^n}$的列向量集合在F_2上构成一个 n 维线性空间(此空间记成 H_n).

证　视 $W_{n\times 2^n}$的第 0 列为 H_n 的零向量，在 F_2 中，H_n 中的向量与自身互逆，由线性空间之定义，只欠证$\forall\alpha_1,\alpha_2\in H_n$，$\alpha_1+\alpha_2\in H_n$. 因为 $\alpha_1=\alpha_2$ 时，$\alpha_1+\alpha_2=0\in H_n$，所以不妨设 $\alpha_1\neq\alpha_2$；于是，由引理 2，

$$1\leqslant(\alpha_1^T+\alpha_2^T)\cdot T_n=j\leqslant 2^n-1,$$

它是 $W_{n\times 2^n}$的一个列号码，由定理 1，

$$j=T_n\cdot(S_j^{(n)})^T,$$

由引理 1，

$$(S_j^{(n)})^T=\alpha_1^T+\alpha_2^T,S_j^{(n)}=\alpha_1+\alpha_2,$$

其中 $S_j^{(n)}$ 是 $W_{n\times 2^n}$的第 j 列向量.

由 $W_{n\times 2^n}$的定义易知，n 阶单位阵是 H_n 的一个基底阵，故 H_n 是 n 维线性空间，证毕.

我们构作 $W_{5\times 2^5}$，且第 1 列至第 26 列分别代表字母 $A,B,C,\cdots,X,Y,Z$，第 27 至第 30 列分量代表阴平，阳平，上声和去声，ˉ，ˊ，ˇ，ˋ：

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & A & B & C & D & E & F & G & H & I & J & K & L \\
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
W_{5\times 2^5}= & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Y	Z	-	'	-	`	
25	26	27	28	29	30	31
1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

.

下面给出利用魔矩阵 $W_{n\times 2^n}$的密码编译方法.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 k 种事物,取

$$n_0=\min\{n\mid k\leqslant 2^n-1\},$$

构作 $W_{n_0\times 2^{n_0}}$,用 $W_{n_0\times 2^{n_0}}$的第 j 列 $S_j^{(n_0)}$ 代表事物 a_j, $1\leqslant j\leqslant k$,则用 $W_{n_0\times 2^{n_0}}$可以把以 $a_i(1\leqslant i\leqslant k)$为项的任意有穷序列用 0-1 码抄出,再代入公式

$$j=T_{n_0}\cdot(S_j^{(n_0)})^T,$$

面求得这一序列.

例如 $a_1,a_2,\cdots,a_{26}$分别代表 $A,B,C,\cdots,X,Y,Z$, a_{27} = -, a_{28} = ', a_{29} = -, a_{30} = ;,则

$$n_0=\min\{n\mid 30\leqslant 2^n-1\}=5,$$

于是我们采用 $W_{5\times 2^5}$来编译密码.

例如抄收到的 0-1 码为:

0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 1

1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0

1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0

1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1

1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1

1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0

1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1,

翻译公式为

$T_5 \cdot X_i = (1,2,4,8,16) \cdot X_i = j = a_j$,其中 X_i 是抄收码序列中“第 i 段”向量,每段 5 个数码;于是为

$T_5 \cdot X_1 = (1,2,4,8,16) \cdot (0,0,1,1,0) = 4+8 = 12 = L$,

$T_5 \cdot X_2 = (1,2,4,8,16) \cdot (1,0,0,1,0) = 1+8 = 9 = I$,

$T_5 \cdot X_3 = (1,2,4,8,16) \cdot (1,0,1,0,1) = 1+4+16 = 21 = U$,

$T_5 \cdot X_4 = (1,2,4,8,16) \cdot (1,0,1,1,1) = 1+4+8+16 = 29$

$= \check{}$,

$T_5 \cdot X_5 = (1,2,4,8,16) \cdot (1,0,0,0,0) = 1 = A$,

$T_5 \cdot X_6 = (1,2,4,8,16) \cdot (0,1,1,1,0) = 2+4+8 = 14 = N$,

$T_5 \cdot X_7 = (1,2,4,8,16) \cdot (0,1,1,1,1) = 2+4+18+16 = 30$

$= \grave{}$,

$T_5 \cdot X_8 = (1,2,4,8,16) \cdot (0,0,0,1,0) = 8 = H$,

$T_5 \cdot X_9 = (1,2,4,8,16) \cdot (1,0,1,0,1) = 1+4+16 = 21$

$= U$,

$T_5 \cdot X_{10} = (1,2,4,8,16) \cdot (1,0,0,0,0) = 1 = A$,

$T_5 \cdot X_{11} = (1,2,4,8,16) \cdot (1,1,0,1,1) = 1+2+8+16 = 27$

$= -$,

$T_5 \cdot X_{12} = (1,2,4,8,16) \cdot (1,0,1,1,0) = 1+4+8 = 13 = M$,

$T_5 \cdot X_{13} = (1,2,4,8,16) \cdot (1,0,0,1,0) = 1+8 = 9 = I$,

$T_5 \cdot X_{14} = (1,2,4,8,16) \cdot (0,1,1,1,0) = 2+4+8 = 14 = N$,

$T_5 \cdot X_{15} = (1,2,4,8,16) \cdot (1,1,1,0,0) = 1+2+4=7=G$,

$T_5 \cdot X_{16} = (1,2,4,8,16) \cdot (0,0,1,1,1) = 4+8+16=28=$;

$T_5 \cdot X_{17} = (1,2,4,8,16) \cdot (1,0,0,1,1) = 1+8+16=25=Y$,

$T_5 \cdot X_{18} = (1,2,4,8,16) \cdot (1,1,1,1,0) = 1+2+4+8=15$

$=0$,

$T_5 \cdot X_{19} = (1,2,4,8,16) \cdot (1,0,1,0,1) = 1+4+16=21=U$,

$T_5 \cdot X_{20} = (1,2,4,8,16) \cdot (0,1,1,1,1) = 2+4+8+16=30$

$=$;

$T_5 \cdot X_{21} = (1,2,4,8,16) \cdot (1,0,0,1,1) = 1+8+16=25=Y$,

$T_5 \cdot X_{22} = (1,2,4,8,16) \cdot (1,0,0,1,0) = 1+8=9=I$,

$T_5 \cdot X_{23} = (1,2,4,8,16) \cdot (0,1,1,1,1) = 2+4+8+16=30$

$=$;

$T_5 \cdot X_{24} = (1,2,4,8,16) \cdot (1,1,0,0,0) = 1+2=3=C$,

$T_5 \cdot X_{25} = (1,2,4,8,16) \cdot (1,0,1,0,1) = 1+4+16=21=U$,

$T_5 \cdot X_{26} = (1,2,4,8,16) \cdot (0,1,1,1,0) = 2+4+8=14=N$,

$T_5 \cdot X_{27} = (1,2,4,8,16) \cdot (1,1,0,1,1) = 1+2+8+16=27$

$= -$.

以上 0－1 密码译成拉丁拼音句子如下：

Liǔ àn huā míng yòu yì cūn

柳 暗 花 明 又 一 村.

习题三

1. 构作两个正交的 5 阶拉丁方.
2. 构作两个正交的 7 阶拉丁方.
3. 构作两个正交的 8 阶拉丁方.
4. 把下列矩阵补上三行，使之成为 6 阶拉丁方：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. 构作两个正交的 12 阶拉丁方.

6. 证明：(8,6,5,3,2) − BIBD 不存在.

7. 在 (b,v,r,k,λ) − BIBD 中，(1)已知 $v=15,k=5,\lambda=2$，求 b 与 r.(2)已知 $v=21,b=28,r=8$，求 k 与 λ.

8. 已知 $B_1=\{2,4,6,7\},B_2=\{1,3,6,7\},B_3=\{3,4,5,7\}$，$B_4=\{1,2,5,7\},B_5=\{2,3,5,6\},B_6=\{1,4,5,6\},B_7=\{1,2,3,4\}$，写出此区组设计的关联矩阵.

9. 已知(7,3,1) − BIBD 中，$B_1=\{1,2,4\},B_2=\{2,3,5\},B_3=\{3,4,6\},B_4=\{4,5,7\}$，试写出 B_5,B_6,B_7.

10. 写出一个 12 阶 Hadamard 矩阵，从此导出一个对称的 BIBD.

11. 构作一个 21 阶 steiner 三连系.

12. 用魔矩阵密码编发与译出"横眉冷对千夫指，俯首甘为孺子牛".

第五篇　不确定 Turing 机和计算的时间复杂度

5.1　好算法和坏算法

多年来，许多人企图对任何离散数学问题都找一个有效算法来解决，可惜至今大家只是部分地得到成功，本书前面的章节中有这些成功的记录，但仍有大批问题，虽曾对它们做过极大的努力，至今未见有效算法，人们发现一个问题集团，其中包含的问题已经落实的就有上千个(以后还会增加)，它们都被认真研究过，但其中的任何问题皆未找到有效算法．虽然这个集团中的问题其实际背景与数学模型各异，但已严格证明，这个集团中的问题在算法的时间复杂度方面是共命运的，即若其中一个问题存在有效算法，则它们每个问题都存在有效算法．当然，据此判定这些问题一定不会有有效算法，显然过于武断，但这种情形给了一个很强的暗示，令人倾向于猜测这个问题集团中的问题不会存在有效算法的可能性极大．

描述一个问题之实例的已知数据的长度称为输入长．

所谓有效算法，又称好算法，按匈牙利著名数学家 Edmonds 的定义，是指对给定的问题，存在一个多项式 $P(n)$，使得当实例之输入长为 n 时，最多经 $P(n)$ 个基本运算步骤即得以解决．

这里“有效”二字体现于：

(1)　在文献中发表的公认为有效地解决了的问题所用的算法皆属 Edmonds 有效算法．

(2) 任何难解问题(指上述共命运的问题集团中的问题),皆未发现 Edmonds 意义下的有效算法.

(3) Edmonds 意义下的有效算法比指数时间的算法(例如穷举法)好得多.

例如算法 A 的时间复杂度是 n^2,算法 B 的时间复杂度是 2^n,其中 n 是输入长.假设计算的时间有限,例如是一个小时内必须完成,今有输入长为 n_0 的一个实例,使用计算机 C 来解.用 B 算法,一个小时内运算步骤必须不少于 2^{n_0} 个,若改用另一台更快速的计算机 C' 来解,C' 是 C 运算速度的百倍,我们指望 C' 会解决输入长比 n_0 大得多的实例,但 C' 在一小时内处理的实例之输入长 n 满足

$$2^n = 2^{n_0} \times 100,$$

即

$$n = n_0 + \log_2 100 < n_0 + 7.$$

由此可见,由于算法 B 的笨拙,我们虽然把计算机计算速度提高了百倍,但用算法 B 去解决问题时,并未显示出大型快速计算机的优势来.我们已经意识到,虽然计算机的更新换代是必要的和令人鼓舞的进展,但从某种意义上来说,提供好的算法比机器提高速度更为有效.

对于同一个问题,若用 A 算法在 C' 机上去解,则可处理的输入长 n 满足

$$n^2 = 100n_0^2,$$

$$n = 10n_0.$$

这时可以处理输入长是 C 机上处理的输入长 10 倍的实例.若有一个算法的时间复杂度是输入长的线性函数,用此算法在 C' 机上去解可以处理比 C 机处理的输入长扩大百倍的实例.

下面的表格对有效算法与指数时间的算法的效果进行了具体比较.

时间复杂度	原计算机	扩大百倍速度的计算机	千倍速度计算机
n	N_1	$100N_1$	$1000N_1$
n^3	N_2	$4.64N_2$	$10N_2$
n^5	N_3	$2.5N_3$	$3.98N_3$
2^n	N_4	$N_4+6.64$	$N_4+9.97$
3^n	N_5	$N_5+4.19$	$N_5+6.29$

其中 $N_i(i=1,2,3,4,5)$是单位时间内可以处理的输入长之上界.我们看到,若用 3^n 这种时间复杂度的坏算法,既使机器的计算速度扩大千倍,输入长的增加也不到 7.

下页的表是用每秒百万次计算机得出的,我们看到,输入长 30 的实例,在这种快速计算机上用 3^n 时间复杂度的算法尚需 6 年半的时间才能完成,而输入长为 30 的实例并不罕见;若用这种算法处理输入长为 60 的实例,则需要 1.3×10^{13}个世纪!这实际上宣布了 3^n 时间复杂度的算法是无用的坏算法.

5.2 不确定 Turing 机和 NP 类问题

我们称答案不是"是"就是"否"的问题为判定问题.有些问题,可以化成判定问题,例如边容量为自然数的网络上的最大流问题就要以化成:给定网络 N 与非负整数 k,问是否存在流量不少于 k 的流函数?若回答说"是",我们用 $k+1$ 代替 k,再提问同样的问题,如此可以找到最大流.

为了讨论判定问题的时间复杂度理论,我们引入 Turing 机的概念.Turing 机是年轻的英国数学家 Turing 1936 年提出的一个数学概念,它并非什么机器,但它的功用却十分之大,不仅是研究计算复杂度理论的得力工具,而且为 1946 年真计算机之问世奠定了思想基础.

我们称下面的八重组为一部 Turing 机:

时间复杂度 \ 耗时 \ 输入长	10	20	30	40	50	60
n	0.00001″	0.00002″	0.00003″	0.00004″	0.00005″	0.00006″
n^2	0.0001″	0.0004″	0.0009″	0.0016″	0.0025″	0.0036″
n^3	0.001″	0.008″	0.027″	0.064″	0.125″	0.216″
n^5	0.1″	3.2″	24.3″	1.7′	5.2′	13.0′
2^n	0.001″	1.0″	17.9′	12.9天	35.7年	366世纪
3^n	0.059″	58′	6.5年	3855世纪	2×10^8世纪	1.3×10^{13}世纪

$$(S,\Gamma,\Sigma,f,b,s_0,s_Y,s_N),$$

其中

$$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n,s_0,s_Y,s_N\}$$

是状态集合，s_0 叫做初态，s_Y 叫做 Yes 态，s_N 叫做 No 态．

$$\Gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_k,b\}$$

是带符集合，b 叫做空白符．

$\Sigma\subset\Gamma$ 叫作输入符集合．

$b\in\Gamma-\Sigma$.

$f:(S-\{s_Y,s_N\})\times\Gamma\to\Gamma\times\{1,-1\}$,

f 叫做转换函数．

Turing 机上有一个无限长的"纸带"，划分成…，$C(-2)$，$C(-1)$，$C(0)$，$C(1)$，$C(2)$，…地址序列．

Turing 机还具有一个"读写头"．

下面说明 Turing 机的操作及表达式．

(1) 头位函数 $h(t)$

读写头每个单位时间瞄准一个地址，若 t 时刻瞄准的地址是 $C(i)$，则写成

$$h(t)=i.$$

规定

$$h(0)=1,$$

即开始时读写头在 $C(1)$处．

(2) 数据输入

设输入符集合为 $\Sigma=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，记时刻 t 在 $C(i)$处写的带符是 $\gamma(i,t)$，且规定

$$\gamma(i,0)=x_i,i=1,2,\cdots,n;$$

$$\gamma(i,0)=b,i\neq1,2,\cdots,n.$$

(3) 转换函数 f

设时刻 t 之状态为 $s(t)\in S-\{s_Y,s_N\}$，则

$$f(s(t),\gamma(h(t),t))=(p,q,d),$$

其中

$$(s(t),\gamma(h(t),t))\in(S-\{s_Y,s_N\})\times\Gamma,$$
$$(p,q,d)\in S\times\Gamma\times\{1,-1\}.$$

含义是

$$s(t+1)=p,$$
$$h(t+1)=h(t)+d,$$
$$\gamma(i,t+1)=\begin{cases}q, i=h(t);\\ \gamma(i,t), i\neq h(t).\end{cases}$$

(4) 停机

$$s(t)\in\{s_Y,s_N\}\text{时停机}.$$

Turing 机解决了一个判定问题 D,是指:

对任意给定的 D 的一个实例,这个实例用字符 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表达时,实例答案为"是"当且仅当以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 做为输入,Turing 机停机于 s_Y 态.

定义 1 对于判定问题 D,存在一个多项式 $P(t)$,使得对其每一输入长为 n 的实例,Turing 机可以在 $P(n)$时间内解决;此种问题 D 的全体组成的集合叫做 P 类问题集合,记之为 P. □

有许多问题,我们虽然尚不知其有无多项式算法,但给出一些附加信息,则可以在多项式时间内由 Turing 机加以解决. 例如"图 G 是否 Hamilton 图?"众所周知,这个问题是个难解问题,但若给出 G 的一个子图,则在多项式时间内可以验证它是否为 G 的 Hamilton 圈.

设 Turing 机开始计算前,把某些信息存入 $C(-1),C(-2),\cdots$ 等地址,称符号列

$$\gamma(-1,0),\gamma(-2,0),\cdots=g_1g_2\cdots$$

为一个猜想.

我们注意到,若 Turing 机的计算时间以某个多项式 $P(n)$为上界,则不要把比 $P(n)-1$ 长的猜想存入机器中去,因为地址 $C(-P(n))$在计算中达不到.

一个判定问题 D 在不确定 Turing 机上在多项式时间内被解决是指：对于问题 D，存在多项式 $P(n)$，使得对 D 的输入长为 n 的实例，若其答案为“是”，则存在一个猜想，对于它，机器在 $P(n)$ 时间内停机于 s_Y 态；若其答案是“否”，则对于每个猜想，在 $P(n)$ 时间内 Turing 机皆停机于 s_N 态.

不确定 Turing 机概念中“不确定”三个字的含义是：上述的“若答案为‘是’，则存在一个猜想，对于它，机器停机于 s_Y 态”一语中，我们只是相信有这么一个猜想存在，但并未给出什么确定的方法可以找到这个猜想. 也许我们侥幸碰上了这么一个猜想，但这种幸运是罕见的；或者这个实例之答案是否定的，这时，要逐个验算猜想，而猜想可有 $|\Gamma|^{p(n)-1}$ 个，要用 $P(n)|\Gamma|^{p(n)-1}$ 时间来完成，这是一个可怕的指数时间，会随着 $P(n)$ 之增大而爆炸性增大，所以用这种方法来求解，实际上是不现实的，也就是说，用 Turing 机如此解决不可能实际地得出确定的答案.

不确定 Turing 机对于解决问题实际上是个无效的工具，它只有理论上的价值，借助于它，我们可以建立 NP 概念.

定义 2 在多项式时间内能被不确定 Turing 机解决的判定问题之集合叫做 NP 类判定问题集合，记做 NP. □

显然，P⊆NP. 但 P = NP 是否成立？这是一个尚未解决而其意义十分深远的问题.

5.3 NPC 问题和 Cook 定理

定义 3 D_1 与 D_2 是两个判定问题，存在一个映射 f，以及一个多项式 $Q(n)$，使得对于任意给定的 D_1 的一个实例的输入 I_1，I_1 之长为 n，则 f 在 $Q(n)$ 时间内把 I_1 映射成 D_2 的一个输入 $f(I_1)$，且 I_1 的答案是“是”当且仅当 $f(I_2)$ 的答案是“是”，则称在多项式时间内 D_1 转化成 D_2，记之为 $D_1 \propto D_2$. □

定义 4 若判定问题 D∈NP，且对 ∀D′∈NP，有 D′∝D，则称 D

$\in$NPC,即 NPC 是下面的判定问题集合:

$\mathrm{NPC}=\{D|D$ 是判定问题,$D\in\mathrm{NP}$, $\forall D'\in\mathrm{NP}$ 时,$D'\propto D\}$.□

这个定义是 Karp 于 1972 年提出的.

推论 1 设 D_1,D_2 是两个判定问题,$D_1\propto D_2$,$D_2\in\mathrm{P}$,则 $D_1\in P$.

证 设 I_1 是 D_1 之输入,输入长 $|I_1|=n$,又 $D_1\in D_2$,则存在映射 f 及多项式 $Q(x)$,使得 $f(I_2)$是 D_2 的一个输入,此映射可于 $Q(n)$时间内完成;又由于 $D_2\in P$,故存在多项式 $P(x)$(不妨设 $P(x)$ 单调上升),使得对于 D_2 之输入 $f(I_1)$,在 $P(|f(I_1)|)$时间内解决,又$|f(I_1)|\leqslant Q(n)$,所以 $f(I_1)$可于多项式时间$P(Q(n))$内解决,于是,I_1 亦可在多项式 $Q(n)+P(Q(n))$时间内解决,即 $D_1\in\mathrm{P}$,证毕.

推论 2 $D_1,D_2\in\mathrm{NPC}$,则 $D_1\propto D_2$.

证 由于 $D_1\in\mathrm{NPC}$,则 $D_1\in\mathrm{NP}$;又 $D_2\in\mathrm{NPC}$,由定义,$\forall D'\in\mathrm{NP}$, $D'\propto D_2$,取 $D_1=D'$,则 $D_1\propto D_2$,证毕.

推论 2 告知,NPC 内各问题间在时间复杂度方面是等价的(或多项式可归约的). 由推论 1 可得

推论 3 若 $D\in\mathrm{NPC}$,假设 $D\in\mathrm{P}$,则 NP=P.

证 因 $D\in\mathrm{NPC}$,则 $D\in\mathrm{NP}$,且 $\forall D'\in\mathrm{NP}$, $D'\propto D$,假设 $D\in\mathrm{P}$,由推论 1,$D'\in\mathrm{P}$,即 $\mathrm{NP}\subseteq\mathrm{P}$. 又 $\mathrm{P}\subseteq\mathrm{NP}$,故得 P=NP,证毕.

推论 4 $D\in\mathrm{NPC}$,假设 $D\in\mathrm{P}$,则 $\mathrm{NPC}\subseteq\mathrm{P}$;若 $D\in\mathrm{NPC}$,假设 $D\notin\mathrm{P}$,则 $\mathrm{NPC}\cap\mathrm{P}=\varnothing$.

证 由推论 3 知当 $D\in\mathrm{NPC}$,且 $D\in\mathrm{P}$ 时,NP=P,但 $\mathrm{NPC}\subseteq\mathrm{NP}$,故得 $\mathrm{NPC}\subseteq\mathrm{P}$. 另一方面,若 $D\in\mathrm{NPC}$, $D\notin\mathrm{P}$,但 $\mathrm{NPC}\cap\mathrm{P}\neq\varnothing$,则存在一个 $D_1\in\mathrm{NPC}\cap\mathrm{P}$,即 $D_1\in\mathrm{P}$, $D_1\in\mathrm{NPC}$. 由推论 4 前半段的结论,$\mathrm{NPC}\subseteq\mathrm{P}$,于是 $D\in\mathrm{P}$,与 $D\notin\mathrm{P}$ 矛盾,所以当 $D\in\mathrm{NPC}$, $D\notin\mathrm{P}$,则 $\mathrm{NPC}\cap\mathrm{P}=\varnothing$,证毕.

推论 4 告知,NPC 中的问题,只要有一个是 P 类的,则个个都是 P 类的,即 NPC 中的问题皆存在有效算法(但愿如此!),但若发现某

个 NPC 中的问题不是 P 类的，即它无有效算法，则 NPC 中各个问题皆无有效算法！NPC 问题在有无有效算法的意义下是共命运的 .

定理 1 （NP 完备性定理） 若 $D \in$ NPC, $D' \in$ NP, $D \propto D'$. 则 $D' \in$ NPC.

证 因 $D \in$ NPC，故 $\forall D'' \in$ NP, $D'' \propto D$；又知 $D' \in$ NP，且 $D \propto D'$，则 $D'' \propto D'$，由定义 $D' \in$ NPC，证毕 .

目前，有些意见倾向于 NP≠P，P∩NPC=∅，NP－NPC－P≠∅（见图 5.1）. 但这种看法的真伪并未得到证明 .

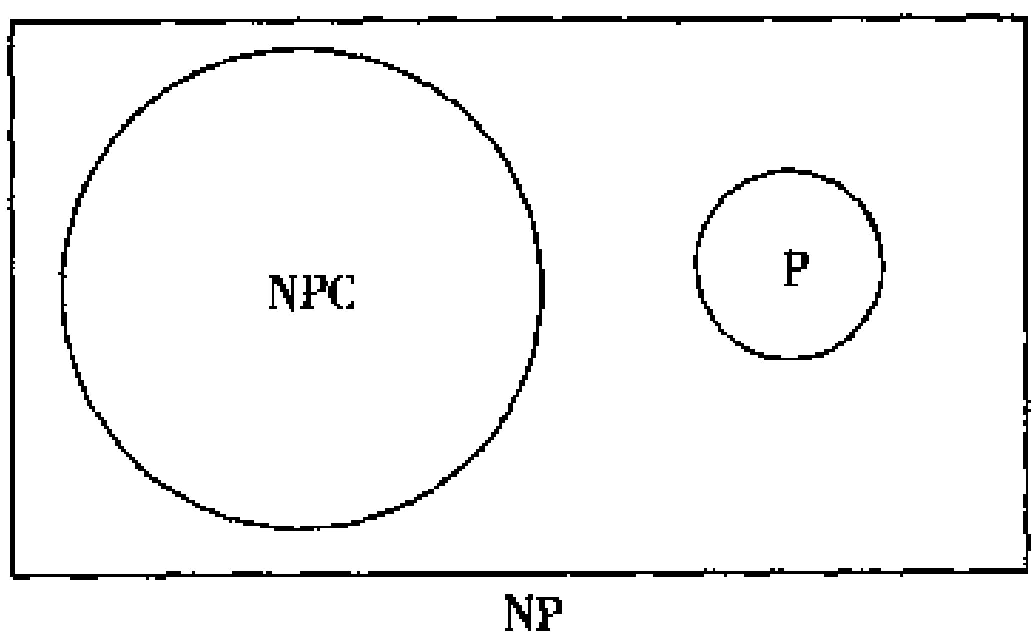


图 5.1

1972 年，多伦多大学的 Cook 找到了第一个 NPC 问题，它的代号为 SAT(Satisfiability). 以它为 NPC 家族的"种子"，由定理 1，繁衍出大批 NPC 中的问题.

设有限变量集

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},$$

X 中的每个变量可以取 T 与 F 两个值之一，且 $x_i=T$，则 $\bar{x}_i=F$；$x_i=F$，则 $\bar{x}_i=T$.

称

$$L=\{x_1,x_2,\cdots,x_n;\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n\}$$

为字集合，字集合的子集叫做句子 .

SAT 的实例是：任意给定一个句子集合 $\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$，是否有赋值方法，使得每个句子 C_i 中皆有 T 值的字?

句子中有的字取 T 值时,则此句子称为饱和的.

SAT:

输入:一个句子集合.

问:是否存在一种赋值方法,使这些句子皆饱和?

定理 2(Cook) SAT∈NPC.

证 SAT∈NP 是显然的.下证 $\forall D \in$ NP,皆有 $D \propto$ SAT.即当 I 是 D 的长 n 的输入时,要证存在一个映射 f,使得 $f(I)$是 SAT 的一个输入,此映射耗时为多项式 $Q(n)$,且 I 回答"是"当且仅当 $f(I)$回答"是".

所谓机器对 I 回答"是",是指存在一个猜想,机器在多项式时间 $P(n)$内停机于 s_Y 态,即 Turing 机有序地执行以下步骤:

(1) 初始时,I 由 $C(1), C(2), \cdots, C(n)$处的内容表达出来;而 $C(0), C(n+1), C(n+2), \cdots, C(P(n)+1)$皆为空白.

(2) 初始态是 s_0,开始时头在 $C(1)$,即 $h(0)=1$.

(3) 对于每一时刻 $t, 0 \leqslant t \leqslant P(n)$,机器恰在一种状态下.

(4) 对于每一时刻 $t, 0 \leqslant t \leqslant P(n)$,每个地址 $C(i)$处恰写一个带符,$-P(n)+1 \leqslant i \leqslant P(n)+1$.

(5) 对于每个时刻 $t, 0 \leqslant t \leqslant P(n)$,头恰在一个地址 $C(i)$上,$-P(n)+1 \leqslant i \leqslant P(n)+1$.

(6) 仅当时刻 t 头在此地址上,该地址的内容才能从时刻 t 到时刻 $t+1$ 的情况下改变.

(7) 若 $s(t) \in S - \{s_Y, s_N\}$,则 $s(t+1), \gamma(h(t), t+1), h(t+1)$由 f 确定.若 $s(t) \in \{s_Y, s_N\}$,则 $s(t+1) = s(t)$.

(8) $s(P(n)) = s_Y$.

为明确起见,把记号规定如下:

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, \cdots, s_q\}, s_1 = s_Y, s_2 = s_N.$$

i:地址,$i = C(i), -P(n)+1 \leqslant i \leqslant P(n)+1$.

j:带符,$0 \leqslant j \leqslant g, \Gamma = \{\gamma_0 = b, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_g\}, j = \gamma_j$.

k:状态,$0 \leqslant k \leqslant q, k = s_k$.

$I = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$.

取 SAT 的变量集为

$X = \{G(i,t,j)\} \cup \{H(i,t)\} \cup \{S(t,k)\}$.

显然变量 G 的个数是 $O(P^2(n))$，H 的个数是 $O(P^2(n))$，S 的个数是 $O(P(n))$.

赋值方法为：

当且仅当 $\gamma(i,t) = \gamma_j$（时刻 t，$C(i)$处的带符是 γ_j），$G(i,t,j) = T$；

当且仅当 t 时刻头在 $C(i)$上，$H(i,t) = T$；

当且仅当时刻 t 状态为 s_k，$S(t,k) = T$.

取句子集合为 $\bigcup_{i=1}^{8} S_i$，S_i 如下：

$S_1 = \{\{G(i,0,j)\} \mid 1 \leqslant i \leqslant n, x_i = \gamma_j\}$
$\cup \{\{G(i,0,0)\} \mid n < i \leqslant P(n)+1\} \cup \{\{G(0,0,0)\}\}$.

$S_2 = \{\{s(0,0)\},\{H(1,0)\}\}$.

$S_3 = \bigcup_t [\{\{S(t,0), S(t,1)\cdots, S(t,q)\}\} \cup \bigcup_{k_1<k_2}$
$\{\{\overline{S(t,k_1)}, \overline{S(t,k_2)}\}\}]$.

$S_4 = \bigcup_t \bigcup_i [\{\{G(i,t,0), G(i,t,1), \cdots, G(i,t,g)\}\}$
$\cup \bigcup_{i_1<i_2} \{\{\overline{G(i,t,j_1)}, \overline{G(i,t,j_2)}\}\}]$.

$S_5 = \bigcup_t [\{\{H(-P(n)+1,t), H(-P(n)+2,t), \cdots,$
$H(P(n)+1,t\}\} \cup \bigcup_{i_1<i_2} \{\{\overline{H(i_1,t)}, \overline{H(i_2,t)}\}\}]$.

$S_6 = \bigcup_i \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant P(n)} \bigcup_j \{\{H(i,t), G(i,t,j), \overline{G(i,t+1,j)}\}\}$.

$S_7 = \bigcup_i \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant P(n)} \bigcup_{k \neq 1,2} \bigcup_j \{\{\overline{S(t,k)}, \overline{H(i,t)},$
$\overline{G(i,t,j)}, S(t+1,k')\}, \{\overline{S(t,k)}, \overline{H(i,t)}, \overline{G(i,t,j)},$
$G(i,t+1,j')\}, \{\overline{S(t,k)}, \overline{H(i,t)}, \overline{G(i,t,j)}, H(i+d,$
$t+1)\} \mid f(s_k,\gamma_j) = (s_{k'}, \gamma_{j'}, d)\} \cup \bigcup_{t<P(n)} \{\{\overline{S(t,1)},$
$S(t+1,1)\}, \{\overline{S(t,2)}, S(t+1,2)\}\}$.

$S_8=\{\{S(p(n),1)\}\}$.

可以验证 S_i 中句子皆饱和的充要条件是 Turing 机执行步骤 (i), $1\leqslant i\leqslant 8$. 至此, Cook 定理证毕.

下面考虑由 SAT 在多项式时间内转化的另一个 NPC 问题, 它的代号为 3SAT.

3SAT:

输入:一个句子集合,每句恰含三个字.

问:是否存在一种赋值方法,使每句皆饱和?

定理 3 3SAT$\in$NPC.

证 我们来证明 SAT$\propto$3SAT(3SAT$\in$NP 是显然的). 为此, 令

$$S_1=\{\{a,b,c,d\}\}\cup S',$$
$$S_2=\{\{a,b,x\},\{\bar{x},c,d\}\}\cup S',$$

其中 x 在 S_1 中不出现.

首先证明: S_1 可饱和当且仅当 S_2 可饱和. 若有赋值方法使 S_1 句句饱和, 则这一赋值法可使 S_2 中的 S' 中之句子皆饱和, 且 S_2 的前两个句子至少有一个饱和的, 再对 x 赋值, 使 S_2 中的前两个句子都饱和, 于是 S_2 句句饱和. 反之, 若有一个赋值法使 S_2 句句饱和, 则这一赋值法使 S_1 中 S' 部分的句子皆饱和, 且 a,b,c,d 中至少有一个值为 T, 故这一赋值法可使 S_1 句句饱和.

上面事实告知, 一个长 4 的句子可由两个长 3 的句子代替, 通过 $l-3$ 个新变量的引入, 一个长 $l(l>3)$ 的句子可由 $l-2$ 个长 3 的句子代替: 句子 $\{a_1,a_2,\cdots,a_l\}$ 被 $\{a_1,a_2,x_1\},\{\bar{x}_1,a_3,x_2\},\cdots,\{\bar{x}_{l-3},a_{l-1},a_l\}$ 代替. 若一赋值使 $a_1,a_2,\cdots,a_l$ 中有一个变量取 T 值, 则长句 $\{a_1,a_2,\cdots,a_l\}$ 饱和, 这时,

若 a_1 或 a_2 为 T, 则令 $x_1=x_2=\cdots=x_{l-3}=F$,

若 a_{l-1} 或 a_l 是 T, 则令 $x_1=x_2=\cdots=x_{l-3}=T$,

若某个 $a_k=T, 2<k<l-1$, 则令 $x_1=x_2=\cdots=x_{k-2}=T$,

$x_{k-1}=x_k=\cdots=x_{l-3}=F$.

以上三种可能至少发生一种,每种情形发生时,上述那些长 3 的句子皆饱和．

若 $a_1,a_2,\cdots,a_l$ 皆 F,长句未饱和,这时无法给 x 变量赋值,使 $l-2$ 个短句皆饱和．

我们看到,长句被短句代替所用的时间是以描述原句子集输入长的多项式为界．变成的句子集中,句子数目以原句子集中字的数目为界,且变成的句子每个至多含三个字,即 SAT$\propto$3SAT,证毕．

5.4 NPC 中的组合问题

我们这里讲几个组合问题,它们属于 NPC.

三维匹配问题,代号 3DM:

输入:W,X,Y 是三个集合,$|W|=|X|=|Y|=p\neq 0$,$M\subseteq X\times Y\times W$.

问:是否存在 $M'\subseteq M$,$|M'|=p$,且 M'中无两个有相同分量的三元组．

例如 $W=X=Y=\{0,1\}$,$M=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$,则 3DM 之回答是"否",若在 M 中加入一个$(1,0,1)$,则取 $M'=\{(0,1,0),(1,0,1)\}$,这时 3DM 的回答是"是".

定理 4 3DM$\in$NPC.

证 显然 3DM$\in$NP,下证 3SAT$\propto$3DM.

令 3SAT 之输入为 $I=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是出现于 I 中的变量,我们来构作 3DM 的一个输入 $f(I)$中的 W,X,Y,M.

$$W=\{x_{ij},\bar{x}_{ij}\mid 1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m\},$$
$$X=A_1\cup S\cup G,$$
$$Y=A_2\cup S\cup G,$$

$$A_1 = \{a_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\},$$
$$A_2 = \{b_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\},$$
$$S = \{s_j \mid 1 \leqslant j \leqslant m\},$$
$$G = \{g_k \mid 1 \leqslant k \leqslant m(n-1)\},$$
$$M = AC \cup SC \cup GC,$$
$$AC = \bigcup_{i=1}^{n} AC_i,$$
$$AC_i = \{(x_{ij}, a_{ij}, b_{ij}) \mid 1 \leqslant j \leqslant m\} \cup \{(\bar{x}_{ij}, a_{i,j+1}, b_{ij}) \mid 1 \leqslant j \leqslant m-1\} \cup \{(\bar{x}_{im}, a_{i1}, b_{im})\}.$$

图 5.2 表示 AC_i 的结构，其中每个圈内为一个三元组，标志 i 已被省略，每个 a_{ij}，b_{ij}参加两个三元组，对每个 i，M'要么含形如(x_{ij}, a_{ij}, b_{ij})的三元组，要么含所有其它类型的三元组，但不能混合．此即表明所有出现的 x_i 或皆 T 或皆 F.

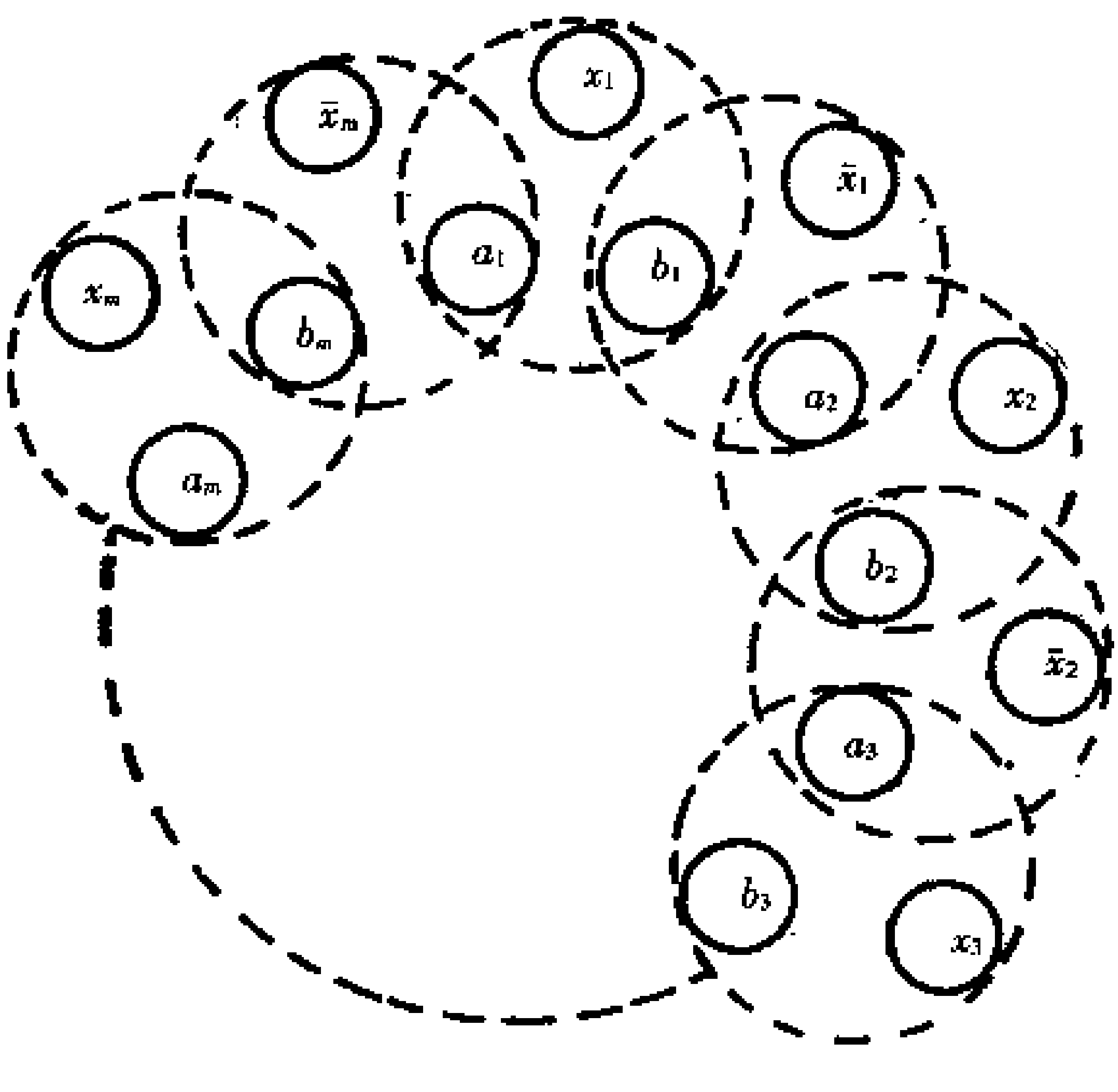


图 5.2

$$SC = \bigcup_{j=1}^{m} SC_j,$$

$$SC_j = \{(x_{ij}, s_j, s_j) \mid x_i \in C_j\} \cup \{(\overline{x_{ij}}, s_j, s_j) \mid \overline{x}_i \in C_j\}.$$

由 3SAT 之定义，每个 SC_j 中含三个三元组，为了使 s_j 做为第二与第三分量，仅一个三元组在 M' 中，显然，这只能是：$x_{ij}(\overline{x_{ij}})$ 在 $M' \cap AC$ 中未用过，即 x_i 给以真(假)赋值.

令 $M' \cap (AC \cup SC)$ 用了 W 的 $mn + m$ 个元素，为含其余 $m(n-1)$ 个元素，我们有

$$GC = \{(x_{ij}, g_k, g_k), (\overline{x_{ij}}, g_k, g_k) \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant m(n-1)\},$$

证毕.

下面再讨论一个著名的组合问题，它称为三元素子集精确覆盖问题，代号 3XC.

3XC:

输入：集合 U 及其三元素子集集团 C.

问：C 中是否存在子集团，使其精确覆盖 U?

即若 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是 3 元素集合，且对每个 $i, 1 \leqslant i \leqslant n, S_i \subset U$，问是否存在 $I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$，使得

$$\bigcup_{i \in I} S_i = U,$$

且 $i, j \in I, i \neq j$ 时，$S_i \cap S_j = \varnothing$. 换句话说，问是否存在 U 的一个划分，得到的子集皆三个元素，且划分出的子集在预先指定的三元素子集团 C 之中.

定理 5 3XC∈NPC.

证 3XC 显然是 NP 问题. 下证 3DM∝3XC. 设 W, X, Y, M 是 3DM 之输入 I，其中 $M \subseteq W \times X \times Y$，且 W, X, Y 两两不相交，不然，把公共元素改变一下名称即可. 取

$$C = \{\{w, x, y\} \mid (w, x, y) \in M\}.$$

$$U = W \cup X \cup Y.$$

下证 C 有子集精确覆盖 U 的充要条件是存在完备匹配 $M' \subseteq M$. 显然,若 M' 是一个完备匹配,则

$$C' = \{\{w, x, y\} \mid (w, x, y) \in M'\},$$

是 U 的一个精确覆盖. 反之,若 C' 是 U 的一个精确覆盖,则

$$M' = \{\{w, x, y\} \mid \{w, x, y\} \in C'\},$$

是一个完备匹配,证毕.

在 3XC 中,若不要求每个子集皆 3 个元素,则问题变成所谓精确覆盖问题,其代号为 XC.

定理 6 XC∈NPC.

定理 6 的证明只要论证 3XC∝XC,留作习题,请读者完成.

最后研究代号为 SC 的集合覆盖问题.

SC:

输入:集合 U, U 的子集集团 C,整数 k.

问:是否存在 C 的子集团 C',使得 C' 覆盖 U,且 C' 中集合的数目不超过 k? 即

$$\bigcup_{s \in C'} S = U, 且 |C'| \leqslant k.$$

定理 7 SC∈NPC.

证 只需证 3XC∝SC,设 C 与 U 是 3XC 的的输入 I. 令 $k = \left\lfloor \frac{|U|}{3} \right\rfloor$. 取 C, U, k 做为 SC 之输入 $f(I)$. 若 $|U|$ 被 3 除不尽,则 3XC 答案为"否",这时 SC 之答案亦为"否". 若 $|U|$ 可被 3 除尽,这时,若 C' 是一个精确覆盖,C' 当然也是一个覆盖,且 $|C'| = |U|/3 = K$;反之,若 C' 是一个覆盖,$|C'| \leqslant k$,则 $|C'| = k$,因而是一个精确覆盖,证毕.

在 SC 中,若每个子集皆含 3 个元素,则 SC 变成 3SC 问题.

定理 8 3SC∈NPC.

证明请读者给出.

本章我们学习了 Edmonds 意义下有效算法的概念, 引入

Turing 机,进而定义了 P,NP 与 NPC 三个问题集合.一般总是用 Turing 机作为描述算法过程的基本数学模型.任何能在现代数字计算机实现的计算都能用 Turing 机来描述.

计算复杂性理论不仅是计算机专家最感兴趣的问题之一,也是应用数学家必须过问和研究的重大课题.它使我们用精确的概念来审定问题究竟是否难解,而不是凭直观的感觉粗略地判定一个算法的好坏.

1972 年,Cook S A 提出的关于 SAT $\in$ NPC 的基本定理,奠定了计算复杂性分析的理论基础,同年 Karp R M 提出 21 个 NP 问题可由 SAT 转化($\propto$),从而得到了第一批 NPC 中的问题;到 1978 年,NPC 问题已经由 21 个迅速增加到 300 多个,其中有不少是图论中的问题.近年来,人们仍然热衷于确定某些实际问题与理论问题的计算是否 NPC 问题.

至于 NPC 中的问题是否真的不存在多项式算法,是当今科学界面临的重大课题之一.显然,这一个问题的解决,即回答"P = NP 否?",是一个十分困难而又有意义的工作!如果 P = NP,就应该为 NPC 中的问题设计有效算法;若 P $\neq$ NP,就不要再指望有效地解决 NPC 中的问题.有些问题人们还考虑它的计算复杂度是否介于 P 与 NPC 之间,即 NP 中的问题能否有更细的划分.关于 NP 的理论尚处于发展之中.

本章涉及的思想、概念和技巧都很不通俗,颇有几分难懂,但它们是搞计算机科学和应用数学的必要知识,所以必须下力气彻底弄明白.Cook 定理等本章提到的定理不论是证明的思路还是技巧与细节,都十分新颖生动而且引人入胜,很值得学习.

5.5 NPC 中的图论问题

首先讲最大团问题,代号 CLIQUE:

输入:无向图 $G(V,E)$,正整数 $k\leqslant|V|$.

问：G 中是否有一个团 C，使得 $|C| \geqslant k$？其中 $|C|$ 是 C 的顶数.

定理 1 CLIQUE∈NPC.

证 显然，CLIQUE∈NP，下证 3DM∝CLIQUE.

设 I 是 3DM 的输入，I 为 $W, X, Y, M \subseteq W \times X \times Y$；取 $f(I)$ 为 CLIQUE 的相应输入，$f(I)$ 中 $k = |X|$，图 $G(V,E)$ 为

$V(G) = M$,

$E(G) = \{e = m_1 m_2 \mid m_1, m_2 \in M$，且 m_1 与 m_2 无相同的对应分量$\}$,

于是 I"是"当且仅当 $f(I)$"是"，证毕.

CLIQUE 问题的解决实际上意味着找到 G 中顶数最大的团的顶数，可惜这个问题属于 NPC，这个貌似简单的问题实则非常困难.

下面讨论最大独立集问题，代号 IND：

输入：图 $G(V,E)$，正整数 $k \leqslant |V|$.

问：是否存在独立集 S，使得 $|S| \geqslant k$？

定理 2 IND∈NPC.

证 显然 IND∈NP，下证 CLIQUE∝IND. 事实上，若 I 是 CLIQUE 的输入，I 由 $G(V,E)$ 与自然数 k 组成，则取相应的 IND 的输入 $f(I)$ 为 G 的补图 G^c 与 k，这时，显然有：I"是"当且仅当 $f(I)$"是"，证毕.

最后讲一下最小顶覆盖问题，代号 VC：

输入：图 $G(V,E)$，自然数 $l \leqslant |V|$.

问：G 中是否有顶覆盖 C，使得 $|C| \leqslant l$？

定理 3 VC∈NPC.

证 VC∈NP 不足道. 下证 IND∝VC. 设 $G(V,E)$ 与 k 是 IND 之输入 I，相应的 VC 之输入 $f(I)$ 取为 $G(V,E)$ 与 $l = |V| - k$，由独立集与顶覆盖集的互补性知，I"是"当且仅当 $f(I)$"是"，证毕.

有向 Hamiltion 轨问题，代号 DHP：

输入：有向图 $G(V,E)$，$s,t\in V(G)$.

问：G 中是否有有向 Hamilton 轨 $P(s,t)$？

定理 4 DHP∈NPC.

证 显然 DHP∈NP，下证 VC∝DHP. 设 VC 之输入 I 为 $G(V,E)$ 及自然数 $k\leqslant|V|$，下面给出相应的 DHP 之输入 $f(I)$.

设 $e(v,1),e(v,2),\cdots,e(v,d(v))$ 是 $G(V,E)$ 中与顶 v 关联的边，$f(I)$ 中的有向图 $G'(V',E')$ 构作如下：

$$V'=\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_k\}\cup\bigcup_{v\in V(G)}\{v,1,i),\\ (v,2,i)\mid 1\leqslant i\leqslant d(v)\}.$$

即把无向图 $G(V,E)$ 的每个顶 v 变成 $2d(v)$ 个顶，再添加 $k+1$ 个新顶 $a_0,a_1,\cdots,a_k$，这些顶合起来构成有向图 G' 的顶集合 V'.

$$\begin{aligned}E'=&\{a_i\to(v,1,1)\mid 0\leqslant i<k,v\in V(G)\}\cup\\ &\{(v,2,d(v))\to a_i\mid 0<i\leqslant k,v\in V(G)\}\cup\\ &\{(u,1,i)\to(v,1,j),(u,2,i)\to(v,2,j)\\ &\mid e(u,i)=e(v,j)\}\cup\\ &\{(v,1,i)\to(v,2,i)\mid v\in V(G),1\leqslant i\leqslant d(v)\}\cup\\ &\{(v,2,i)\to(v,1,i+1)\mid v\in V(G),1\leqslant i<d(v)\},\\ &s=a_0,t=a_k.\end{aligned}$$

我们称顶 v“内部由 $(v,1,1)$ 到 $(v,2,d(v))$”的有向轨为顶 v 之“迹”. 下证 G' 中有 Hamilton 轨 $P(a_0,a_k)$，当且仅当 G 中有 k 顶顶覆盖.

设 $C=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ 是 G 中一个顶覆盖，我们来构作 G' 中的一个 Hamilton 轨 $P(a_0,a_k)$. 取边 $a_0\to(v_1,1,1)$，通过 v_1 的迹到达 $(v_1,2,d(v_1))$，再到 a_1，由 a_1 到 $(v_2,1,1)$，经 v_2 之迹到达 $(v_2,2,d(v_2))$，再到 $a_2,\cdots$，最后从 $(v_k,2,d(v_k))$ 到达 a_k，得到一条 G' 中的有向轨 $P'(a_0,a_k)$. 但 $P'(a_0,a_k)$ 不一定是 G' 的 Hamilto 轨. 若 $P'(a_0,a_k)$ 不是 Hamilton 轨，$\forall v\in C$，且 $e=uv\in$

$E(G)$，$e=e(v,j)=e(u,i)$，则 $u\in C$. 这时，用$(u,1,i)\to(v,1,j)\to(v,2,j)\to(u,2,i)$代替 P'中的$(u,1,i)\to(u,2,i)$. 由于 C 是顶覆盖，v 在G'中"分裂"成的 $2d(v)$个顶都被通过仅一次，于是得到了 G'中的 Hamilton 轨 $P(a_0,a_k)$.

反之，若 G'中有 Hamilton 轨 $P(a_0,a_k)$，则我们能构作出 G 的一个k 顶的顶覆盖 S：当且仅当$(v,1,1)$与$(v,2,d(v))$在$P(a_0,a_k)$上皆与$\{a_i\}$中顶相邻时，取 $v\in S$，证毕.

有向 Hamilton 圈问题，代号 DHC：

输入：有向图 $G(V,E)$.

问：$G(V,E)$中是否存在有向 Hamilton 圈？

定理 5 DHC∈NPC.

证 DHC 显然为 NP 问题. 下证 DHP∝DHC. 设 *DHP* 之输入I 为$G(V,E)$及二顶 s,t；相应的 DHC 的输入 $f(I)$取为 $G'(V',E')$，其中

$$V'=V(G)\cup\{a\},$$
$$E'=E(G)\cup\{a\to s,t\to a\}.$$

显然，$G(V,E)$中有 Hamilton 轨 $P(s,t)$当且仅当 G'中有 Hamilton 圈，证毕.

无向图中的 Hamilton 轨问题，代号 HP：

输入：无向图 $G(V,E)$，二顶 $s,t\in V(G)$.

问：G 中是否存在无向 Hamilton 轨 $P(s,t)$？

定理 6 HP∈NPC.

证 显然有 HP∈NP. 下证 DHP∝HP.

设 DHP 之输入 I 为有向图 $G(V,E)$，二顶 $s,t\in V(G)$，相应的 HP 之输入 $f(I)$取为 $G'(V',E')$及$(s,0)$，$(t,2)\in V'$.

$G'(V',E')$构作如下：

$$V'=\{(v,0),(v,1),(v,2)\mid v\in V(G)\}.$$
$$E'=(v,0)-(v,1),(v,1)-(v,2)\mid v\in V(G)\}\cup\{(u,2)-(v,0)\mid e=uv\in E(G)\}.$$

显然，$G(V,E)$中有有向 Hamilton 轨 $P(s,t)$时，G'中有无向 Hamilton 轨 $P'((s,0),(t,2))$.

反之，若 $P'((s,0),(t,2))$是 $G'(V',E')$中的 Hamilton 轨，我们可以追踪 $P'((s,0),(t,2))$，并从$(s,0)$开始把每三个在 P' 上相邻的顶小组$\{(v,0),(v,1),(v,2)\}$合成一个顶，从而得 $G(V,E)$中的一条有向 Hamilton 轨 $P(s,t)$，证毕.

无向 Hamilton 圈问题，代号 HC：

输入：无向图 $G(V,E)$.

问：G 中是否存在 Hamilton 圈？

定理 7 HC∈NPC.

证 显然 HC∈NP. 下证 HP∝HC.

设 $G(V,E)$及 $s,t\in V(G)$是 HP 之输入 I，HC 的相应输入 $f(I)$为图 $G'(V',E')$：

$$V'=V(G)\cup\{a\},$$
$$E'=E(G)\cup\{as,at)\}.$$

显然，HP“是”当且仅当 HC“是”，证毕.

货郎问题，代号 TS(*Traveling salesman*)：

输入：无向图 $G(V,E)$，自然数 k，$\forall e\in E, l(e)$.

问：是否有 G 的一个生成回路C，使得 C 之总长不大于k？

定理 8 TS∈NPC.

证 不妨设 $l(e)\equiv1$，不然可把边剖分. 显然 TS∈NP，要证 HC∝TS. 设 HC 的输入 I 为$G(V,E)$，取 TS 相应的输入 $f(I)$为 $G(V,E)$，$k=|V|$. 于是 I“是”当且仅当 $f(I)$“是”，证毕.

3 色问题，代号 3C：

输入：图 $G(V,E)$.

问：$\chi(G)\leqslant3$ 吗？

定理 9 3C∈NPC.

证 显然 3C∈NP，只需证 3SAT∝3C.

设 3SAT 之输入 I 为字集$\{x_1,x_2,\cdots,x_n;\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_n\}$及句子

集$\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$，相应的3C之输人$f(I)$为$G(V, E)$，其中(图5.3)

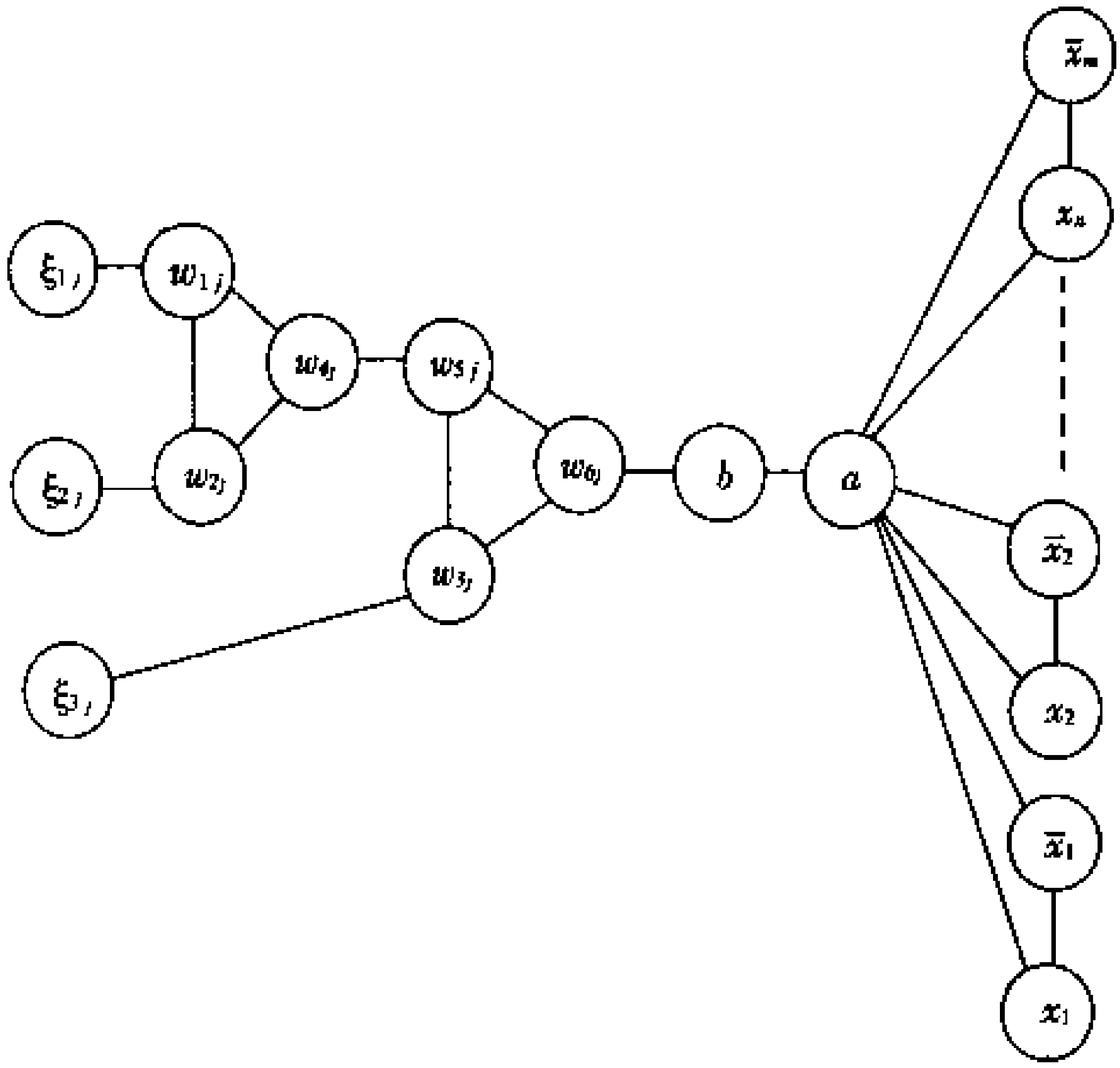


图 5.3

$$V(G) = \{a, b\} \cup \{x_i, \overline{x}_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{w_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant 6, 1 \leqslant j \leqslant m\},$$

$$E(G) = \{ab\} \cup \{ax_i, a\overline{x}_i, x_i\overline{x}_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{w_{1j}w_{2j}, w_{1j}w_{4j}, w_{2j}w_{4j}, w_{4j}w_{5j}, w_{3j}w_{5j}, w_{3j}w_{6j}, w_{5j}w_{6j}, w_{6j}b \mid 1 \leqslant j \leqslant m\} \cup \{\xi_{1j}w_{1j}, \xi_{2j}w_{2j}, \xi_{3j}w_{3j} \mid 1 \leqslant j \leqslant m\},$$

$$C_j = \{\xi_{1j}, \xi_{2j}, \xi_{3j}\}.$$

设0,1,2是我们使用的三种颜色.若I已句句饱和,我们约定当字$\xi_{kj} = T$时,顶ξ_{kj}上1色,$1 \leqslant k \leqslant 3$;当$\xi_{kj} = F$时,顶$\xi_{kj}$上0色.由于$I$中每句皆饱和,所以没有

$$(\xi_{1j},\xi_{2j},\xi_{3j})=(0,0,0)$$

的现象.

我们把 b 着以 0 色, a 着以 2 色, w_{6j}着以 1 色, $j=1,2,\cdots,m$,于是得正常上色.反之,若 $f(I)$已用 3 种颜色正常着色,我们称 a 上的颜色为 2 号色, b 上的颜色为 0 号色,于是可得"字"上的颜色是 0 色或 1 色,且 w_{6j}不是 0 色,用反证法容易证明$(\xi_{1j},\xi_{2j},\xi_{3j})\neq(0,0,0)$.这时,我们规定 3SAT 的赋值法为

"字"为 1 色时,此字值为 T;

"字"为 0 色时,此字值为 F.

则$(\xi_{1j},\xi_{2j},\xi_{3j}),(j=1,2,\cdots,m)$皆饱和,证毕.

最小顶反馈集问题,代号 FVS(*Feedback vertex set*):

输入:有向图 $G(V,E)$,自然数 k.

问:是否存在 $V'\subseteq V$,使得$|V'|\leqslant k$,且 $G-V'$中无有向圈?

定理 10 FVS∈NPC.

证 显然 FVS∈NP,只需证明 VC∝FVS.若 I 为 VC 之输入:$G(V,E)$及自然数 k,相应的 $f(I)$作为 FVS 之输入取为有向图 $H(V,F)$及 k:

$$F=\{a\to b,b\to a\mid ab\in E(G)\},$$

于是,V'是G 的顶覆盖当且仅当V'是H 的反馈集,证毕.

最小边反馈集问题,代号 FES:

输入:有向图 $G(V,E)$,自然数 k.

问:是否存在 $E'\subseteq E$,$|E'|\leqslant k$,且 $G-E'$中无有向圈?

定理 11 FES∈NPC.

证 FES 显然属于 NP,下证 FVS∝FES.

设 I 是 FVS 之输入,I 为$G(V,E)$及自然数 k,相应的 $f(I)$作为 FES 之输入取为有向图 $H(W,F)$及 k:

$$W=\{(v,1),(v,2)\mid v\in V(G)\},$$

$$F=\{(v,1)\to(v,2)\mid v\in V(G)\}\cup\{(u,2)\to(v,1)\mid u\to v\in E(G)\}.$$

我们称$(v,1)\to(v,2)$型边为“内边”，$(u,2)\to(v,1)$型边为“外边”；每个与$(v,1)$关联的外边皆入边，且与$(v,1)$关联的内边只1条，它是出边；由此知，若在一个边反馈集中有一条外边$(u,2)\to(v,1)$，它可以用内边$(v,1)\to(v,2)$代替，所以我们可以假设边反馈集中的边皆为内边. 在 G 中，与这些内边相对应的顶集 $V'\subseteq V$ 是 G 的顶反馈集；反之，若 V' 是 G 的顶反馈集，则在 H 中的相应内边们组成 H 的一个边反馈集，证毕.

Steiner 树问题，代号 ST：

输入：连通图 $G(V,E)$，边权 $l(e)>0$，自然数 k，$X\subseteq V(G)$.

问：G 上是否有树 $T(W,F)$，使得 $X\subseteq W\subseteq V$，$F\subseteq E(G)$，且 $\sum_{e\in F} l(e)\leqslant k$?

这个问题用图论语言来讲，就是求一个权最小的树状子图，使此树之顶含有指定的顶子集. 实际背景是挑选连通指定的几个城市的最廉价的交通(或通讯)网.

定理 12　ST$\in$NPC.

证　ST 显然属于 NP. 下证 3XC$\propto$ST.

设 3XC 的输入 I 为 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_t\}$，$t\neq 0$，$t\equiv 0(\mathrm{mod}3)$，U 的三元素子集集团 $C=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$；相应的 $f(I)$ 作为 ST 之输入，我们取图 $G(V,E)$ 及 $l(e)\equiv 1$，$k=\frac{4}{3}t$，$X=\{v_0\}\cup U$，其中

$$V(G)=\{v_0\}\cup C\cup U.$$

$$E(G)=\{v_0S_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}\cup\{S_iu_j\mid u_j\in S_i\}.$$

记 $v_0S_i=e_i$，$S_iu_j=f_{ij}$.

若对 I 回答“是”，即存在 $J\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $\bigcup_{i\in J}S_i=U$，且对 J 中之 $i\neq j$，$S_i\cap S_j=\varnothing$，我们来证这时对 $f(I)$ 之回答也是“是”. 事实上，取 $T(W,F)$ 为

$$W=\{v_0\}\cup\{S_i\mid i\in J\}\cup U,$$

$$F=\{e_i \mid i\in J\}\cup\{f_{ij}\mid i\in J, u_j\in S_i\}.$$

显然 $T(W,F)$是树，且 $X\subseteq W\subseteq V$，$F\subseteq E(G)$. 又因为$|J|=\frac{t}{3}$，于是$|\{e_i\mid i\in J\}|=\frac{t}{3}$，$|\{f_{ij}\mid i\in J, u_j\in S_i\}|=t$，故 $\sum\limits_{e\in F}l(e)=\frac{t}{3}+t=\frac{4}{3}t$，这时 $f(I)$之回答是"是".

反之，若 $f(I)$是"是"，要证 I 亦是"是".

设 $T(W,F)$是 $f(I)$的一个 Steiner 树，$X\subseteq W$，故 $u_i(i=1,2,\cdots,t)$是 T 上的顶；不妨设每个 u_i 皆叶，不然，若 $d_T(u_j)>1$，则 u_j 与 S_{i_1}，S_{i_2}相邻，删去边 f_{i_1j}，加上边 e_{i_1}，e_{i_2}之一，仍然得到 Steiner 树，且总权不变. 令 I 中的J 为

$$J=\{i\mid S_i\in W\}(\neq\emptyset),$$

则此树上的 S_i 型顶是 U 的一个三元精确覆盖，证毕.

定理 12 的证明指出，即使是 $l(e)\equiv 1$，ST 问题仍然属于 NPC.

最大断集问题，代号 MAXC(*Maximum cut*)：

输入：无向图 $G(V,E)$，自然数 k.

问：是否存在顶子集 $S\subset V(G)$，使得$|(S,\overline{S})|\geqslant k$?

定理 13 MAXC$\in$NPC.

证 MAXC 显然属于 NP，下证 3SAT$\propto$MAXC.

设 I 是 3SAT 的输入，I 为：字集 L 与句集 C，

$L=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_n\}$，$C=\{C_1,\cdots,C_m\}$.

首先构作一个最大权断集问题，代号 MAXWC：

MAXWC 的输入：图 $G'(V',E')$，$\forall e\in E'$，权 $w(e)$，自然数 k'.

问：是否有 $S'\subset V'$，使得 $\sum\limits_{e\in(S',\overline{S'})}w(e)\geqslant k'$?

下证 3SAT$\propto$MAXWC.

取 $f(I)$为 MAXWC 的与 I 相应的输入，$G'(V',E')$，$w(e)$与 k'如下：

$$k' = (10m + 1)n + 6m.$$

$$V'(G') = \{v_i \mid 0 \leqslant i \leqslant m\} \cup L.$$

$$E'(G') = \{uv \mid u \neq v \text{ 且 } \exists i, \text{使得 } u, v \in A_i\} \cup \{x_j\bar{x}_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

其中

$$A_i = \{v_0\} \cup \{v_i\} \cup C_i, i = 1, 2, \cdots, m.$$

$w(e)$取为

$$w(v_0\xi) = \sum_{i=1}^{m} |C_i \cap \{\xi\}|, \text{当 } \xi \in L;$$

$$w(\xi'\xi'') = \sum_{i=1}^{m} |C_i \cap \{\xi'\}| \cdot |C_i \cap \{\xi''\}|, \text{当 } \xi', \xi'' \in L \text{ 且 } \xi' \neq \xi'';$$

$$w(x_j\bar{x}_j) = 10m + 1;$$

$$w(v_iu) = 1, \text{当 } i > 0 \text{ 且 } u \in A_i.$$

若 I“是”，设 τ 是 T 值之字集，令 $\tau \subset S'$，$L - \tau \subset \overline{S'}$，于是 $x_j\bar{x}_j \in (S', \overline{S'})$，$j \in \{1, 2, \cdots, n\}$，它们对权的总贡献是$(10m + 1)n$. 把 v_0 放人 $\overline{S'}$ 中. m 个句子中的每一句至少有一个“字顶”在 S'中(都是饱和句，每句至少一个 T 字在τ 中，而 $\tau \subset S'$). 我们把 v_i 放人S'或$\overline{S'}$，使 A_i 中的顶“2－3 分之”，A_i 对断集提供6 条边，由权之定义，m 个团(K_5)共对$(S', \overline{S'})$提供权数 $6m$. 这时，

$$\sum_{e \in (S', \overline{S'})} w(e) = k',$$

即 $f(I)$的回答是“是”.

反之，若 $f(I)$的回答是“是”，即存在 $S' \subset V'$，使得

$$\sum_{e \in (S', \overline{S'})} w(e) \geqslant k' = (10m + 1)n + 6m,$$

则每条边 $x_j\bar{x}_j \in (S', \overline{S'})$，故每个团 A_i 必须最大限度地再提供 6 (造成 A_i2－3 分顶). 这时我们称 v_0 所在的为“假端”，另一端为“真端”. 于是最多两个字(C_i 中)在假端，至少一个字在真端. 我们把真端之字赋值 T，假端之字赋值 F，则 I 回答“是”.

下面把加权问题化为无权断集问题.

在 G' 中一条边 uv 之权为 $w(uv)=w(e)$,在 G 中变成如图 5.4 的结构,如此得到图 G. 下面证明 G 中有大小至少为 $k=2[(10m+1)n+10m]+k'$ 的断集,当且仅当 G' 中有权至少为 k' 的断集.

事实上,若 G' 中权为 k' 的断集为 $(S',\overline{S}')$,考虑 G 中的断集 $(S,\overline{S})$,$S'\subset S$,$\overline{S}'\subset\overline{S}$,轨 ua_ib_iv 中,若 u,v 在 G 的断集 $(S,\overline{S})$ 的同一端,则最多有两条边在此断集中;若 u 与 v 分居于 (S,S') 之两端,则可使此轨对断集供献 3. 故 G' 的每一边 e 能把 G 的断集 $(S,\overline{S})$ 的权提高 $2w(e)$,G' 的一切边,对 G 的断集提高 $2\sum\limits_{e\in E'}w(e)$,且

$$\sum_{e\in E'}w(e)=(10m+1)n+10m,$$

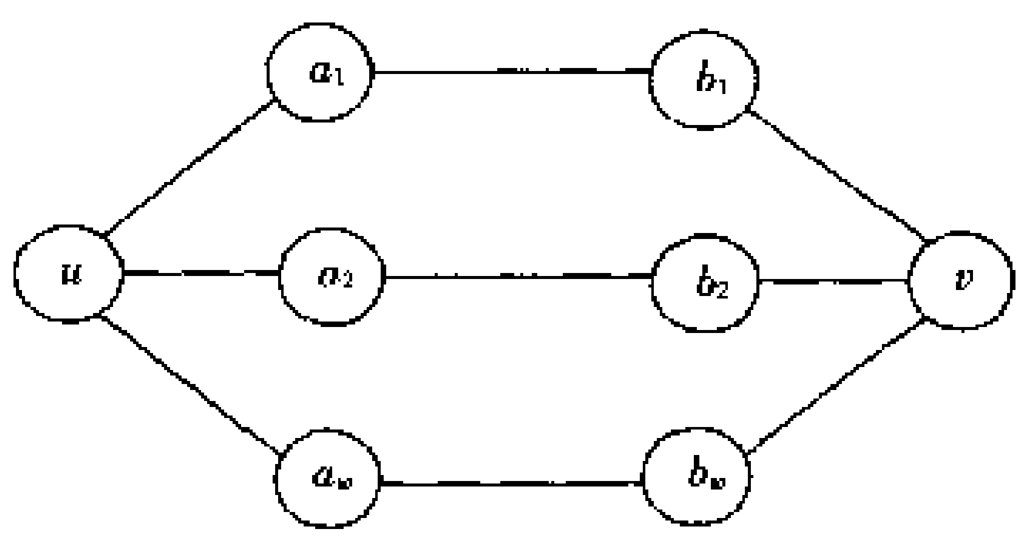


图 5.4

若 G' 中 $(S',\overline{S}')$ 的权是 k',令 $S'\subset S$,$\overline{S}'\subset\overline{S}$,可使

$$|(S,\overline{S}|=2[(10m+1)n+10m]+k'=k.$$

反之,若 G 的断集 $(S,\overline{S})$ 中至少有 k 条边,对 G' 的每一边 $e=uv$,若 u,v 在此断集之同一端,e 对此断集至多提供 $2w(e)$,不妨设恰为 $2w(e)$(不然改变 S);若 u 与 v 分居于此断集之两端,e 对此断集之供献最多为 $3w(e)$,不妨认为恰为 $3w(e)$(不然改变一下 S),故

$$|(S,\overline{S}|=2\sum_{e\in E'}w(e)+\sum_{e\in(S',\overline{S}')}w(e)\geqslant k,$$

其中 $S'=S\cap V'$;因为$|(S,\overline{S}|\geqslant k$,故

$$\sum_{e\in(S',\overline{S}')}w(e)\geqslant k',$$

于是 G'有权不小于k'的断集,证毕.

下面考虑的问题的实际背景是部件排列最优化.

把图 $G(V,E)$的顶分别放在 X 轴的 $1,2,\cdots,|V|$处,用 $p(v)$表示 v 顶的坐标,且使 G 的边成为直线段,则 G 的边长之和为

$$L=\sum_{uv\in E(G)}|p(u)-p(v)|.$$

我们的目标是使 $L=\min$,可惜这个问题也是 NPC 中的一员!

图的最短线状排列问题,代号 MINLA(Minimum linear arrangement):

输入:单图 $G(V,E)$,自然数 k.

问:是否存在可逆映射

$$p:V\to\{1,2,\cdots,|V|\},$$

使得

$$\sum_{uv\in E(G)}|p(u)-p(v)|\leqslant k?$$

与 MINLA 相应的,还有一个图的最长线状排列问题,代号 MAXLA:

MAXLA 输入:单图 $G(V,E)$,自然数 k.

问:是否存可逆映射

$$p:V\to\{1,2,\cdots,|V|\},$$

使得

$$\sum_{uv\in E(G)}|p(u)-p(v)|\geqslant k?$$

定理 14 MAXLA$\in$NPC.

证 只欠证 MAXC$\propto$MAXLA. 若 MAXC 之输入 I 为:

$G'(V',E')$，自然数 $k'(|V'|=n)$，相应的 MAXLA 之输入 $f(I)$ 取为单图 $G(V,E)$及自然数 k：

$$V=V'\cup\{x_1,x_2,\cdots,x_{n^3}\},$$
$$E=E',$$
$$k=k'n^3.$$

设 I“是”，即 G'中存在断集$(S',\overline{S}')$，使得$|(S',\overline{S}'|\geqslant k'$，我们来安排 G 之顶，使 G 的顶在$\{1,2,\cdots,n+1,\cdots,n+n^3\}$上，且边长之总长$\geqslant k$.

若 $v\in S'$，则令

$$1\leqslant p(v)\leqslant|S'|;$$

若 $v\in\overline{S}'$，则令

$$|S'|+n^3<p(v)\leqslant n+n^3;$$

若 $v\in\{x_1,x_2,\cdots,x_{n^3}\}$，则令

$$|S'|<p(v)\leqslant|S'|+n^3.$$

于是跨 n^3 个孤立顶的边长之条数是$|(S',\overline{S}'|$，每边之长$\geqslant n^3$，所以

$$\sum_{uv\in E(G)}|p(u)-p(v)|>|(S',\overline{S}')|n^3\geqslant k'n^3=k.$$

即 $f(I)$回答“是”.

反之，若 $f(I)$回答“是”，即存在对 V 的安置$p:V\to\{1,2,\cdots,n+n^3\}$，使得

$$\sum_{uv\in E(G)}|p(u)-p(v)|\geqslant k.$$

我们来建立 G'中的一个断集$(S',\overline{S}')$，使得$|(S',\overline{S}')|\geqslant k'$.
因新顶皆孤立顶，则 G'中的断集与G 中断集是同一的.令

$S_i=\{v|v\in V,p(v)\leqslant i\}$，$1\leqslant i\leqslant|V|=n+n^3$，

$(S_i,\overline{S}_i)$是断集.

令 j 满足

$$|(S_j,\overline{S}_j)|=\max_{1\leqslant i\leqslant n+n^3}|(S_l,\overline{S}_i)|.$$

调整 G 顶之位置，使 V' 中的顶的相对位置（左右顺序）不变，而把 $x_1,\cdots,x_{n^3}$ 放在 $S_j\cap V'$ 与 $\overline{S}_j\cap V'$ 之间，则

$$\sum_{uv\in E}|p'(u)-p'(v)|\geq\sum_{uv\in E}|p(u)-p(v)|\geq k=k'n^3,$$

其中 p' 是调整后的"安置"（映射）. 在 p' 的安置之下，G 的边总长可以分成两部分：

(1) 令 $S'=S_i\cap V'$，$(S',\overline{S}')$ 是 G' 之断集，而孤立顶 $x_1,\cdots,x_{n^3}$ 插在 S' 与 $\overline{S}'$ 之间，$(S',\overline{S}')$ 中边之长增加为 $n^3|(S',\overline{S}')|$.

(2) 把 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 全卸下去，把 S' 与 $\overline{S}'$ 之间的间隙靠紧，这时边总长之上界为

$$(n-1)\cdot 1+(n-2)\cdot 2+\cdots+1\cdot(n-1)=\frac{n(n^2-1)}{6}.$$

于是

$$n^3|(S',\overline{S}')|+\frac{n(n^2-1)}{6}\geq k'n^3,$$

$$|(S',\overline{S}')|+\frac{n_2-1}{6n^2}\geq k',$$

即

$$|(S',\overline{S}')|\geq k',$$

I 回答"是"，证毕.

定理 15 MINLA$\in$NPC.

证 只需证明 MAXLA$\propto$MINLA.

设 MAXLA 的输入为 I，I 是 $G(V,E)$ 和自然数 k，相应的 MINLA 之输入 $f(I)$ 取为

$$k'=\frac{n(n^2-1)}{6}-k,(n=|V|),$$

$G'(V',E')$ 为

$$V'=V,$$
$$E'=\{uv\mid u\neq v,\text{且 }uv\notin E(G)\}.$$

注意到完全图 K_n 之边的总长恰为$\frac{n(n^2-1)}{6}$，于是可得知 I 与 $f(I)$同时回答"是"；事实上，G'是G之补图，对每个安置 p，

$$\sum_{uv\in E(G)} |p(u)-P(v)| + \sum_{uv\in E(G')} |p(u)-P(v)|$$
$$=\frac{n(n^2-1)}{6},$$

故

$$\sum_{uv\in E(G)} |p(u)-P(v)| \geqslant k,$$

当且仅当

$$\sum_{uv\in E(G')} |p(u)-P(v)| \leqslant k',$$

证毕.

对于一种商品运输中的最大流问题，我们已经有 $2F$ 或 Dinic 等有效算法，但对于多种商品，即使是两种商品的整数流问题，也尚未找到有效算法，它是 NPC 的一员！

令顶 s_1,s_2 是源，t_1,t_2 是汇(坑)，边容量 $c(e)>0$ 构成有向图 $G(V,E)$上的一个网络，二商品流是指如下的两个流函数 f_1，f_2：

(C_1)　对每个边 $e\in E(G)$，$f_1(e)\geqslant 0$，$f_2(e)\geqslant 0$，$f_1(e)+f_2(e)\leqslant c(e)$；

(C_2)　对每个 $i\in\{1,2,\}$，和每个 $v\in V(G)-\{s_1,s_2,t_1,t_2\}$，

$$\sum_{e\in\alpha(v)} f_i(e)=\sum_{e\in\beta(v)} f_i(e).$$

每个流的总流量为$(i=1,2)$：

$$F_i=\sum_{e\in\alpha(t_i)} f_i(e)-\sum_{e\in\beta(t_i)} f_i(e).$$

我们设 $f_i(e)$与 $c(e)$皆非负整数.

二商品整流问题，代号 D2CIF(*The two - Commodity integral flow problem in directed networks*)：

输入:有向二源二汇网络 N,非负整数 R_1,R_2(需求).

问:有无整值流函数 $f_i,(i=1,2)$,使 $F_i \geqslant R_i$?

当 $c(e)\equiv 1$ 时;D2CIF 称为简单 D2CIF.

定理 16 简单 D2CIF∈NPC.

证 显然,简单 D2CIF∈NP. 下证 SAT∝简单 D2CIF.

设 SAT 之输入 I 为字集

$$L=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_n\}$$

和句子集

$$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}.$$

简单 D2CIF 的相应输入 $f(I)$取为:

$R_1=1,R_2=m$,二源二汇网络 N,其中 N 的构造为:

若 p_i 是字 x_i 在句子中出现的次数,q_i 是 $\overline{x_i}$ 在句子中出现的次数,则对每个 x_i 我们构作如图 5.5 所示的结构.

把图 5.5 的结构连成一串,以 v_t^i 为尾,以 v_s^{i+1} 为头有一条有向边;以 s_1 为尾,以 v_s^1 为头有一条有向边;以 v_t^n 为尾,以 t_1 为头有一有向边,以 s_2 为尾,以 v_j^i 和 $\overline{v}_j^i$ 为头有有向边,这里 j 是奇数;$C_1,C_2,\cdots,C_m$ 是另一些顶,每个 C_i 为尾,$i=1,2,\cdots,m$,t_2 为头,有一条有向边;若 $x_i(\overline{x_i})$第 j 次出现时,则以 $v_{2j}^i(\overline{v}_{2j}^i)$为尾,以 C_r 为头有一有向边,其中 C_r 是 $x_i(\overline{x_i})$出现的句子.

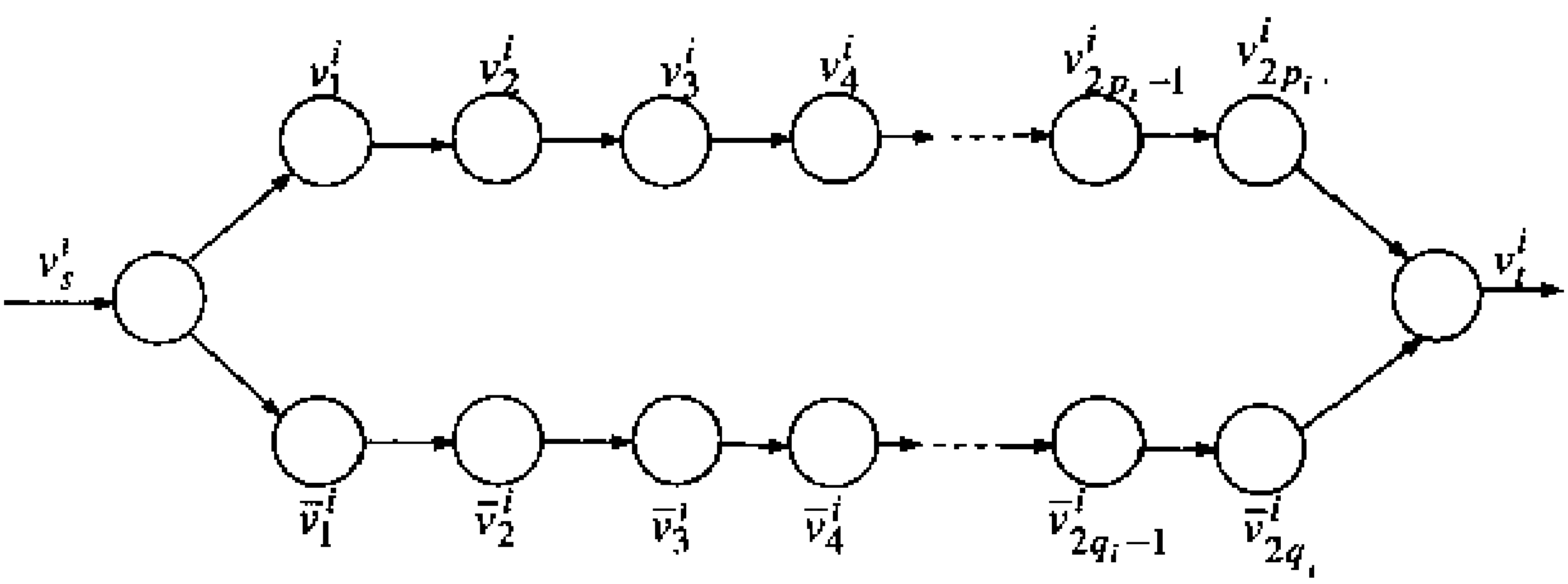


图 5.5

由(C2),第一种商品必然由 s_1 出发从左到右地要么经过图5.5的上轨,要么经过下轨流入 t_1,

设 $f(I)$"是",我们取赋值法为:仅当 f_1 流过第 i 个图5.5式的结构下轨时,$x_i=T$.于是对SAT的输入 I,回答"是".

反之,若有赋值法,使 I 中句句饱和,若 $x_i=T$ 时,我们令第一种商品流过图5.5的下轨,;若 $x_i=F$,我们令第一种商品流过图5.5的上轨;令 ξ 是 C_k 中的"真"字,若 $\xi=x_i$,则图5.5的上轨不通过第一种商品,而使用它从 s_2 到 C_k 流过第二种商品的一个单位;若 $\xi=\overline{x_i}$,用下轨从 s_2 到 C_k 流过第二种商品一个单位,于是可使 $F_1=1,F_2=m$,即 $f(I)$亦"是",证毕.

习　　题

1.称 $M\subseteq X\times Y\times W$ 是分段调和的,若对于一切 a,b,c,x,y,w,$\{(a,b,y),(a,x,c),(w,b,c)\}\subset M$,表明$(a,b,c)\in M$.证明:即使 M 限定为分段调和,3DM仍属于NPC.

2.包装问题,代号SP(Set packing):

输入:一个集合集团 C,正整数 k.

问:C 中是否存在 k 个两两不相交的集合?

证明:SP∈NPC.

(例如:C 是一盒一盒的什锦糖果,要从 C 中选取 k 盒出来包装在一个大箱子里,使箱子中任意两盒糖中没有相同味道的糖果,这种要求能否实现?)

3.相遇集问题,代号HS(Hitting set):

输入:集合 U 的子集集团 C,正整数 k.

问:是否存在子集 $U'\subseteq U$,使得 $|U'|\leqslant k$,且 U' 与 C 中每个集合交非空?

试证:HS∈NPC.

(例如:人们组织了一些团体,我们欲采访每个团体里至少一

个人,但囿于时间,被采访的总人数不得超过 k 名,问是否可能?)

4. 背包问题,代号 0-1KNAP(0-1 Knapsack):

输入:正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$.

问:是否存在 $I\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$,使得

$$\sum_{i\in I}a_i = b?$$

试证:0-1KNAP∈NPC.

(例如:一个背包至多只能装 b 公斤,今有 a_1 公斤,a_2 公斤,$\cdots,a_n$ 公斤 n 件东西,问能否从中挑选几件,使得总重量恰为 b 公斤?)

5. 划分问题,代号 PART(Partition problem):

输入:正整数 $p_1,p_2,\cdots,p_m$.

问:是否存在 $J\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$,使得

$$\sum_{i\in J}p_i = \sum_{i\notin J}p_i.$$

试证:PART∈NPC.

(例如:m 个盒子中密封了相同的球,不许拆开盒子,能否把这些球平分?)

6. 试证:XC∈NPC.

7. 试证:3SC∈NPC.

8. 不用 Cook 定理证明 IND∝CLIQUE.

9. 证明:求最小独立集但它也是顶覆盖可在多项式时间内解决.

10. 叙述一个判定问题型的最小支配集问题,且证明它是 NPC 的.

11. 把无向图中的货郎问题(回路上的顶可以通过不止一次)叙述成判定问题,且证明它是 NPC 的.

12. 证明:存在多项式算法求出一个回路 C,其长满足 $l(C)\leqslant 2l(T)$,其中 $l(T)$是 G 的最小生成树 T 之长;且若每边长皆正数,则这种回路满足 $l(C)>l(T)$.

13. 证明:对每个 $k \geqslant 3$,图的 k 正常着色问题(一般)是 NPC 的.

14. 下述问题叫做图的团划分问题:

输入:图 $G(V,E)$,自然数 k.

问:能否把 V 划分成 k 个子集 $V_1, V_2, \cdots, V_k$,使得 $G[V_i]$ 是团?

证明:此问题是 NPC 的.

15. 考虑下面关于有向图的问题:

输入:强连通有向图 $G(V,E)$,自然数 k.

问:是否有边子集 E',使得 $|E'| \leqslant k$? 且 $G'(V,E')$ 是强连通的?

证明:该问题是 NPC 的.

16. 证明下列最长轨问题是 NPC 的:

输入:图 $G(V,E)$,二顶点 s,t,正整数 k.

问:是否存在从 s 到 t 长度不少于 k 的轨?

17. 证明:对于 2 分图,无向 Hamilton 轨问题也是 NPC 的.

18. 证明:即使 s,t 不指定,无向 Hamilton 轨问题也是 NPC 的.

19. 下面是限制次数的生成树问题:

输入:图 $G(V,E)$,自然数 k.

问:G 中是否有生成树,对每个顶,$d_T(v) \leqslant k$?

证明:即使 $k \geqslant 2$ 是固定的,而不是输入的一部分,该问题也是 NPC 的.

20. 考虑下面的网络通讯问题:$G(V,E)$ 是一个图,$v_0 \in V(G)$ 称为中心,每顶 $v \in V - \{v_0\}$ 有一个需求 $r(v) \geqslant 0$,每边 e 上有一个容量 $c(e) > 0$ 和一个费用 $k(e) \geqslant 0$,找一个满足下列条件的最小费用生成树 T:若 $U(e)$ 是一些顶之集合,使得从 v_0 经 e 到达这些顶,则 $\sum\limits_{v \in U(e)} r(v) \leqslant c(e)$;树的费用为 $\sum\limits_{v \in (E)T} \leqslant k(e)$.

叙述一个相应的判定问题，且证明它是 NPC 的.

21. 有向 Steiner 树问题：

输入：有向图 $G(V,E)$，顶子集 X，一顶 $r\in X$，自然数 k.

问：G 中是否有根在 r 的外向树 $T(W,F)$，使得 $X\subseteq W\subseteq V$，且 $|F|\leqslant k$？

证明：此问题是 NPC 的.

22. 在二分图 $G(X,Y,E)$ 中，X 集合是连通的，Steiner 树问题仍是 NPC 的.

23. 下列问题称为最少揪边二分子图问题，代号 MINEDB (*Minimum edge - deletion bipartite subgraph*)：

输入：图 $G(V,E)$，自然数 k.

问：是否存在边子集 $E'\subseteq E$，使得 $G(V,E-E')$ 是二分图，且 $|E'|\leqslant k$？

证明：MINEDB $\in$ NPC.

24. 下列问题称为等分最小断集问题，代号 MINCES(*Minimum cut into equal - sized*)：

输入：图 $G(V,E)$，二顶 s,t，自然数 k.

问：是否存在 V 的划分 $S,\overline{S}$，使得 $|S|=|\overline{S}|$，$s\in S$，$t\in\overline{S}$，且

$$|\{uv\mid u\in S,v\in\overline{S}\}|\leqslant k?$$

证明：MINCES $\in$ NPC.

25. 证明：网络中的最大流，2F 算法中能否只用 k 条可增载轨得出的问题是 NPC 的.

26. 成捆整流问题，代号 IFWB(*Integral flow with bundles*)：

在最大流问题中，“捆儿”是指边子集 $B_1,B_2,\cdots,B_k$，分别具有捆容量 $C_1,C_2,\cdots,C_k$；流 f 要满足对每个捆 B_i，$i=1,2,\cdots k$，$\sum\limits_{e\in B_i}f(e)\leqslant C_i$，且对每个顶 $v\in V-\{s,t\}$，流入与流出相等，问是否存在满足需求 R 之流 f？

证明：IFWB $\in$ NPC.

第六篇　数理逻辑

音乐里有简谱和五线谱等人工符号，记录音韵的节律和高低，化学中用分子式和反应方程等人工符号记录物质的分子结构和反应过程，为了研究形式逻辑中的推理规律，数学家也为其设计了一套人工符号，用人工符号来书写逻辑法则，使形式逻辑数学化，形成先进的数理逻辑这一学科，莱布尼兹(Leibniz)是数理逻辑的首席创始人，他力主"思维计算化".事实上，正是应用了一整套数学符号组成的形式系统来研究逻辑问题，才使得逻辑学有了脱胎换骨的进步，具备了表述简洁、推理严谨、易于分析等优点.

为数理逻辑做出过奠基性工作的数学家非常之多，例如因开创布尔代数而名垂数学史的布尔(Boole)，德国著名数学家弗雷格(Frege)，意大利数学家皮亚诺(Peano)，英国哲学家罗素(Russel)和数学家怀特黑德(Whitehead)，德国数学大师希尔伯特(Hilbert)，奥地利数学家哥德尔(Gödel)，英国数学家图灵(Turing)等等.

数理逻辑是计算机科学的基础之一，搞出最短轨道等著名算法与软件的荷兰计算机科学家迪克斯特拉(Dijkstra)坦率地说："假如我早年在数理逻辑上下点工夫，就不会出那么多错误，不少东西数理逻辑上早就说过了，如果我年轻 20 岁，一定回去学数理逻辑."有人预言，二十一世纪，数理逻辑与计算机的关系和二十世纪微积分与物理学的关系一样富于成就.

6.1 命题逻辑

6.1.1 命题及其真假

判断语句，不论其判定正确与否，即为命题；在数理逻辑当中，用大写字母表示一个命题.

例如下面语句皆命题：

A：离散数学有用.

B：离散数学无用.

C：$2+2=4$.

D：$2+2\neq 4$.

E：2002年，人类到达火星.

如果一个命题是真的，则用 T 或 1 来表示，否则用 F 或 0 来表示，我们只讨论其真假必居其一的那些命题.

例如　$A=T=1, B=F=0, C=T=1, D=F=0, E\in\{0,1\}$，但目前尚无力给出答案.

在自然语言中的感叹句、疑问句和祈使句不是命题.

当然判定真假需要有相应的标准，例如

$A:1+1=2, B:1+1=0, C:1+1=1$,

在不同的标准之下都是真的.

6.1.2 联结词与命题公式

数理逻辑当中，常用的五个联结词定义如下：

定义 1　(1)$\neg$ 表示否定，若 P 是一个命题，则$\neg$ 表示这样一个命题，它满足$\neg P=1$ 当且仅当 $P=0$，$\neg P$ 读作"非 P"；(2) $\wedge$ 表示"与"("和"，"合取")，若 P 与 Q 是两个命题，则 $P\wedge Q$ 表示这样一个命题，$P\wedge Q=1$ 当且仅当 $P=1$ 而且 $Q=1$；$P\wedge Q$ 读作 P 与 Q(P 和 Q)；(3) $\vee$ 表示"或"(析取)，若 P 与 Q 是两个命题，则 $P\vee Q$ 表示这样一个命题，$P\vee Q=1$ 当且仅当 P 与 Q 至少一个为真，$P\vee Q$ 读作 P 或 Q. (4)$\rightarrow$表示"则"，若 P 与 Q 是两个命题，

则 $P \to Q$ 表示这样一个命题，$P \to Q = 0$ 当且仅当 $P = 1$ 而 $Q = 0$，$P \to Q$ 读作若 P 则 Q；(5)$\leftrightarrow$表示双条件(互为条件)，若 P 与 Q 是两个命题，$P \leftrightarrow Q$ 表示这样一个命题，$P \leftrightarrow Q = 1$ 当且仅当 $P = Q = 1$ 或 $P = Q = 0$，读作 P 当且仅当 Q. □

以上五个联结词可以理解成逻辑运算，其中$\neg$ 是一元运算，其余皆为二元运算，联结词是运算符号.

定义 2 以{真，假}为变域的变元称为命题变元，命题变元用大写字母表示；当一个命题已确定了真或假时，称为命题常量，命题公式定义为：(1)一个命题变元是命题公式；(2)P 是公式，则$\neg P$ 也是公式；(3)P 与 Q 都是公式，则 $P \wedge Q, P \vee Q, P \to Q, P \leftrightarrow Q$ 都是公式，除(1)(2)(3)外，再无别的命题公式. □

自然语言中的一些语句，可以用命题公式来表达.

例如，“计算明天开运动会，如果明天下雨，明天照常上课”可译成逻辑公式：

$$P \to ((\neg Q) \wedge R),$$

其中

P：明天下雨，Q：明天开运动会，R：明天正常上课.

定义 3 设 $P = f(P_1, P_2, \cdots, P_n)$是以命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 组成的公式，{真，假}×{真，假}×⋯×{真，假}是此公式的定义域，对于$(P_1, P_2, \cdots, P_n)$的每个可能的确定，称为对 $P = f(P_1, P_2, \cdots, P_n)$的赋值，若对任何赋值，$P \equiv$真，则称此公式为永真公式(又称重言式)；若对任何赋值，$P \equiv$假，则称此公式为永假公式(又称矛盾式)；如果存在一个确定的向量$(P_1, P_2, \cdots, P_n)$，使得 $P =$真，则称 $P = f(P_1, P_2, \cdots, P_n)$是可满足公式. □

由定义知，两个永真公式的$\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$仍得永真公式.

6.1.3 真值表

为了对命题进行运算，必须把它量化处理，量化处理的一个有力工具就是真值表(即函数表)，它是由联结词的定义制成的.

（1） ¬ 的真值表

P	$\neg P$
1	0
0	1

（2） ∧的真值表

P	Q	$P\wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

∧相当于乘法.

（3） ∨的真值表

P	Q	$P\vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

∨相当于加法,不过 $1+1=1$,是逻辑和.

（4） →的真值表

P	Q	$P\to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

这个真值表是按"→"的定义做出的;它的含义是只禁止从正确的前提得出错误的结论;而当前提已假,则结论是真是假都是可以的;当然,前提真,结论也真自然是允许的(即第一行);禁止时,$P\to Q=0$;允许时,$P\to Q=1$.

在数理逻辑当中，$P \to Q$ 的前提与结论未必有因果关系，这里只是形式地讨论.

(5) $\leftrightarrow$ 的真值表

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

此表是表(4)的推论，$P \to Q$ 与 $Q \to P$ 皆真($=1$)时，$P \leftrightarrow Q = 1$，从(4)可得(5).

对于命题公式，可以由以上五张基本的真值表构作出(此命题公式的)真值表.

例如

P Q R	$P \to Q$	$R \vee P$	$R \vee Q$	$(R \vee P) \to (R \vee Q)$	A
1 1 1	1	1	1	1	1
1 1 0	1	1	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1	1
1 0 0	0	1	0	0	1
0 1 1	1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	1	1
0 0 1	1	1	1	1	1
0 0 0	1	0	0	1	1

其中 A 是命题公式

$(P \to Q) \to ((R \vee P) \to (R \vee Q))$,

此公式中含三个命题变元 P, Q, R，其赋值法有 $2^3 = 8$ 种，真值表中已穷举这 8 种赋值和 A 的对应值，$A \equiv 1$，所以命题 A 是永真公式.

用真值表也可证明永假公式.

例如

P	Q	$P\to Q$	$P\wedge(\neg Q)$	$(P\to Q)\wedge(P\wedge(\neg Q))$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

可见$(P\to Q)\wedge(P\wedge(\neg Q))$是永假公式.

这种真值表法证明公式是否永真或永假,直观易懂,但命题变元有 n 个时,要抄写 2^n 行数据,可见这种方法并不是好算法,应当寻找更好的方法.

6.1.4 等价公式、代换定理与对偶定理

定义 4 若 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现于公式 A 与 B 中的所有命题变元,对于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的任何赋值,A 与 B 的真(假)值皆一致,则称命题公式 A 与 B 等价,记成 $A=B$.□

值得一提的是,两个命题公式等价,它们的命题变元未必一致,甚至可以完全不一致,例如 $P\vee(\neg P)=Q\vee(\neg Q)$.

$A=B$ 是一种等价关系,即它有自反性($A=A$),对称性(即 $A=B$,则 $B=A$)和传递性(即 $A=B$, $B=C$,则 $A=C$),其中 A 与 B 是两个命题公式.

定理 1 A 与 B 是两个命题公式,$A=B$ 的充要条件是 $A\leftrightarrow B$ 是永真公式.

证 设 $A=B$,即对 A、B 中的命题变元的任意指派(赋值),A 与 B 有相同的真(假)值,由 $A\leftrightarrow B$ 的真值表,A 与 B 同真或同假时,$A\leftrightarrow B=1$,所以 $A\leftrightarrow B$ 是永真公式;反之亦可成立,证毕.

用真值表可以得出以下命题等价公式:

(1) 交换律

$$P\vee Q=Q\vee P, P\wedge Q=Q\wedge P, P\leftrightarrow Q=Q\leftrightarrow P.$$

(2) 结合律

$$(P\vee Q)\vee R=P\vee(Q\vee R),$$

$(P\wedge Q)\wedge R=P\wedge(Q\wedge R)$,

$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R=P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R)$.

(3) 分配律

$P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$,

$P\vee(Q\wedge R)=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$,

$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$.

(4) 吸收律

$P\vee(P\wedge Q)=P$,

$P\wedge(P\vee Q)=P$,

$P\rightarrow(P\rightarrow Q)=P\rightarrow Q$.

(5) 双否定律

$\neg\neg P=P$.

(6) 德·摩根律

$\neg(P\wedge Q)=\neg P\vee\neg Q$,

$\neg(P\vee Q)=\neg P\wedge\neg Q$.

(7) 幂等律

$P\wedge P=P, P\vee P=P$.

(8) 补律

$P\wedge\neg P=F, P\vee\neg P=T$.

(9) 0-1 律

$F\wedge P=F, T\vee P=T$.

(10) 条件律

$P\rightarrow Q=\neg P\vee Q$,

$P\leftrightarrow Q=(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)=(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P)$.

数理逻辑的一个几乎不证自明的但十分重要的所谓代换定理如下：

定理 2 若 A,X,Y 是三个命题公式，$X=Y$，而 X 是 A 的一部分(子公式)，则在 A 中用 Y 代替 X 之后得到的公式 B 满足 $A=B$.

定义 5 若公式 A 中只有 $\neg$，$\wedge$，$\vee$ 三个联结词，把 $\wedge$ 与 $\vee$ 互换，T 与 F 互换，得到另一个公式 A^*，则称 A 与 A^* 是对偶公式. □

定理 3 设 A 与 A^* 是对偶公式，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现于 A 与 A^* 中的命题变元，则

$$\neg A(P_1,P_2,\cdots,P_n)=A^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n).$$

证 由德·摩根律与代换定理得

$$\neg A(P_1,P_2,\cdots,P_n)=A^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n),$$

证毕

由于对偶是相互的，所以也有公式

$$\neg A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)=A(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n).$$

容易证明下面的定理：

定理 4 设 A^* 是 A 的对偶，B^* 是 B 的对偶，且 $A=B$，则 $A^*=B^*$.

定理 3 与定理 4 称为对偶定理.

为了书写方便，有时起用下面四个联结词：$\neq$(或$\oplus$)，$\uparrow$，$\downarrow$，$\not\rightarrow$，定义如下：

$P\neq Q$(或写成 $P\oplus Q$)$=\neg(P=Q)$,

$\neq$(或$\oplus$)的运算是 mod2 的意义下的加法($1+1=0$).

$$P\uparrow Q=\neg(P\wedge Q),$$

$$P\downarrow Q=\neg(P\vee Q),$$

$$P\not\rightarrow Q=\neg(P\rightarrow Q).$$

在命题公式中按( )，$\neg$，$\wedge$，$\uparrow$，$\oplus$，$\downarrow$，$\rightarrow$，$\not\rightarrow$，$=$，$\neq$ 的顺序进行运算.

6.1.5 范式

我们看到，由条件律，$\rightarrow$ 可以化成 $\neg$ 与 $\vee$；$\leftrightarrow$ 可以化成 $\neg$，$\vee$ 与 $\wedge$；可见一个公式中的联接词可以化成只含 $\neg$，$\wedge$，$\vee$ 三个中的一些联接词，再用德·摩根律，可以化成如下两种形式：

（ⅰ） $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i, A_i$ 是由命题变元或其否定组成的用 $\vee$ 联接的析取公式.

（ⅱ） $\bigvee\limits_{i=1}^{n} A_i, A_i$ 是由命题变元或其否定组成的用 $\wedge$ 联接的合取公式.

称形如(ⅰ)的公式为合取范式,(ⅱ)为析取范式.

例如求公式 $A=(P\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow S$ 的范式：

由条件律

$A=(P\wedge(\neg Q\vee R))\rightarrow S=\neg(P\wedge(\neg Q\vee R)\vee S$,

由德·摩根律

$$
\begin{aligned}
A &=\neg P\vee\neg(\neg Q\vee R)\vee S\\
&=\neg P\vee(\neg\neg Q\wedge\neg R)\vee S\\
&=\neg P\vee(Q\wedge\neg R)\vee S,
\end{aligned}
$$

$\neg P\vee(Q\wedge\neg R)\vee S$ 是析取范式,由 $\neg P, Q\wedge\neg R$ 与 S 三个析取项析取而成.

$$A=\neg P\vee(Q\wedge\neg R)\vee S.$$

由交换律与结合律得

$$A=(\neg P\vee S)\vee(Q\wedge\neg R).$$

由分配律得

$$A=(\neg P\vee S\vee Q)\wedge(\neg P\vee S\vee\neg R).$$

此式即 A 的合取范式,$\neg P\vee S\vee Q$ 与 $\neg P\vee S\vee\neg R$ 是它的两个合取项.

范式未必是唯一的,例如

$P\vee(Q\wedge R)$是析取范式,但

$$
\begin{aligned}
P\vee(Q\wedge R)&=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)\\
&=(P\wedge P)\vee(P\wedge R)\vee(Q\wedge P)\vee(Q\wedge R)
\end{aligned}
$$

也是一个析取范式,为了得到唯一的标准式,定义主范式.

定义 6 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是 n 个不同的命题变元,$A_i\in\{P_i$,

$\neg P_i\}$，则 $\bigvee_{i=1}^{n} A_i$ 称为关于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的极大项，$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i$ 称为关于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的极小项；若一个析取范式的每个析取项皆为极小项，则称之为主析取范式，若一个合取范式的每个合取项皆极大项，则称之为主合取范式. □

例如 $(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$ 是由 P,Q,R 三个命题变元组成的主析取范式，而 $(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee R)$ 是主合取范式.

例 1 求 $(\neg P\to R)\wedge(Q\leftrightarrow P)$ 的主范式.

解 令 $A=(\neg P\to R)\wedge(Q\leftrightarrow P)$，则

$$A=(\neg P\to R)\wedge(Q\to P)\wedge(P\to Q)$$

由条件律得

$$A=(P\vee R)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q).$$

为了在三个合取项中加入另一命题变元，可以通过 $\neg B\wedge B=0$ 来添加所缺变元 B：

$$\begin{aligned}A&=(P\vee R\vee(\neg Q\wedge Q))\wedge(P\vee\neg Q\vee(\neg R\wedge R))\wedge(\neg P\vee Q\vee(\neg R\wedge R))\\&=(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R).\qquad(1)\end{aligned}$$

至此得到五个极大项的主合取范式.

显然，每个极大项存在唯一的使其为假的真值赋值法，每个极小项存在唯一的使其为真的真值赋值法. 使 A 为假的赋值是使(1)中每个极大项为假对应的赋值，对于 3 个命题变元，其极大项共 $2^3=8$ 个，从而使 A 为真的赋值法，即使 $\neg A$ 为假的赋值法是未含的另三个极大项相应的赋值法，于是

$$\neg A=(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R),$$

$$A=\neg\neg A=\neg((P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)),$$

由德·摩根律，

$A=(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$,(2)

(2)即主析取范式.

n 个命题变元的公式A 化成主析取范式和主合取范式,两者含的极小项与极大项的项数之和是 2^n 个,两者有互补性;A 永真当且仅当A 的主析取范式中含 2^n 个极小项,当且仅当 A 的主合取范式中不含任何极大项;A 永假当且仅当A 的主析取范式中不含任何极小项,当且仅当 A 的主合取范式中含 2^n 个极大项.

A 是非永真的可满足公式当且仅当A 的主析(合)取范式中出现的极小(大)项的数目在区间$(0,2^n)$内,其中 n 是命题变元之个数.非永假公式的主析取范式是存在唯一的,非永真公式的主合取范式是存在唯一的.

6.2 命题逻辑中的推理

6.2.1 蕴含关系

定义 1 设 A 与B 是两个命题公式,当 $A\to B$ 为永真时,称 A 蕴含 B,记成 $A\Rightarrow B$.□

由定义,若 $A\Rightarrow B$,则 $A=1$ 时,$B=1$;从而若 $A\Rightarrow B$,且 A 永真,则 B 永真,且有以下简单性质:

(1) 传递性:$A\Rightarrow B$,$B\Rightarrow C$,则 $A\Rightarrow C$.

(2) 若 $A\Rightarrow B$,$A\Rightarrow C$,则 $A\Rightarrow(B\wedge C)$.

(3) 若 $A\Rightarrow C$,$B\Rightarrow C$,则$(A\vee B)\Rightarrow C$.

由真值表方法,可以得出以下蕴含定律.

(1) 化简律:$P\wedge Q\Rightarrow P$.

(2) 增广律:$P\Rightarrow P\vee Q$.

(3) 否定前件律:$\neg P\Rightarrow P\to Q$.

(4) 肯定后件律:$Q\Rightarrow P\to Q$.

(5) 合取律:$P,Q\Rightarrow P\wedge Q$.

(6) 选言推理:$\neg P,P\vee Q\Rightarrow Q$.

(7) 假言推理：$P, P\rightarrow Q\Rightarrow Q$.

(8) 否定式假言推理：$\neg Q, P\rightarrow Q\Rightarrow\neg P$.

(9) 假言三段论：$P\rightarrow Q, Q\rightarrow R\Rightarrow P\rightarrow R$.

以上的写法中 $A, B\Rightarrow C$ 即 $A\wedge B\Rightarrow C$.

6.2.2 真值表推理法

欲证 $A\Rightarrow B$，只欠证 $A\rightarrow B$ 永真，$A\rightarrow B$ 是否永真，可以从真值表上看出.

例如：求证 $P\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow Q$.

P	Q	$P\rightarrow Q$	$P\wedge(P\rightarrow Q)$	$(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

从真值表上看到 $(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$ 是永真式，所以 $P\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow Q$，证毕.

从表上看到，前提 $P\wedge(P\rightarrow Q)$ 中的两项 P 与 $P\rightarrow Q$ 在表上皆为 1 时，后件 Q 件也是 1；对 $\rightarrow$ 而言，前件为 0 时，后件必为 1，所以只要看到前提为 1 的那一行中，后件为 1，则推理成立，画真值表时，可以省略一些.

例 1 下面推理是否成立：

有证据表明犯罪嫌疑人当中，主犯是赵某或钱某，又已查明，赵某是从犯，所以主犯是钱某.

解 设命题 P 与 Q 如下：

P：主犯是赵；Q：主犯是钱.

于是问题即问推理

$$(P\vee Q)\wedge\neg P\Rightarrow Q$$

是否成立？列真值表如下：

P	Q	$P\vee Q$	$\neg P$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	0	1

第三行为0,1,1,1,所以推理成立.

推理 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n\Rightarrow B$ 可以写成

$$A_1,A_2,\cdots,A_n\vdash B,$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 与 B 皆命题.

6.2.3 直接推理法

引用等价定律、蕴含定律和正确推理规则,进行推理的直接推理法比真值表推理简洁.

例2 求证 $Q\Rightarrow P\rightarrow Q$.

证 令 $A=Q\rightarrow(P\rightarrow Q)$,只欠证 $A=T$.由条件律,

$$A=\neg Q\vee(P\rightarrow Q)=\neg Q\vee(\neg P\vee Q),$$

由结合律,

$$A=(\neg Q\vee Q)\vee\neg P=T\vee\neg P=T,$$

证毕.

常用的推理规则有三个:

(1) P规则:前提随时任意调用.

(2) T规则:前方推导出来的公式,在后面的证明中可以使用.

(3) CP规则:若 $A_1\wedge A_2\wedge,\cdots\wedge A_n\wedge Q\Rightarrow R$,则 $A_1\wedge A_2\wedge,\cdots\wedge A_n\Rightarrow Q\rightarrow R$;反之,若 $A_1\wedge A_2\wedge,\cdots\wedge A_n\Rightarrow Q\rightarrow R$,则 $A_1\wedge A_2\wedge,\cdots\wedge A_n\wedge Q\Rightarrow R$.

例3 证明 $\neg Q\Rightarrow(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg P$.

证 由CP规则,只欠证

$$\neg Q\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg P.$$

由否定式假言推理律知 $\neg Q\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg P$ 成立,证毕.

6.2.4 间接推理法

间接推理法即反证法.

例 4 求证 $P \to \neg Q, Q \vee \neg R, R \wedge \neg S \Rightarrow \neg P$.

证 若$\neg \neg P$为真,则由假言推理律得

$$P, P \to \neg Q \Rightarrow \neg Q.$$

由选言推理律,得

$$\neg Q, Q \vee \neg R \Rightarrow \neg R.$$

由化简律得

$$R \wedge \neg S = R.$$

由 $R \wedge \neg R = F$,矛盾,故$\neg \neg P = P$为假,$\neg P$为真,证毕.

习题一

1. 用真值表判定下列公式是不是永真公式,永假公式和可满足公式?

(1) $(P \to R) \to ((Q \to R) \to (P \vee Q \to R))$.

(2) $(P \to \neg P) \to \neg P$.

(3) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to P)$.

(4) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$.

(5) $(P \wedge Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to R) \to R$.

(6) $\neg P \wedge \neg (P \to Q)$.

(7) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$

2. 证明:

(1) $P \wedge (Q \oplus R) = (P \wedge Q) \oplus (P \wedge R)$.

(2) $(P \to Q) \wedge (P \to R) = P \to Q \wedge R$.

(3) $P \oplus 1 = \neg P$.

(4) $P \vee (P \wedge Q) = P$.

(5) $P \oplus Q = \neg (P \leftrightarrow Q)$.

(6) $(P \to Q) \vee (R \to Q) = P \wedge R \to Q$.

(7) $P\to(Q\to P)=\neg P\to(P\to Q)$.

(8) $(P\to Q)\wedge(R\to Q)=P\vee R\to Q$.

(9) $\neg(P\leftrightarrow Q)=P\leftrightarrow\neg Q$.

3. 北大、清华、科大和复旦四个大学的篮球队进行比赛，赛前，三位球迷竞猜如下：

观众甲："科大第一，清华第二".

观众乙："科大第二，复旦第三".

观众丙："北大第二，复旦第四".

结果每人都猜对了一半，没有并列名次，实际名次怎样排列？

4. 证明下列等式，且用对偶定理得出新等式：

(1) $\neg(\neg P\vee\neg Q)\vee\neg(\neg P\vee Q)=P$.

(2) $(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)=\neg(\neg P\vee Q)$.

(3) $Q\vee\neg((\neg P\vee Q)\wedge P)=1$.

5. 甲、乙、丙、丁四人参加考试，有人问谁成绩最好，甲说："不是我". 乙说："是丁". 丙说："是乙". 丁说："不是我". 四人的回答只有一个人说得对，问谁成绩最好？

6. 下列公式，哪些是析取范式？哪些是合取范式？

$P, P\vee Q, (P\vee Q)\wedge R, P\wedge\neg R, P\vee\neg P, ((P\vee Q)\wedge\neg Q)\vee R$.

7. 下列公式中，哪些是关于 P,Q,R 的主析取范式？哪些是关于 P,Q,R 的主合取范式？

$P\vee Q\vee R, P\wedge\neg Q\wedge R, (P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R), P\vee(Q\wedge R), (P\vee\neg P\vee Q)\wedge(P\vee Q\vee R)$.

8. 举一个既为主合取范式又是主析取范式的公式.

9. 利用主范式证明：

(1) $(P\to Q)\to P\wedge Q=(\neg P\to P)\wedge(R\to P)$.

(2) $(P\to Q)\wedge(P\to R)=P\to Q\wedge R$.

10. 求证：

(1) $\neg(P\wedge\neg Q), \neg Q\vee R, \neg R\Rightarrow\neg P$.

(2) $(A\to B)\wedge(A\to C),\neg(B\wedge C),D\vee A\Rightarrow D$.

11. 用反证法证明：

$R\to\neg Q,R\vee S,S\to\neg Q,P\to Q\Rightarrow\neg P$.

6.3 谓词逻辑

6.3.1 命题的谓词表达形式

一些复杂的逻辑推理问题，只靠命题逻辑不能解决，例如众所周知的亚里士多德三段论：

所有的人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的.

亚里士多德的老师伯拉图是古希腊（公元前400年左右）权威学者苏格拉底的学生，上述冒犯师爷的论证应该说是成立的，但用命题逻辑来论证时，例如令

P：所有的人都是要死的，

Q：苏格拉底是人，

R：苏格拉底是要死的.

欲证 $P\wedge Q\Rightarrow R$，即 $P\wedge Q\to R$ 永真，是不可能完成的，事实上，$P\wedge Q\to R$ 不是永真式. 可见必须对命题逻辑进行扩充，为此引入谓词逻辑.

若令 s 表示苏格拉底，P 表示“是人”；约定：“苏格拉底是人”这个命题写成 $P(s)$. 一般地，“x 是人”则写成函数形式 $P(x)$，$x\in X$，X 是一个集合，于是对于每个确定的 $x_0\in X$，$P(x_0)$是一个命题，例如 P(狗)$=0$，$P(s)=1$.

这种命题函数，也有多元的，例如 $P(x,y)$表示 $x>y$ 这种命题函数，$(x,y)\in\mathbf{R}^2$. 例如 $P(1,2)=0$，$P(2,1)=1$.

上面 $P(x)$中，P（表示“是人”）是一个判定的谓词（语），称 $P(x)$中的 P 为谓词，$P(x)$中的 P 称为一元谓词，$P(x,y)$中的 P 称为二元谓词，一般地，$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中的 P 称为 n 元（n

$\geqslant 1$)谓词，$x_i \in X_i$，X_i 是给定集合，X_i 称为个体 x_i 的个体域.

由谓词和变元组成的命题函数 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的值域为 $\{0,1\}=\{$假，真$\}$，仅当$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$取定之后，$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$才是命题.

关于命题函数 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的逻辑(推理的)内容称为谓词逻辑.

在谓词逻辑中，仍然用$\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$等联结词把一些命题函数复合成复合命题函数.

例如，若 $P(x, y)$表示 $x>y$，当 $x, y, z, \in \mathbf{R}$ 时，$P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)$是一个永真式.

若 $Q(x, y)$表示 x 是 y 的父亲，当 $x, y, z \in$ 全人类，则 $Q(x, y) \wedge Q(y, z) \rightarrow Q(x, z)$是永假式.

若 $D(x, y)$表示点 x 与点 y 的距离为 1，当 $x, y, z \in \mathbf{R}^2$ 时，$D(x, y) \wedge D(y, z) \rightarrow D(x, z)$不是永真的也不是永假的，而是可满足的，即对某些 $x, y, z, D(x, y) \wedge D(y, z) \rightarrow D(x, z)=1$，对某些 $x, y, z, D(x, y) \wedge D(y, z) \rightarrow D(x, z)=0$.

可知复合命题函数的值域为$\{0,1\}$.

在 n 元命题函数$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中，x_i 的变化范围，即个体域为 X_i；各种命题函数的个体域并成的集合称为全总论域，下面把"n 元命题函数"与"n 元谓词"混为一谈.

6.3.2 量词

定义 1 若命题函数 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中，x_i 的个体域为X_i，符号$\forall x_i$，表示"X_i 中的每个元素"(表示"任意取定"的所有 x_i 之意)，$\forall x_i$ 称为全称量词；符号$\exists x_i$ 表示"X_i 中存在一个 x_i"，$\exists x_i$ 称为存在量词.

$\forall x P(x)$表示"对所有的 $x \in X$，性质 $P(x)$成立"，其中 X 是 x 的个体域，称 $P(x)$是$\forall x$ 的辖区；$\exists x P(x)$表示"存在 $x \in X$，使得性质 $P(x)$成立"，称 $P(x)$为$\exists x$ 的辖区. □

$\forall x P(x)$与$\exists x P(x)$，当 x 属于全总论域时，是命题而不再

是命题函数了.

为了对一个命题进行准确刻划,要运用量词,而且,必要时要引入所谓“特性谓词”.

例如为了符号地表达“所有人都要死的”这一命题 A,则可设计两个谓词:

$H(x)$:x 是要死的.

$M(x)$:x 是人.

于是命题 A 可表成

$$\forall x(M(x)\to(H(x)).$$

其中“x 是人”$M(x)$就是视具体内容而设定的特性谓词.

再如“昨夜降大雪,今日有些人会跌跤”这一命题 B,令

S:昨夜降大雪,

$M(x)$:x 是人,

$F(x)$:x 跌跤,

则 B 可表成 $S\to\exists x(M(x)\wedge F(x))$.

又如命题 C:“第一筐桃子都是好的,但第二筐桃子中有烂的”.我们把桃子的变域视为全球一切桃子,这就是用了全总论域 X.

$P(x)$:x 是第一筐的桃子,$x\in X$;

$Q(x)$:x 是第二筐的桃子,$x\in X$;

且引入特性谓词:

$G(x)$:x 是好桃,$x\in X$;

$B(x)$:x 是烂桃,$x\in X$;

于是 $C=\forall x(P(x)\to G(x))\wedge\exists x(Q(x)\wedge B(x))$.

6.3.3 谓词公式及其变元

定义 2 若 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是无量词与联结词的命题函数,则称 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为基本谓词公式或原子公式,其中 x_i 属于全总论域,所谓谓词公式,是指:

(1) 一个原子公式是谓词公式.

(2) 永真公式 T 与永假公式 F 是谓词公式.

(3) 若 P 是谓词公式,则$\neg P$ 是谓词公式.

(4) 若 P 与 Q 是谓词公式,则 $P\wedge Q, P\vee Q, P\to Q, P\leftrightarrow Q$ 是谓词公式.

(5) P 是谓词公式,x 是变元,$x\in X$, X 是全总论域,则 $\forall x(P)$, $\exists x(P)$是谓词公式.

(6) 除以上五种规则经有限步生成的谓词公式,无其它谓词公式.□

质言之,谓词公式就是由原子命题、联结词、量词和括号组成的字符串.

谓词公式中,以$()$,$\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\to$,$\leftrightarrow$的顺序执行之.

命题公式是谓词公式的特例,一般而言,谓词公式是一个命题函数,不是一个命题,只有其中的每个变元 x_i 皆指定后,才成为一个命题.

定义 3 在$\forall x$ 与 $\exists x$ 的辖区内的变元称为约束变元,谓词公式中的非约束变元称为自由变元.□

例如谓词公式:$\forall x(P(x,y)\to Q(x))$中,$x$ 是约束变元,而 y 是自由变元,而$\forall x(P(x)\to \exists yQ(x,y))$中的变元,$x$,$y$ 皆约束变元.

更名规则 1 约束变元是"哑变元",即约束变元可以更名,把它的名字改写成其对应的量词的辖区内未出现的任何符号,辖区外的不改.

例如 $A=\forall x(P(x)\to Q(x,y))\wedge R(x,y)$,由更名规则 1,

$$A=\forall z(P(z)\to Q(z,y))\wedge R(x,y).$$

但

$$A\neq\forall z(P(z)\to Q(x,y))\wedge R(x,y)\quad(\text{改名不全}),$$

$$A\neq\forall z(P(z)\to Q(z,y))\wedge R(z,y)\quad(\text{出界改名}),$$

$$A\neq\forall y(P(y)\to Q(y,y))\wedge R(x,y)\quad(\text{重名改名}).$$

更名规则 2 自由变元可以更名,即把某一自由变元的符号

用任意的与其它变元不同的符号代换.

例如 $A=\exists x(P(y)\wedge Q(x,y))$, y 是自由变元,运用更名规则 2 得

$$A=\exists x(P(z)\wedge Q(x,z)).$$

但

$$A\neq\exists x(P(x)\wedge Q(x,x)) \quad (\text{重名}),$$

$$A\neq\exists x(P(z)\wedge Q(x,y)) \quad (\text{代入不全}).$$

含有自由变元的谓词公式一般不是命题公式,不含自由变元的谓词公式是命题公式.

个体域为有限集合时,量词可以消去:

设 $x\in X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,则

$\forall xA(x)=A(x_1)\wedge A(x_2)\wedge\cdots\wedge A(x_n)$,

$\exists xA(x)=A(x_1)\vee A(x_2)\vee\cdots\vee A(x_n)$.

6.3.4 谓词逻辑中的等价命题和代入规则

定义 4 把谓词公式中所有变元分别赋以确定的常值之后,公式得到一个确定的值,这样的一组变元常值叫做公式的一个赋值(指派).

一个谓词公式对一切可能的赋值皆取真(1)值,则称此谓词公式为永真公式;若对一切可能的赋值,此谓词公式皆取假(0)值,则称其为永假公式,存在使之为真的赋值的谓词公式称为可满足谓词公式.□

定义 5 若 A 与 B 是两个谓词公式,且对所有的共同赋值,A 与 B 的真假值一致,则称 A 与 B **等价**,记成 $A=B$.□

定义 6 若 A 与 B 是两个谓词公式,且 $A\rightarrow B$ 是永真的谓词公式,则称 A 蕴含 B,记成 $A\Rightarrow B$.□

代入规则:A 是含子公式 A_1 的谓词公式,若 $B_1=A_1$,用 B_1 代替 A 中的 A_1 后得到谓词公式 A',则 $A=A'$.

由于命题公式是谓词公式的特例,利用代入规则,命题逻辑中的等价定律和蕴含定律在谓词逻辑中仍成立.

例如命题逻辑中的交换律为 $P \vee Q = Q \vee P$,令 P 用 $\forall xP(x)$, Q 用 $\forall xQ(x)$ 代入,则成立

$$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) = \forall xQ(x) \vee \forall xP(x).$$

除了把命题逻辑中的关于"="与"⇒"的定律移到谓词逻辑中来,谓词逻辑中还添加了一些新定律,这些新定律都与量词有关.

(1) 量词转化律

$$\neg(\forall xP(x)) = \exists x(\neg P(x)).$$

$$\neg(\exists xP(x)) = \forall x(\neg P(x)).$$

$$\exists x(P(x) \to Q(x)) = \forall xP(x) \to \exists xQ(x).$$

(2) 量词分配律

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) = \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x).$$

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) = \exists xP(x) \vee \exists xQ(x).$$

(3) 辖区扩充律

$$\forall xA(x) \vee B = \forall x(A(x) \vee B).$$

$$\forall xA(x) \wedge B = \forall x(A(x) \wedge B).$$

$$\exists xA(x) \to B = \forall x(A(x) \to B).$$

$$B \to \forall xA(x) = \forall x(B \to A(x)).$$

$$\exists xA(x) \vee B = \exists x(A(x) \vee B).$$

$$\exists xA(x) \wedge B = \exists x(A(x) \wedge B).$$

$$\forall xA(x) \to B = \exists x(A(x) \to B).$$

$$B \to \exists xA(x) = \exists x(B \to A(x)).$$

(4) 量词交换律

$$\forall x \forall yP(x,y) = \forall y \forall xP(x,y).$$

$$\exists x \exists yP(x,y) = \exists y \exists xP(x,y).$$

(5) 量词蕴含律

$$\forall xP(x) \Rightarrow P(x).$$

$$P(x) \Rightarrow \exists xP(x).$$

$$\forall xP(x) \Rightarrow \exists xP(x).$$

$$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x)).$$

$\exists x(P(x)\wedge Q(x)\Rightarrow \exists xP(x)\wedge \exists xQ(x)$.

$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\Rightarrow \forall xP(x)\rightarrow \forall xQ(x)$.

$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\Rightarrow \exists xP(x)\rightarrow \exists xQ(x)$.

$\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x))\Rightarrow \forall xP(x)\leftrightarrow \forall xQ(x)$.

$\exists x\forall yP(x,y)\Rightarrow \forall y\exists xP(x,y)$.

$\exists y\forall xP(x,y)\Rightarrow \forall x\exists yP(x,y)$.

$\forall x\forall yP(x,y)\Rightarrow \exists y\forall xP(x,y)$.

$\forall y\forall xP(x,y)\Rightarrow \exists x\forall yP(x,y)$.

$\forall x\exists yP(x,y)\Rightarrow \exists x\exists yP(x,y)$.

$\forall y\exists xP(x,y)\Rightarrow \exists x\exists yP(x,y)$.

$\exists xP(x)\rightarrow \forall xQ(x)\Rightarrow \forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$.

例 1 设变元 $x\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,求证:$\neg(\forall xP(x))=\exists x(\neg P(x))$,$\neg(\exists xP(x))=\forall x(\neg P(x))$.

证 由于

$\forall xP(x)=P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\cdots\wedge P(a_n)$,

$\exists xP(x)=P(a_1)\vee P(a_2)\vee\cdots\vee P(a_n)$,

所以

$\neg(\forall xP(x))=\neg(P(a_1)\wedge P(a_n)\wedge\cdots\wedge P(a_n))$,

$\neg(\exists xP(x))=\neg(P(a_1)\vee P(a_n)\vee\cdots\vee P(a_n))$,

由德·摩根律得

$$\neg(\forall xP(x))=\neg P(a_1)\vee\neg P(a_2)\vee\cdots\vee\neg P(a_n)$$
$$=\exists x(\neg P(x)),$$
$$\neg(\exists xP(x))=\neg P(a_1)\wedge\neg P(a_2)\wedge\cdots\wedge\neg P(a_n)$$
$$=\forall x(\neg P(x)),$$

证毕.

例 2 设 $x\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,求证:

$\forall x(P(x)\wedge Q(x))=\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$,

$\exists x(P(x)\vee Q(x))=\exists xP(x)\vee\forall xQ(x)$.

证 $\forall x(P(x)\wedge Q(x))=(P(a_1)\wedge Q(a_1))\wedge(P(a_2)\wedge Q(a_2))\wedge\cdots\wedge(P(a_n)\wedge Q(a_n))$

$=(P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\cdots\wedge P(a_n))\wedge(Q(a_1)\wedge Q(a_2)\wedge\cdots\wedge Q(a_n))$

$=\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x).$

$\exists x(P(x)\vee Q(x))$

$=(P(a_1)\vee Q(a_1))\vee(P(a_2)\vee Q(a_2))\vee\cdots\vee(P(a_n)\vee Q(a_n))$

$=(P(a_1)\vee P(a_2)\vee\cdots\vee P(a_n))\vee(Q(a_1))\vee Q(a_2)\vee\cdots\vee Q(a_n))$

$=\exists xP(x)\vee\exists xQ(x),$

证毕.

例 3 求证：$\exists x(P(x)\to Q(x))=\forall xP(x)\to\exists xQ(x)$.

证 由条件律得

$$\begin{aligned}\exists x(P(x)\to Q(x))&=\exists x(\neg P(x)\vee Q(x))\\&=\exists x(\neg P(x))\vee\exists xQ(x)\\&=\neg(\forall xP(x))\vee\exists xQ(x)\\&=\forall xP(x)\to\exists xQ(x),\end{aligned}$$

证毕.

例 4 求证：$\forall xP(x)\to Q=\exists x(P(x)\to Q),x\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

证 由 $x\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则

$$\forall xP(x)\to Q=P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\cdots\wedge P(a_n)\to Q$$

由条件律得

$$\forall xP(x)\to Q=\neg(P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\cdots\wedge P(a_n)\vee Q,$$

由德·摩根律得

$$\begin{aligned}\forall xP(x)\to Q&=(\neg P(a_1)\vee\neg P(a_2)\vee\cdots\vee\neg P(a_n))\vee Q\\&=(\neg P(a_1)\vee Q)\vee(\neg P(a_2)\vee Q)\vee\cdots\vee(\neg P\end{aligned}$$

$(a_n)\vee Q)$

$= \exists x(\neg P(x)\vee Q)$

$= \exists x(\neg P(x)\to Q)$,

证毕.

谓词逻辑中也讲究范式,以便把谓词公式化成某种标准形式,最常用的是前束范式.

如果把所有量词皆以非否定形式放于式子之首,且其辖区是整个公式,这种形式称为前束范式.

例如

$\exists x\forall y\forall z\exists u(\neg P(x,z)\vee\neg P(y,z)\vee Q(x,y,z,u))$

就是一个前束范式.

例 5 把$\forall xP(x)\vee\exists yR(y)\to\forall xQ(x)$化成前束范式的形式.

解 由条件律

$\forall xP(x)\vee\exists yR(y)\to\forall xQ(x)$

$=\neg(\forall xP(x)\vee\exists yR(y))\vee\forall xQ(x)$,

由德·摩根律得

$\neg(\forall xP(x)\vee\exists yR(y))\vee\forall xQ(x)$

$=(\neg(\forall xP(x))\wedge\neg(\exists yR(y)))\vee\forall xQ(x)$

由量词转化律及更名规则得

$\exists x(\neg P(x))\wedge\forall y(\neg R(y))\vee\forall xQ(x)$

$=\exists x(\neg P(x))\wedge\forall y(\neg R(y))\vee\forall zQ(z)$

$=\exists x\forall y\forall z(\neg P(x))\wedge\neg R(y)\vee Q(z))$,

至此得出前束范式.

6.4 谓词逻辑中的推理

蕴含定律

(1) **脱帽与戴帽规则**

$\forall xP(x) \Rightarrow P(c)$，其中 $c \in X$，X 是 $P(x)$ 的个体域.

$P(c) \Rightarrow \exists xP(x)$.

例 1 求证："所有的人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的."

证 令 s 表示苏格拉底，$D(x)$ 表示 x 是要死的；$M(x)$ 表示 x 是人，于是欲证

$$\forall x(M(x) \to D(x)) \land M(s) \Rightarrow D(s). \tag{*}$$

由脱帽规则得

$$\forall x(M(x) \to D(x)) \Rightarrow M(s) \to D(s),$$

于是

$$\forall x(M(x) \to D(x)) \land M(s) \Rightarrow (M(s) \to D(s)) \land M(s),$$

由条件律及分配律得

$$\begin{aligned}\forall x(M(x) \to D(x)) \land M(s) &\Rightarrow (\neg M(s) \lor D(s)) \land M(s) \\ &\Rightarrow D(s) \land M(s),\end{aligned}$$

由化简律得

$$D(s) \land M(s) \Rightarrow D(s),$$

即 (*) 成立，证毕.

(2) **不安全脱帽与不安全戴帽规则**

$$\exists xP(x) \Rightarrow P(c), \tag{2.1}$$

$$P(c) \Rightarrow \forall xP(x), \tag{2.2}$$

其中 c 是某个个体；但在(2.1)中，c 要选择恰当才能成立，不是任意选的 c，(2.1)皆成立(不安全，不保险)；在(2.2)中，仅当 c 可任选时才能使(2.2)成立.

例 2 求证：

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(Q(x) \to R(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \to R(x)).$$

证 由脱帽规则

$\forall x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow P(c) \to Q(c)$，$\forall c \in X$，$X$ 是 x 的个体域.

$$\forall x(Q(x)\to R(x))\Rightarrow Q(c)\to R(c).$$

由假言三段论得，$P(c)\to R(c)$，此处由于 c 是任取的 X 中的一元素，由不安全戴帽规则(此处不安全戴帽已是安全的)得

$$\forall x(P(x)\to R(x)),$$

证毕.

例 3 求证：$\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)\Rightarrow\forall x(P(x)\vee Q(x))$.

证 由量词蕴含律得

$$\forall xP(x)\Rightarrow P(x),\ \forall xQ(x)\Rightarrow Q(x),$$

由增广律得

$$P(x)\Rightarrow P(x)\vee Q(x),\ Q(x)\Rightarrow P(x)\vee Q(x),$$

于是由传递性得

$$\forall xP(x)\Rightarrow P(x)\vee Q(x),$$
$$\forall xQ(x)\Rightarrow P(x)\vee Q(x).$$

从而

$$\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)\Rightarrow P(x)\vee Q(x),$$

由不安全戴帽规则(此处安全)得

$$P(x)\vee Q(x)\Rightarrow\forall x(P(x)\vee Q(x)),$$

所以 $\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)\Rightarrow\forall x(P(x)\vee Q(x))$，证毕.

例 4 求证：$\exists x(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)$.

证 由不安全脱帽规则，存在 $y\in X$(X 是个体变域)，使得

$$\exists x(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow P(y)\wedge Q(y)\Rightarrow Q(y),$$

同时

$$\exists x(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow P(y).$$

由安全戴帽规则得

$$\exists x(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow\exists xP(x),$$
$$\exists x(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow\exists xQ(x).$$

所以

$$\exists x(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x),$$

证毕.

例 5 求证：$\forall x(A(x)\lor B(x))\Rightarrow \forall xA(x)\lor \exists xB(x)$.

证 用反证法.

假设 $\neg(\forall xA(x)\lor \exists xB(x))=T$,

由德·摩根律得

$T=\neg(\forall xA(x))\land\neg(\exists xB(x))$,

$\neg(\forall xA(x))=T=\neg(\exists xB(x))$,

由量词转化律得

$\neg(\forall xA(x))=\exists x(\neg A(x))=\forall x(\neg B(x))=T$,

由脱帽规则得

$\neg B(x)=T$,存在 $y\in X$,$\neg A(y)=T$,

$\neg B(y)\land\neg A(y)=T$.

由德·摩根律得

$\neg(A(y)\lor B(y))=T, A(y)\lor B(y)=F$, (*)

由已知 $\forall x(A(x)\lor B(x))=T$,由脱帽规则得

$A(y)\lor B(y)=T$, (* *)

(*)与(* *)相违,所以

$\neg(\forall xA(x)\lor \exists xB(x))\neq T$,

即

$\forall xA(x)\lor \exists xB(x)=T$,

证毕.

习题二

1. 下列谓词公式中,哪些是自由变元?哪些是约束变元?

(1) $\forall x(P(x)\land Q(x))\rightarrow \forall xP(x)\land Q(x)$.

(2) $\forall x(P(x)\land \exists xQ(x)\lor(\forall xP(x)\rightarrow Q(x))$.

2. 设 x 的个体域是$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,消去下列谓词公式中的量词:

(1) $\forall xR(x)\land \forall xS(x)$.

(2) $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$.

(3) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

(4) $\forall x(\neg P(x)) \vee \forall xP(x)$.

3. 对约束变元改名：

(1) $\forall x \exists y(P(x,z) \rightarrow Q(y) \leftrightarrow S(x,y)$.

(2) $\forall x(P(x) \rightarrow R(x) \vee Q(x)) \wedge \exists xR(x) \rightarrow \exists zS(x,z)$.

4. 求证：

(1) $\forall xP(x) \vee Q = \forall x(P(x) \vee Q)$.

(2) $\exists xP(x) \wedge Q = \exists x(P(x) \wedge Q)$.

(3) $\forall xP(x) \vee Q = \forall x(P(x) \vee Q)$.

(4) $Q \rightarrow \forall xP(x) = \forall x(Q \rightarrow P(x))$.

(5) $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$.

(6) $\forall xP(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$.

5. 把$\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$化成前束范式.

6. 证明：

(1) $\neg(\exists xP(x) \wedge Q(a)) \Rightarrow \exists xP(x) \rightarrow \neg Q(a)$.

(2) $\forall x(\neg P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(\neg Q(x)) \Rightarrow P(a)$.

(3) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow P(x) \rightarrow R(x)$.

(4) $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \forall x \neg P(x) \Rightarrow \exists xQ(x)$.

7. 判断下列公式哪些是永真式？哪些是永假式？哪些是可满足式？

(1) $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \rightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$.

(2) $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

(3) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$.

(4) $\forall xP(x,x) \rightarrow \forall x \forall y \cdot P(x,y)$.

(5) $(\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

(6) $(\exists xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

(7) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x))$.

8. 断定下列等价式是否成立?

(1) $\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x))=\forall xP(x)\leftrightarrow\forall xQ(x)$.

(2) $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))=\forall xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)$.

(3) $\forall xP(x)=P(x)$.

(4) $\forall x\forall xP(x)=\forall xP(x)$.

(5) $\forall x(P(x)\leftrightarrow\forall yQ(y))=\forall xP(x)\leftrightarrow\forall yQ(y)$.

(6) $\forall x(P(x)\leftrightarrow\forall yQ(y))=\exists xP(x)\leftrightarrow\forall yQ(y)$.

9. 用谓词逻辑证明:

(1)每个自然数不是奇数就是偶数;自然数是偶数,当且仅当它能被 2 整除;不是所有的自然数都能被 2 整除;因此,有的自然数是奇数.

(2)一个人怕困难,他就不能成功;每个人或者获得成功或者失败过,有些人曾经失败过,所以有些人不怕困难.

参 考 文 献

[1] Bondy J. A, Murty U. S. R, Graph Theory with Appli cations, Macmillan Press LTD, 1976.

[2] Even S. Graph Algorithms, Maryland Computer Science Press, 1979.

[3] Garey M. R, Johnson D. S, Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP – Completeness, Freaman, 1979.

[4] Beineke L. W, Wilson R. J, Selected Topics in Graph Theory, Academic Press, 1978.

[5] Chartrand G. The Theory and Applications of Graphs (Fourth International conference), John wiley and sons, 1981.

[6] Bollobas. B, Extramal Graph Theroy, Academic Press, 1978.

[7] 王树禾,数学模型基础,中国科大出版社,1996.

[8] 王树禾,图论及其算法,中国科大出版社,1990.

[9] Gondran M, Minoux M, Vajda S Graphs and Algorithms, A wiley – intersience publication, 1979.

[10] 王树禾,侯定丕,经济与管理科学的数学模型,中国科大出版社,2000.

[11] 杨振生,组合数学及其算法,中国科大出版社,1997.

[12] 冯克勤,李尚志,查建国,近世代数引论,中国科大出版社,1988.
[13] 李乔,组合数学基础,高等教育出版社,1993.
[14] 邵嘉裕,组合数学,同济大学出版社,1991.
[15] 侯定丕,层次分析,安徽科学技术出版社,1990.
[16] 卢开澄,组合数学算法与分析,清华大学出版社,1983.
[17] 尹宝林等,离散数学,高等教育出版社,1997.
[18] 李盘林等,离散数学,高等教育出版社,1999.
[19] 孙淑玲,代数结构,中国科大出版社,1990.
[20] 汪芳庭,数理逻辑,中国科大出版社,1990.

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝离散数学引论
作者＝
页数＝４１０
ＳＳ号＝０
出版日期＝